

2026학년도 대학수학능력시험  
수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2026. 04. 06.(월)

■ [공통: 수학 I·수학 II]

01. ① 02. ④ 03. ⑤ 04. ③ 05. ③  
 06. ② 07. ⑤ 08. ① 09. ④ 10. ③  
 11. ③ 12. ② 13. ⑤ 14. ④ 15. ④  
 16. 9 17. 16 18. 12 19. 15  
 20. 130 21. 65 22. 457

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} 9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} &= (3^2)^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{2 \times \frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})} \\ &= 3^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

정답 ①

2. 출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + 4x + 1 \text{에서} \\ f'(x) &= 9x^2 + 4 \\ \text{이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= f'(1) \\ &= 9 + 4 = 13 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 시그마의 정의와 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 (2a_k - k) &= 2 \sum_{k=1}^4 a_k - \sum_{k=1}^4 k \\ &= 2 \sum_{k=1}^4 a_k - \frac{4 \times 5}{2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^4 a_k - 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

에서  $2 \sum_{k=1}^4 a_k = 10$

따라서  $\sum_{k=1}^4 a_k = 5$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속  
 이므로  $x=1$ 에서도 연속이어야 한다.

즉,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

이어야 한다.

이때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 2) \\ &= 3 \times 1 - 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + a) \\ &= 1^2 - 3 \times 1 + a = -2 + a \end{aligned}$$

$$f(1) = 1^2 - 3 \times 1 + a = -2 + a$$

이므로  
 $1 = -2 + a$   
 따라서  
 $a = 3$

정답 ③

5. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여  
 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = (x+2)(2x^2 - x - 2) \text{에서}$$

$$f'(x) = 1 \times (2x^2 - x - 2) + (x+2) \times (4x - 1)$$

따라서

$$f'(1) = (2 - 1 - 2) + (1 + 2) \times (4 - 1)$$

$$= -1 + 9$$

$$= 8$$

정답 ③

6. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여  
 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

로그의 정의에 의하여

$$\log_a b = 3 \text{에서}$$

$$b = a^3$$

이때

$$\log_3 \frac{b}{a} = \log_3 \frac{a^3}{a} = \log_3 a^2 = 2 \log_3 a = \frac{1}{2}$$

에서

$$\log_3 a = \frac{1}{4}$$

이므로

$$\log_3 b = 3 \log_3 a = \frac{3}{4}$$

따라서 로그의 성질에 의해

$$\log_9 ab = \log_{3^2} (a \times a^3)$$

$$= \frac{4}{2} \log_3 a$$

$$= 2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

정답 ②

7. 출제의도 : 두 곡선으로 둘러싸인 부  
 분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선  $y = x^2 + 3$ ,  $y = -\frac{1}{5}x^2 + 3$ 은 점  
 $(0, 3)$ 에서 접하고 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$x^2 + 3 \geq -\frac{1}{5}x^2 + 3$$

이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \left\{ (x^2 + 3) - \left( -\frac{1}{5}x^2 + 3 \right) \right\} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{6}{5} x^2 dx$$

$$= \left[ \frac{2}{5} x^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{16}{5}$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를  
 이용하여 사인함수의 값을 구할 수 있는  
 가?

정답풀이 :

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta > 0$$

이므로

$$\cos\theta < 0$$

이때,

$$\sin\theta + 3\cos\theta = 0$$

에서

$$\sin\theta = -3\cos\theta > 0$$

이고,

$$\sin^2\theta = 9\cos^2\theta$$

$$= 9(1 - \sin^2\theta)$$

$$= 9 - 9\sin^2\theta$$

$$10\sin^2\theta = 9$$

$$\sin^2\theta = \frac{9}{10}$$

$\sin\theta > 0$ 이므로

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

정답 ①

9. 출제의도 : 삼차함수의 그래프와 극값을 이용하여  $x$ 축에 평행한 직선과 삼차함수의 그래프가 접할 때의 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2$$

$$= 3(x + 3a)(x - a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -3a \text{ 또는 } x = a$$

$a > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	$-3a$	...	$a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소

한편,  $f(0) = 4 < 5$ 이고,

직선  $y = 5$ 가 곡선  $y = f(x)$ 에 접하므로

$$f(-3a) = 5$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned} f(-3a) &= (-3a)^3 + 3a(-3a)^2 - 9a^2(-3a) + 4 \\ &= 27a^3 + 4 \end{aligned}$$

이므로

$$27a^3 + 4 = 5 \text{에서}$$

$$a^3 = \frac{1}{27}$$

$a$ 가 양수이므로

$$a = \frac{1}{3}$$

따라서  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 4$

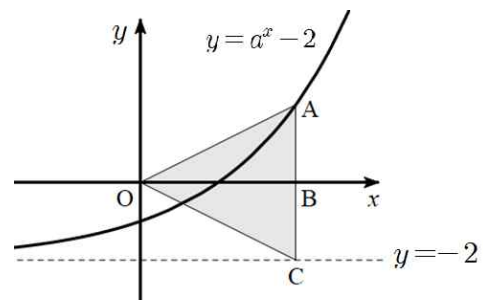
이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 + 2^2 - 2 + 4 \\ &= 14 \end{aligned}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$a > 1$ 이므로 함수  $y = a^x - 2$ 의 그래프는 위 그림과 같고 이 곡선의 점근선은 직선  $y = -2$ 이다.

점 A의 좌표를  $(p, q)$ 라 하면

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 2$$

이므로

$$q=2$$

점 A는 곡선  $y=a^x-2$  위의 점이므로

$$2=a^p-2$$

즉,  $a^p=4$ 에서  $p=\log_a 4$

이때 삼각형 AOC의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{OB} = 8$$

에서

$$\overline{OB} = 4$$

즉,  $\log_a 4 = 4$ 이므로

$$a^4 = 4$$

$a > 1$ 이므로  $a = \sqrt{2}$

따라서

$$a \times \overline{OB} = \sqrt{2} \times 4$$

$$= 2^{\frac{1}{2}+2}$$

$$= 2^{\frac{5}{2}}$$

정답 ③

11. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 이용하여 위치와 운동 방향, 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.  $k=0$ 이면  $v(t)=t^2+4$ 이므로

$t=1$ 일 때 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^1 (t^2+4)dt$$

$$= \left[ \frac{1}{3}t^3 + 4t \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + 4 - 0$$

$$= \frac{13}{3} \text{ (참)}$$

ㄴ.  $k=3$ 이면  $v(t)=t^2-3t+4$ 이므로

$$v(t) = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

따라서 출발한 후 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다. (거짓)

ㄷ.  $k=5$ 이면  $v(t)=t^2-5t+4$ 이므로

$$v(t) = (t-1)(t-4)$$

$0 < t < 1$ 일 때,  $v(t) > 0$ 이고

$1 < t < 2$ 일 때,  $v(t) < 0$ 이므로

시각  $t=0$ 에서 시각  $t=2$ 까지

점 P가 움직인 거리를  $s$ 라 하면

$$s = \int_0^2 |v(t)|dt$$

$$= \int_0^2 |t^2 - 5t + 4|dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 - 5t + 4)dt$$

$$+ \int_1^2 \{-(t^2 - 5t + 4)\}dt$$

$$= \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t \right]_0^1$$

$$- \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4$$

$$- \left\{ \left( \frac{8}{3} - 10 + 8 \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 \right) \right\}$$

$$= 3 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

12. 출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$ 이라 하자.

$$2(a_1 + a_4 + a_7) = 6 \text{에서}$$

$$2(a_1 + a_1r^3 + a_1r^6) = 2a_1(1 + r^3 + r^6) = 6$$

$$a_1(1 + r^3 + r^6) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 6 \text{에서}$$

$$a_1r^3 + a_1r^6 + a_1r^9$$

$$= a_1r^3(1 + r^3 + r^6) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{을 하면}$$

$$r^3 = 2$$

$\textcircled{7}$ 에  $r^3 = 2$ 를 대입하면

$$a_1(1 + 2 + 2^2) = 3$$

$$a_1 = \frac{3}{7}$$

따라서

$$a_{10} = a_1r^9 = \frac{3}{7} \times 2^3 = \frac{24}{7}$$

정답 ②

13. 출제의도 : 곱의 미분법과 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x) = 2x - 4$ 에서  $f'(1) = -2$ 이므로 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(1, -6)$ 에서의 접선  $l$ 의 방정식은

$$y = -2(x - 1) - 6$$

$$\text{즉, } y = -2x - 4$$

$g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 에서 곱의 미분법에 의하여

$$g'(x) = (3x^2 - 2)f(x) + (x^3 - 2x)f'(x)$$

이므로

$$g'(1) = (3 - 2)f(1) + (1 - 2)f'(1)$$

$$= 1 \times (-6) + (-1) \times (-2) = -4$$

곡선  $y = g(x)$  위의 점  $(1, 6)$ 에서의 접선  $m$ 의 방정식은

$$y = -4(x - 1) + 6$$

$$\text{즉, } y = -4x + 10$$

이때 두 직선  $y = -2x - 4$ ,  $y = -4x + 10$

의 교점의  $x$ 좌표는

$-2x - 4 = -4x + 10$ 에서  $x = 7$ 이므로 두 직선과  $y$ 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{10 - (-4)\} \times 7 = 49$$

정답 ⑤

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle HCG = \angle BAC = \theta_1$ 이라 하자.

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC}^2 = \sqrt{(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

이므로

$$\sin \theta_1 = \frac{4}{5}$$

또한

$$\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{AG} = 2$$

이므로  $\angle CAG = \theta_2$ 라 하면 삼각형 ACG에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta_2 = \frac{(\overline{AG})^2 + (\overline{AC})^2 - (\overline{CG})^2}{2 \times \overline{AG} \times \overline{AC}}$$

$$= \frac{2^2 + 5^2 - (2\sqrt{6})^2}{2 \times 2 \times 5} = \frac{1}{4}$$

따라서 삼각형 AEG에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{GE}^2 &= (\overline{AG})^2 + (\overline{AE})^2 - 2 \times \overline{AG} \times \overline{AE} \times \cos\theta_2 \\ &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{4} = 6\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{GE} = \sqrt{6}$$

삼각형 CGE에서  $\angle ECG = \theta_3$ 이라 하면  
코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos\theta_3 &= \frac{(\overline{CG})^2 + (\overline{CE})^2 - (\overline{GE})^2}{2 \times \overline{CG} \times \overline{CE}} \\ &= \frac{(2\sqrt{6})^2 + 3^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times 2\sqrt{6} \times 3} = \frac{3\sqrt{6}}{8}\end{aligned}$$

따라서

$$\sin\theta_3 = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

삼각형 CGE의 외접원의 반지름의 길이를  $R$ 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}2R &= \frac{\overline{GE}}{\sin\theta_3} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{10}}{8}} = \frac{8\sqrt{15}}{5}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 CHG에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{GH} &= 2R \times \sin\theta_1 \\ &= \frac{8\sqrt{15}}{5} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{32\sqrt{15}}{25}\end{aligned}$$

정답 ④

15. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수의 도함수와 함수의 극대, 극소를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$h(x) = \int_0^x (g(t) - f(t))dt \text{에서}$$

$$h'(x) = g(x) - f(x)$$

이므로 함수  $h(x)$ 가 오직 하나의 극값을 가지려면

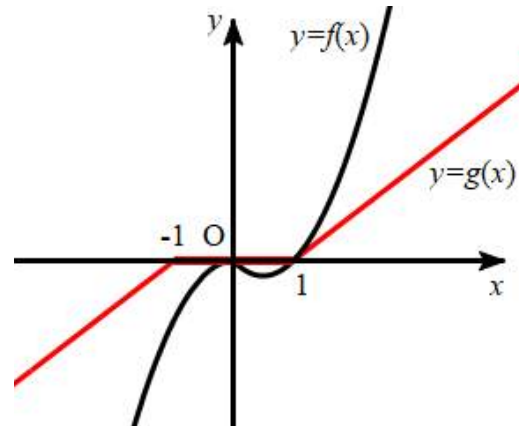
$$h'(x) = 0, \text{ 즉 } f(x) = g(x)$$

이면서  $h'(x) = 0$ 인 점의 좌우에서  $h'(x)$ 의 부호가 바뀌는 점이 오직 한 개만 있어야 한다.

이때  $f'(1) = 1$ 이므로  $a \leq 1$ 이면 다음 그림과 같이  $x=0$  또는  $x=1$ 에서만

$$f(x) = g(x)$$

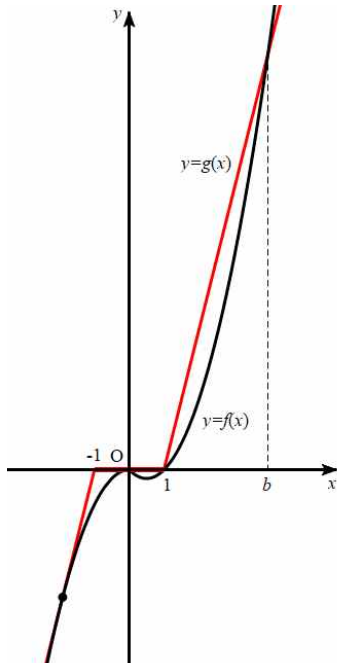
이다.



이때  $x < 1$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $g(x) \geq f(x)$ 이므로 함수  $h(x)$ 는  $x=0$ 에서 극값을 갖지 않고,  $0 < x < 1$ 에서  $g(x) > f(x)$ ,  $x > 1$ 에서  $f(x) > g(x)$ 이므로 함수  $h(x)$ 는  $x=1$ 에서만 극값을 갖는다.

즉,  $a \leq 1$ 이면 조건을 만족시킨다.

한편  $a > 1$ 이면 다음 그림과 같이  $x > 1$ 에서  $f(x) = g(x)$ 인  $x$ 의 값이 있다. 이 값을  $b$ 라 하자.



이때  $g(b) - f(b) = 0$ 이고  $1 < x < b$ 에서  $g(x) > f(x)$ ,  $x > b$ 에서  $f(x) > g(x)$ 이므로 함수  $h(x)$ 는  $x=b$ 에서 극값을 갖는다.

그러므로 조건을 만족시키려면  $x < -1$ 에서  $f(x) > g(x)$ 인 구간이 없어야 하므로  $a$ 의 값은 위 그림과 같이  $x < -1$ 에서 곡선  $y = -x^2$ 과 직선  $y = ax + a$ 가 접할 때 최대가 된다.

이 접점의 좌표를  $(t, -t^2)$ 이라 하면 접선의 기울기가  $-2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + t^2 = -2t(x - t)$$

이다. 이 직선이 점  $(-1, 0)$ 을 지나야 하므로

$$t^2 = -2t(-1 - t)$$

$$t(t + 2) = 0$$

$$t < -1 \text{이므로 } t = -2$$

즉, 조건을 만족시키는  $a$ 의 최댓값은

$$-2t = 4$$

이므로

$$k = 4$$

이때,  $x \geq 1$ 에서  $g(x) = 4x - 4$ 이므로

$$\begin{aligned} h(3) &= \int_0^3 (g(t) - f(t)) dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 + t) dt + \int_1^3 \{(4t - 4) - (t^2 - t)\} dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 + t) dt + \int_1^3 (-t^2 + 5t - 4) dt \\ &= \left[ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &\quad + \left[ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 4t \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{10}{3} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } k + h(3) = 4 + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

정답 ④

16. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = n^2 a_n + 1 \quad \dots \textcircled{7}$$

을 만족시키므로

⑦에  $n=1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 1^2 \times a_1 + 1 \\ &= 1 \times 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

⑦에  $n=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= 2^2 \times a_2 + 1 \\ &= 4 \times 2 + 1 \\ &= 9 \end{aligned}$$

정답 9

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$F(x)$ 가 함수  $f(x)$ 의 한 부정적분이므로

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int (4x^3 - 2x)dx \\ &= x^4 - x^2 + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)} \end{aligned}$$

$$F(0) = 4 \text{이므로 } C = 4$$

따라서  $F(x) = x^4 - x^2 + 4$ 이므로

$$F(2) = 16 - 4 + 4 = 16$$

정답 16

18. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos(\angle BAC) = -\frac{3}{5}$$

이고,  $\sin(\angle BAC) > 0$  이므로

$$\begin{aligned} \sin(\angle BAC) &= \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAC)} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin(\angle BAC) \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{4}{5} = 12 \end{aligned}$$

정답 12

19. 출제의도 : 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$ 이라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$  에서  $x = -2$  또는  $x = 1$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = -2$ 에서 극댓값  $f(-2) = 12$ 를 갖고,  $x = 1$ 에서 극솟값  $f(1) = -15$ 를 갖는다.

이때  $f(2) = -4$ 이므로  $-2 \leq x \leq 2$ 에서  $-15 \leq f(x) \leq 12$

따라서 양수  $k$ 의 최솟값은 15이다.

정답 15

20. 출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계 및  $\sum$ 의 정의를 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

2이상의 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left\{ \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{6}(n+1)^2 - \frac{1}{6}(n+1) + 10 \right\} \\ &\quad - \left( \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \boxed{\frac{1}{3}n}$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n + a_{n+1} = 3 \times \boxed{\frac{1}{3}n}$$

$$\text{즉, } 2a_n + a_{n+1} = n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이다.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \quad (n \geq 2)$$

에서 양변에  $n=2$ 를 대입하면

$$a_1 + a_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6} \times 2^2 - \frac{1}{6} \times 2 + 10$$

$$\text{즉, } a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{31}{3}$$

$a_1 = 7$ 이므로

$$a_2 = 3 \times \left( \frac{31}{3} - 7 \right) = \boxed{10} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이다.  $\textcircled{7}$ 과  $\textcircled{8}$ 에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^5 a_{2k+1}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12})$$

$$+ (a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11})$$

$$= a_1 + a_2 + 2(a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11})$$

$$+ (a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$$

$$= a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^5 (2a_{2k+1} + a_{2k+2})$$

$$= a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^5 (2k+1)$$

$$= 7 + 10 + (3 + 5 + 7 + 9 + 11)$$

$$= 17 + 7 \times 5 = \boxed{52}$$

이다.

이때  $f(n) = \frac{1}{3}n$ ,  $p=10$ ,  $q=52$ 이므로

$$\frac{p \times q}{f(12)} = \frac{10 \times 52}{4} = 130$$

정답 130

21. 출제의도 : 극한의 성질과 미분계수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다항함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow t^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow t^+} g(x) = g(t)$$

즉,

$$\lim_{x \rightarrow t^-} (-f(x)) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t)$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

이어야 한다.

그런데

$$\lim_{x \rightarrow t^-} (-f(x)) = -f(t), \quad \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t)$$

이므로  $\textcircled{1}$ 에서

$$f(t) = -f(t), \quad \text{즉 } f(t) = 0$$

조건 (가)에서  $a=0$  또는  $a=2$ 일 때에도

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{x(x-2)}$$
의 값이 존재해야 하므로

$$g(0) = g(2) = 0, \quad \text{즉}$$

$$f(0) = f(2) = 0$$

그러므로

$$f(x) = \alpha x(x-2)(x-k) \quad (k \text{는 상수})$$

$\dots\dots \textcircled{2}$

로 놓을 수 있다.

한편, 자연수  $m$ 에 대하여 조건 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)} < 0$$
일 조건은 다음과 같

다.

(i)  $m=1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x(x-2) = 1 \times (1-2) < 0$$
이므로

$g(1) > 0$ 이어야 한다.

이때  $-\frac{7}{2}g(1) < 0$ 이므로 조건 (나)에

서  $-\frac{7}{2}g(1)$ 이 자연수라는 조건에  
모순이다.

그러므로 1은 조건 (나)를 만족시키  
는 자연수  $m$ 이 될 수 없다.

(ii)  $m=2$ 일 때

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)}{x(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} < 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} < 0$$

이어야 한다.

(iii)  $m > 2$ 일 때

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)} = \frac{g(m)}{m(m-2)} \text{이고} \\ & m(m-2) > 0 \text{이므로} \\ & g(m) < 0 \end{aligned}$$

이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서  $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{g(x)}{x(x-2)} < 0$ 인

자연수  $m$ 의 개수가 2이려면

$g(m) < 0$ 이고  $m > 2$

인 자연수  $m$ 이 적어도 한 개 존재해야  
한다.

그러므로 ㉠에서

$$f(x) = \alpha x(x-2)(x-k) \quad (k > 3)$$

이고, 조건 (나)에서

$$g(-1) > 0, \quad g(1) < 0$$

이므로

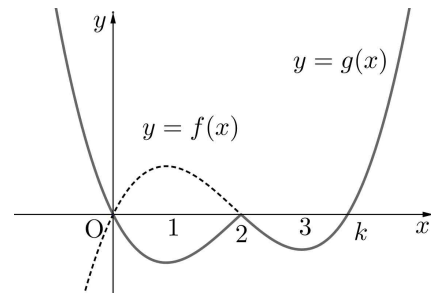
$$t=2$$

이어야 한다.

그러므로

$$g(x) = \begin{cases} -\alpha x(x-2)(x-k) & (x < 2) \\ \alpha x(x-2)(x-k) & (x \geq 2) \end{cases}$$

이다.



이때 2와 3이 조건 (나)를 만족시키므로  
 $3 < k \leq 4$ 이어야 한다.

한편,

$$g(-1) = 3\alpha(k+1), \quad g(1) = -\alpha(k-1)$$

이고, 조건 (나)에서

$$g(-1) = 2, \quad -\frac{7}{2}g(1) = 3$$

또는

$$g(-1) = 3, \quad -\frac{7}{2}g(1) = 2$$

이다.

$$\textcircled{1} \quad g(-1) = 2, \quad -\frac{7}{2}g(1) = 3 \text{일 때}$$

$$3\alpha(k+1) = 2 \text{에서 } \alpha = \frac{2}{3(k+1)}$$

$$-\frac{7}{2} \times \{-\alpha(k-1)\} = 3 \text{에서}$$

$$\alpha = \frac{6}{7(k-1)}$$

$$\frac{2}{3(k+1)} = \frac{6}{7(k-1)} \text{에서}$$

$$7(k-1) = 9(k+1)$$

$$7k-7 = 9k+9$$

$$k = -8$$

이는  $3 < k \leq 4$ 에 모순이다.

$$\textcircled{2} \quad g(-1) = 3, \quad -\frac{7}{2}g(1) = 2 \text{일 때}$$

$$3\alpha(k+1) = 3 \text{에서 } \alpha = \frac{1}{k+1}$$

$$-\frac{7}{2} \times \{-\alpha(k-1)\} = 2 \text{에서}$$

$$\alpha = \frac{4}{7(k-1)}$$

$$\frac{1}{k+1} = \frac{4}{7(k-1)} \text{에서}$$

$$7(k-1) = 4(k+1)$$

$$7k-7 = 4k+4$$

$$k = \frac{11}{3}$$

이는  $3 < k \leq 4$ 를 만족시킨다.

$$k = \frac{11}{3} \text{일 때}$$

$$\alpha = \frac{1}{k+1} = \frac{3}{14}$$

그러므로

$$g(-5) = -\frac{3}{14} \times (-5) \times (-7) \times \left(-\frac{26}{3}\right) = 65$$

정답 65

22. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 위치 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \log_{16}(8x+2) \text{에서}$$

$$16^y = 8x+2 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

$$y = 4^{x-1} - \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$4^x = 4y+2 \quad \dots\dots \textcircled{\omin�}$$

이므로  $\textcircled{\omin�}$ 에서  $y$ 대신에  $\frac{x}{2}$ ,  $x$ 대신에  $\frac{y}{2}$

를 대입하면  $\textcircled{\omin�}$ 과 일치한다.  $\dots\dots (i)$

점  $A(a, b)$ 가 곡선  $y = \log_{16}(8x+2)$ 위의 점이므로

$$16^b = 8a+2$$

또한  $B(c, d)$ 라 하면 점  $B$ 는 곡선

$$y = 4^{x-1} - \frac{1}{2} \text{위의 점이므로}$$

$$4^c = 4d+2$$

그리고 점  $A$ 를 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점  $(b, a)$ 가 직선  $OB$ 위에 있어야 하므로

$$a = \frac{d}{c} \times b, \quad ac-bd=0 \quad \dots\dots \textcircled{\omin�}$$

이때 (i)에 의하여

$$a = \frac{d}{2}, \quad b = \frac{c}{2} \quad \text{즉} \quad d=2a, \quad c=2b$$

$\dots\dots \textcircled{\omin�}$

이고 이 관계는  $\textcircled{\omin�}$ 을 만족시킨다.

따라서 선분  $AB$ 의 중점의 좌표가

$$\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right) \text{이므로}$$

$$\frac{a+c}{2} = \frac{77}{8}, \quad \frac{b+d}{2} = \frac{133}{8}$$

$$a+c = \frac{77}{4}, \quad b+d = \frac{133}{4}$$

$$a+2b = \frac{77}{4}, \quad 2a+b = \frac{133}{4}$$

$$\text{따라서} \quad a = \frac{63}{4}, \quad b = \frac{7}{4} \text{이므로}$$

$$a \times b = \frac{441}{16}$$

$$\text{즉} \quad p=16, \quad q=441 \text{이므로}$$

$$p+q=457$$

정답 457

■ [선택: 기하]

23. ③ 24. ① 25. ⑤ 26. ② 27. ④  
28. ④ 29. 360 30. 221

23. 출제의도 : 두 벡터의 합의 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\vec{a} = (4, 1), \vec{b} = (-1, -1) \text{이므로}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (4, 1) + (-1, -1)$$

$$= (3, 0)$$

따라서  $\vec{a} + \vec{b}$ 의 모든 성분의 합은

$$3 + 0 = 3$$

정답 ③

24. 출제의도 : 도형의 평행이동을 이해하고 포물선의 식을 통해 포물선의 초점과 준선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선  $y^2 = 12(x-2)$ 는 포물선  $y^2 = 12x$ 를  $x$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 포물선  $y^2 = 12(x-2)$ 의 초점과 준선 사이의 거리는 포물선  $y^2 = 12x$ 의 초점과 준선 사이의 거리와 같다.

$$\text{포물선 } y^2 = 12x = 4 \times 3 \times x \text{의}$$

$$\text{초점의 좌표는 } (3, 0)$$

준선의 방정식은  $x = -3$ 이다.

따라서 포물선  $y^2 = 12(x-2)$ 의 초점과 준선 사이의 거리는

$$3 - (-3) = 6$$

정답 ①

25. 출제의도 : 좌표공간에서 평면 또는 점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점  $A\left(3, -\frac{3}{2}, -2\right)$ 를  $yz$ 평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$B\left(-3, -\frac{3}{2}, -2\right)$$

이고, 점  $A\left(3, -\frac{3}{2}, -2\right)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$C\left(-3, \frac{3}{2}, 2\right)$$

따라서 선분 BC의 길이는

$$\overline{BC} = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 쌍곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 양수  $a$ 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1 \quad (a > 0) \text{ 위의 점}$$

$(a, \sqrt{2}a)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{a^2} - \frac{\sqrt{2}ay}{a^2} = -1$$

$$x - \sqrt{2}y + a = 0$$

위의 직선의 방정식에  $x = 0$ 을 대입하면

$$-\sqrt{2}y + a = 0$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

즉, 점 P의 좌표는  $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 이다.

한편, 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ 의 두 초점

F, F'의 좌표를 각각 F(0, c), F'(0, -c)

(c > 0)이라 하면

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2}a$$

이므로  $\overline{PF} \times \overline{PF'} = 8$ 에서

$$\overline{PF} \times \overline{PF'}$$

$$= \left| \sqrt{2}a - \frac{a}{\sqrt{2}} \right| \times \left| -\sqrt{2}a - \frac{a}{\sqrt{2}} \right|$$

$$= 2a^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{3a^2}{2} = 8$$

$$a^2 = \frac{16}{3}$$

따라서

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 원기둥의 높이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

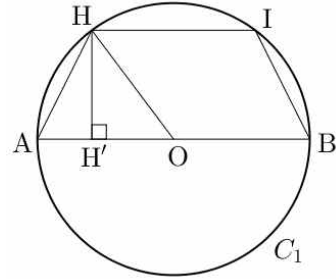
점 D에서 원  $C_1$ 을 포함하는 평면에 내린 수선의 발이 H이므로

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{DH}^2}$$

점 C에서 원  $C_1$ 을 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BI}^2 + \overline{CI}^2}$$

이때  $\overline{AD} = \overline{BC}$ 이고 두 선분 DH, CI는 원기둥의 높이로 서로 같으므로  $\overline{AH} = \overline{BI}$ 이다. 따라서 두 선분 AB, HI는 서로 평행하다.



선분 AB가 원  $C_1$ 의 지름이므로 선분 AB의 중점을 O라 하면 점 O는 원  $C_1$ 의 중심이고, 점 H에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H'이라 하면  $\overline{HI} = \overline{CD} = 3$ 이므로

$$\overline{OH'} = \frac{1}{2}\overline{HI} = \frac{3}{2}$$

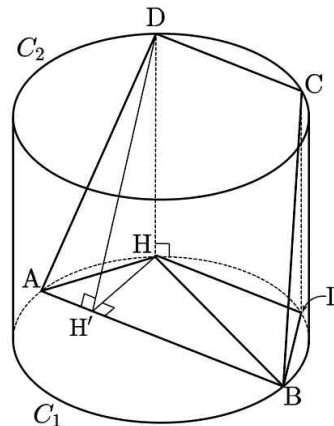
직각삼각형 OHH'에서

$$\overline{HH'} = \sqrt{\overline{OH}^2 - \overline{OH'}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2$$

그러므로 삼각형 ABH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HH'} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$



한편, 선분 DH가 원  $C_1$ 을 포함하는 평면과 수직이고,  $\overline{HH'} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{DH'} \perp \overline{AB}$$

두 선분 AB, HI는 서로 평행하므로 두 선분 AB, DC는 서로 평행하고 사각형 ABCD는  $\overline{AD} = \overline{BC}$ 인 등변사다리꼴이다.

그러므로 사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times (\overline{AB} + \overline{DC}) \times \overline{DH'} &= \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{DH'} \\ &= 4\overline{DH'} \end{aligned}$$

사각형 ABCD의 넓이가 삼각형 ABH의 넓이의 4배이므로

$$4\overline{DH'} = 4 \times 5 \text{에서 } \overline{DH'} = 5$$

직각삼각형 DHH'에서

$$\begin{aligned} \overline{DH} &= \sqrt{\overline{DH'}^2 - \overline{HH'}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \end{aligned}$$

따라서 원기둥의 높이는  $\sqrt{21}$ 이다.

정답 ④

28. 출제의도 : 두 평면의 수직 조건과 평면에 접하는 구의 성질을 이용하여 도형의 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼수선의 정리에 의하여  $\overline{BH} \perp \overline{CD}$ 이고,

$$\overline{BC} = \overline{BD} \text{이므로 } \overline{CH} = \overline{DH}$$

$$\overline{BC} = 2\sqrt{5}, \overline{CH} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{BH} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$$

이때  $\overline{AB} = 4, \overline{AH} = 4$ 이므로

삼각형 ABH는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

$\overline{AH} \perp \overline{CD}, \overline{BH} \perp \overline{CD}$ 이므로 평면 ABH와 직선 CD는 서로 수직이고, 평면 ACD는 직선 CD를 포함하므로 두 평면 ABH와 ACD는 서로 수직이다.

즉, 삼각형 ABH의 무게중심 G에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 I라 하면 점 I는 선분 AH 위에 있고, 구 S와 평면 ABH가 만나서 생기는 원은 정삼각형 ABH의 내접원이므로

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{GI} = \frac{1}{2} \overline{AG} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AI} = \frac{1}{2} \overline{AH} = 2$$

이때  $\angle AIG = \frac{\pi}{2}$ 이므로  $\angle APG = \frac{\pi}{2}$ 인

구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형 T는 점 I를 지나고 직선 AG에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원과 같다. 이 원의 반지름의 길이를 r이라 하면

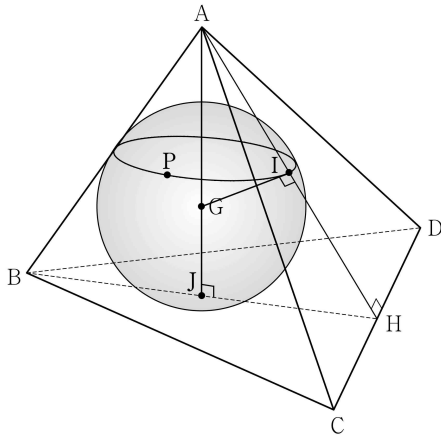
$$\overline{AI} \times \overline{GI} = \overline{AG} \times r$$

$$2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} r$$

$$r = 1$$

이므로 도형 T의 넓이는

$$1^2 \times \pi = \pi$$



정삼각형 ABH의 내접원이 선분 BH와 만나는 점을 J라 하면 세 점 A, G, J는 한 직선 위에 있고, 두 평면 ABH와 BCD가 서로 수직이므로 평면 BCD와 직선 AJ는 서로 수직이다.

즉, 도형 T가 포함된 평면과 평면 BCD가 서로 평행하므로 도형 T가 포함된 평면과 평면 ABC가 이루는 예각의 크기는 두 평면 BCD와 ABC가 이루는 예각의 크기와 같다. 이 각의 크기를  $\theta$ 라 하자.

$\overline{AH}=4$ ,  $\overline{CH}=2$ 이고  $\angle AHC = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$\overline{BC} = \overline{AC} = 2\sqrt{5}$ ,  $\overline{AB} = 4$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이를  $k$ 라 하면

$$k = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \sqrt{\overline{AC}^2 - \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$

$$= 8$$

삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 JBC와 같다. 삼각형 JBC의

넓이를  $k'$ 이라 하면

$$k' = \frac{1}{2} \times \overline{BJ} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

따라서 두 평면 BCD와 ABC가 이루는 예각의 크기  $\theta$ 에 대하여

$$\cos \theta = \frac{k'}{k} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

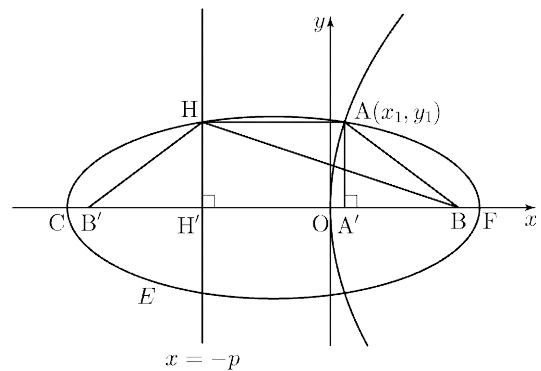
이므로 도형 T의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\pi \cos \theta = \pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 포물선과 타원의 정의 및 타원의 대칭성을 이용하여 포물선의 초점 및 포물선 위의 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



세 점 F, A, H를 지나는 타원을 E라 하고, 타원 E의 점 B가 아닌 초점을 B', 타원 E가 x축과 만나는 점 중 F가 아닌 점을 C라 하자.

점 A의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH} = p + x_1$$

점 A에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $A'$ , 직선  $x = -p$ 가  $x$ 축과 만나는 점을  $H'$ 이라 하면 타원  $E$ 는 선분  $A'H'$ 의 중점을 지나고  $x$ 축에 수직인 직선에 대하여 대칭이므로

$$\overline{A'F} = \overline{CH'} = p - x_1$$

타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BH} + \overline{B'H} &= \overline{CF} \\ &= 2 \times \overline{A'F} + \overline{A'H'} \\ &= 2(p - x_1) + (p + x_1) \\ &= 3p - x_1 \end{aligned}$$

이때  $\overline{AB} = \overline{HB'}$ 이므로 삼각형  $AHB$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BH} + \overline{AH} &= (\overline{B'H} + \overline{BH}) + \overline{AH} \\ &= \overline{CF} + \overline{AH} \\ &= (3p - x_1) + (p + x_1) \\ &= 4p \end{aligned}$$

삼각형  $AHB$ 의 둘레의 길이가  $p + 27$ 이므로

$$4p = p + 27 \text{에서 } p = 9$$

즉, 포물선의 방정식은  $y^2 = 36x$ 이므로

$$y_1^2 = 36x_1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

한편, 삼각형  $AHB$ 의 넓이가

$$2p + 12 = 30 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{AA'} = 30$$

에서

$$\frac{1}{2} \times (9 + x_1) \times y_1 = 30$$

$$\text{즉, } y_1(9 + x_1) = 60 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 의 양변을 제곱하면

$$y_1^2(x_1 + 9)^2 = 3600$$

$\textcircled{B}$ 을 위 등식에 대입하면

$$36x_1(x_1 + 9)^2 = 3600$$

$$x_1^3 + 18x_1^2 + 81x_1 - 100 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_1^2 + 19x_1 + 100) = 0$$

$$x_1^2 + 19x_1 + 100 > 0 \text{이므로 } x_1 = 1$$

$$\textcircled{B} \text{에서 } y_1 = 6$$

직각삼각형  $FHH'$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{FH} &= \overline{FA'} + \overline{A'H'} \\ &= (p - x_1) + (p + x_1) \\ &= 2p = 18 \end{aligned}$$

$$\overline{AA'} = y_1 = 6$$

이므로

$$\overline{FH}^2 = \overline{FH'}^2 + \overline{HH'}^2 = 18^2 + 6^2 = 360$$

$$\text{따라서 } k^2 = 360$$

정답 360

**30. 출제의도 :** 벡터의 내적과 벡터 사이의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 두 벡터의 내적의 절댓값을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

좌표평면에서 선분  $AB$ 를 지름으로 하는 원을  $C$ 라 하자. 선분  $AB$ 의 중점을  $O$ 라 하면 점  $O$ 는 원  $C$ 의 중심이고, 두 점  $P, Q$ 가 원  $C$  위의 점이고  $\overline{AB} = 10\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}| &= |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{2}\overline{AB} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{PB}|=14$ 이므로 두 벡터  $\overrightarrow{OB}$ 와  $\overrightarrow{OP}$ 가 이루는 각의 크기를  $\theta$ 라 하면 삼각형 OBP에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 - |\overrightarrow{PB}|^2}{2|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OP}|} \\ &= \frac{(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 - 14^2}{2 \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}} \\ &= -\frac{24}{25}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta \\ &= 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \times \left(-\frac{24}{25}\right) \\ &= -48\end{aligned}$$

한편

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PO} = -2\overrightarrow{OP}$$

이고

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB}) &= -2\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OP}) \\ &= -2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + 4|\overrightarrow{OP}|^2 \\ &= -2 \times (-48) - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + 4 \times (5\sqrt{2})^2 \\ &= 296 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= 100 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}\end{aligned}$$

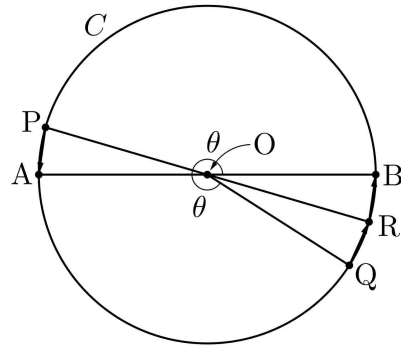
이므로

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PB}) = 2|\overrightarrow{PQ}|^2$$

에서

$$\begin{aligned}296 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 2 \times (100 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}) \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= -48\end{aligned}$$

즉, 두 벡터  $\overrightarrow{OP}$ 와  $\overrightarrow{OQ}$ 가 이루는 각의 크기는 두 벡터  $\overrightarrow{OB}$ 와  $\overrightarrow{OP}$ 가 이루는 각의 크기  $\theta$ 와 같다. 이때  $|\overrightarrow{QB}| > 0$ 이므로 점 Q는 점 B와 일치하지 않고, 따라서 네 점 A, B, P, Q는 그림과 같다.



$|\overrightarrow{PB}|=14$ ,  $|\overrightarrow{AB}|=10\sqrt{2}$ 이고  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이

므로

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - 14^2} = 2$$

직선 OP가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R이라 하자.

두 직선 PA, QR이 이루는 각의 크기를  $\alpha$ 라 하면

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi - \angle APR - \angle QRP = \pi - 2\angle APR \\ &= \angle POA = \pi - \theta\end{aligned}$$

이고

$$|\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RB}| = |\overrightarrow{PA}| = 2$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QR} &= |\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{QR}|\cos(\pi - \alpha) \\ &= 2 \times 2 \times \cos\theta \\ &= 2 \times 2 \times \left(-\frac{24}{25}\right) = -\frac{96}{25}\end{aligned}$$

---

한편

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{RB} = -|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{RB}| = -4$$

이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} &= \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RB}) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{RB} \\ &= -\frac{96}{25} + (-4) = -\frac{196}{25} \end{aligned}$$

이고

$$|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB}| = \left| -\frac{196}{25} \right| = \frac{196}{25}$$

따라서  $p = 25$ ,  $q = 196$ 이므로

$$p + q = 25 + 196 = 221$$

정답 221