2025학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

최근 수정일 : 2024.12.19.(목)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ④	03. ⑤	04. ②	05. ④
06. ⑤	07. ③	08. ①	09. ④	10. ③
11. ②	12. ①	13. ⑤	14. ④	15. ②
16. 7	17. 33	18. 96	19. 41	
20. 36	21. 16	22. 64		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}}\times(5^2)^{\frac{1}{3}}$$
$$=5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}$$
$$=5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$
$$=5^1=5$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x)=3x^2-8$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=f'(2)$$
$$=3\times 2^2-8$$
$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 양수 k의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 양수 k이므로

$a_n=k^n$

$\dfrac{a_4}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_1}=30$에서

$\dfrac{k^4}{k^2}+\dfrac{k^2}{k}=30$

$k^2+k=30$

$k^2+k-30=0$

$(k+6)(k-5)=0$

$k>0$이므로

$k=5$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이해하고 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -2-}f(x)=\lim_{x\to -2+}f(x)=f(-2)$에서

$\lim_{x\to -2-}f(x)=\lim_{x\to -2-}(5x+a)=-10+a$

$\lim_{x\to -2+}f(x)=\lim_{x\to -2+}(x^2-a)=4-a$

$f(-2)=4-a$

이므로

$-10+a=4-a,\ a=7$

따라서 상수 a의 값은 7이다.

정답 ②

5. **출제의도** : 함수의 곱의 미분법을 사용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$에서

$f'(x)=2x\times(3x^2-x)+(x^2+1)\times(6x-1)$

따라서

$f'(1)=2\times2+2\times5=14$

정답 ④

6. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$에서

$\sin\theta=\frac{1}{5}$

따라서

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\int_0^x f(t)\,dt=3x^3+2x$의 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)=9x^2+2$

따라서

$f(1)=9\times1^2+2=11$

정답 ③

8. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 이용하여 값을 간단히 나타낼 수 있는가?

풀이 :

$a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\log 10+\log_2 2+\log_2 10$

$=-1+1+\log_2 10=\log_2 10$

$a\times b=\log_2 10\times\log 2=1$

정답 ①

9. **출제의도** : 정적분의 정의와 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 좌변은 정적분의 성질을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

그러므로 ㉠에서

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx$$

즉, $\int_{0}^{a} f(x)dx = 0$

이때

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (3x^2 - 16x - 20)dx$$

$$= \left[x^3 - 8x^2 - 20x \right]_0^a$$

$$= a^3 - 8a^2 - 20a$$

이므로

$a^3 - 8a^2 - 20a = 0$에서

$a(a^2 - 8a - 20) = 0$

$a(a+2)(a-10) = 0$

따라서 양수 a의 값은 10이다.

정답 ④

10. **출제의도** : 코사인함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x) = a\cos bx + 3$의 그래프는

함수 $y = a\cos bx$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.

a가 자연수이므로

$f(0) \geq f(x)$

이다.

한편, 함수 $y = a\cos bx + 3$의 주기는

$\frac{2\pi}{b}$

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 가지므로

$a + 3 = 13 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{2\pi}{b} \leq \frac{\pi}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$

이어야 한다.

㉠에서

$a = 10$

㉡에서

$b \geq 6$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $b=6$일 때

$10 + 6 = 16$

정답 ③

11. **출제의도** : 속도와 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=x'=3t^2-3t-6$

$a=v'=6t-3$

이때 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은

$v=3t^2-3t-6=3(t-2)(t+1)=0$

에서

$t=2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 구하는 가속도는

$6\times2-3=9$

정답 ②

12. **출제의도** : 시그마의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$ ……㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$

$a_1=2$이므로 $b_2=4$

등차수열 $\{b_n\}$에서 $b_1=2$, $b_2=4$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이다.

즉, $b_n=2n$

한편, ㉠의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}(n-1)^2$ ……㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{a_n}{b_{n+1}}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}(n-1)^2=n-\frac{1}{2}$

$b_{n+1}=2(n+1)$이므로

$a_n=2(n+1)\left(n-\frac{1}{2}\right)$

$=2n^2+n-1\,(n\geq2)$

이 때, $a_1=2$이므로

$a_n=2n^2+n-1$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k-1)$

$=2\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}-1\times5$

$=120$

정답 ①

13. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때,

$f'(x)=(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)$

이고, $f'(0)=-7$이므로

$2k+k+2=-7$

즉, $k=-3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

이고, $f(3)=12$이므로 점 P의 좌표는

$P(3, 12)$

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=4x$이므로

$$B-A=\int_0^3 \{4x-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^3 \{4x-(x^3-7x+6)\}dx$$
$$=\int_0^3 (-x^3+11x-6)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3$$
$$=-\frac{1}{4}\times 81+\frac{11}{2}\times 9-6\times 3$$
$$=\frac{45}{4}$$

정답 ⑤

[참고]

점 Q의 x좌표를 a라 하면

$B-A$

$$=\int_a^3 \{4x-f(x)\}dx-\int_0^a \{f(x)-4x\}dx$$
$$=\int_a^3 \{4x-f(x)\}dx+\int_0^a \{4x-f(x)\}dx$$
$$=\int_0^3 \{4x-f(x)\}dx$$

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

원 O의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{AD}=\overline{AE}=r$

이고 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$ 이므로

$\overline{BD}=\frac{2}{3}r$

또한 $\overline{CE}=x$라 하면 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이가 각각

$$\frac{1}{2}\times r\times r\times sinA=\frac{1}{2}r^2\sin A$$
$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}r\times(r+x)\times sinA=\frac{5}{6}r(r+x)\sin A$$

이고 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이므로

$$\frac{1}{2}r^2\sin A:\frac{5}{6}r(r+x)\sin A=9:35$$
$$3r+3x=7r,\ x=\frac{4}{3}r$$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$$

이고

$$\overline{AB}=\frac{5}{3}r,\ \sin A:\sin C=8:5$$

이므로

$$\overline{BC}=\overline{AB}\times\frac{\sin A}{\sin C}$$
$$=\frac{5}{3}r\times\frac{8}{5}$$

$=\dfrac{8}{3}r$

$\angle ACB=\theta$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\dfrac{\left(\dfrac{8}{3}r\right)^2+\left(\dfrac{7}{3}r\right)^2-\left(\dfrac{5}{3}r\right)^2}{2\times\dfrac{8}{3}r\times\dfrac{7}{3}r}$$

$=\dfrac{11}{14}$

이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2}$

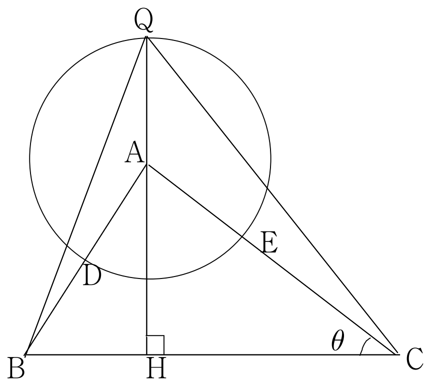
$=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2\times7$, 즉 $\dfrac{\dfrac{5}{3}r}{\sin\theta}=14$ 에서

$\dfrac{5}{3}r=14\sin\theta=14\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=5\sqrt{3}$

$r=3\sqrt{3}$



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{AC}\sin\theta$

$=\dfrac{7}{3}r\sin\theta$

$=\dfrac{7}{3}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$=\dfrac{15}{2}$

따라서 직선 AH와 원 O가 만나는 점 중 삼각형 ABC의 외부의 점을 Q라 하면, 삼각형 PBC의 넓이가 최대일 때는 점 P가 점 Q의 위치에 있을 때이다.

이때

$\overline{QH}=r+\overline{AH}$

$=3\sqrt{3}+\dfrac{15}{2}$

이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{3}\times3\sqrt{3}\times\left(3\sqrt{3}+\dfrac{15}{2}\right)$

$=36+30\sqrt{3}$

정답 ④

15. **출제의도** : 함수의 미분가능과 함수의 극대, 극소 및 그래프를 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$g(0)=7$

$x<0$일 때,

$g'(x)=3x^2+2ax+15$

이므로

$\lim_{x\to0-}g'(x)=15$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 7$

$\lim_{x \to 0+} f'(x) = 15$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $p(p<0)$라 하면

$f(x) = px^2 + 15x + 7$

$f'(x) = 2px + 15$

$f'(x) = 0$에서

$2px + 15 = 0$

$x = -\frac{15}{2p}$

이때, $p<0$이므로

$-\frac{15}{2p} > 0$

한편, $h(x) = x^3 + ax^2 + 15x + 7$이라 하면

$h'(x) = 3x^2 + 2ax + 15$

이차방정식 $h'(x) = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 45$

(i) 이차방정식 $h'(x) = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때

$\frac{D}{4} = a^2 - 45 > 0$에서

$a < -3\sqrt{5}$ 또는 $a > 3\sqrt{5}$

이때, 방정식 $h'(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 즉, 삼차함수 $h(x)$는 극댓값과 극솟값을 갖는다.

조건 (나)에서

x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

함수 $g(x)$, 즉 함수 $h(x)$는 $x<0$에서 극댓값과 극솟값을 갖고,

방정식 $h'(x) = 0$의 서로 다른 두 실근을

α, $\beta(\alpha < \beta < 0)$

라 하면

$\beta = \alpha + 4$, $-\frac{15}{2p} = \beta + 4$ …… ㉠

이어야 한다.

이차방정식 $3x^2 + 2ax + 15 = 0$의 서로 다른 두 실근이 α, $\alpha + 4$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + (\alpha + 4) = -\frac{2a}{3}$ …… ㉡

$\alpha(\alpha + 4) = 5$ …… ㉢

㉢에서

$\alpha^2 + 4\alpha - 5 = 0$

$(\alpha + 5)(\alpha - 1) = 0$

$\alpha < 0$이므로

$\alpha = -5$

$\alpha = -5$를 ㉡에 대입하면

$-5 + (-5 + 4) = -\frac{2a}{3}$

$a = 9$

$\alpha = -5$를 ㉠에 대입하면

$\beta = -5 + 4 = -1$

$-\frac{15}{2p} = -1 + 4$

$p = -\frac{5}{2}$

(ii) 이차방정식 $h'(x) = 0$이 중근을 가질 때

$\frac{D}{4} = a^2 - 45 = 0$이고,

$a \neq 3\sqrt{5}$이므로

$a = -3\sqrt{5}$

$h'(x) = 0$에서

$3x^2-6\sqrt{5}x+15=0$

$3(x-\sqrt{5})^2=0$

$x=\sqrt{5}$

이때 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅲ) 이차방정식 $h'(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때

이때 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$a=9,\ p=-\frac{5}{2}$

이므로

$$g(x)=\begin{cases} x^3+9x^2+15x+7 & (x\le 0) \\ -\frac{5}{2}x^2+15x+7 & (x>0) \end{cases}$$

따라서

$$\begin{aligned} g(-2)&=(-2)^3+9\times(-2)^2+15\times(-2)+7 \\ &=5 \end{aligned}$$

$g(2)=-\frac{5}{2}\times 2^2+15\times 2+7=27$

이므로

$g(-2)+g(2)=5+27=32$

정답 ②

16. **출제의도** : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

풀이 :

로그의 진수의 조건에 의해

$x-3>0,\ 3x-5>0$

즉, $x>3$ …… ㉠

$\log_2(x-3)=\log_4(3x-5)$ …… ㉡

이때

$\log_2(x-3)=\log_{2^2}(x-3)^2=\log_4(x-3)^2$

이므로 ㉡에서

$\log_4(x-3)^2=\log_4(3x-5)$

즉, $(x-3)^2=3x-5$에서

$x^2-6x+9=3x-5$

$x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$

따라서 ㉠에 의해 $x=7$

정답 7

17. **출제의도** : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=\int f'(x)dx=\int (9x^2+4x)dx$

$=3x^3+2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=6$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+1$이므로

$f(2)=24+8+1=33$

정답 33

18. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$a_n + a_{n+4} = 12$이므로

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = \sum_{n=1}^{4} (a_n + a_{n+4})$$

$$= \sum_{n=1}^{4} 12 = 12 \times 4 = 48$$

$$\sum_{n=9}^{16} a_n = \sum_{n=9}^{12} (a_n + a_{n+4})$$

$$= \sum_{n=9}^{12} 12 = 12 \times 4 = 48$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{4} (a_n + a_{n+4}) + \sum_{n=9}^{12} (a_n + a_{n+4})$$

$$= 48 + 48 = 96$$

정답 96

19. **출제의도** : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x$에서

$$f'(x) = 6x^2 - 6ax - 12a^2$$

$$= 6(x+a)(x-2a)$$

$f'(x) = 0$에서

$x = -a$ 또는 $x = 2a$

$a > 0$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x = -a$에서 극댓값을 갖고, $x = 2a$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$이고

$f(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3$

이므로

$7a^3 = \frac{7}{27}$에서

$$a^3 = \frac{1}{27}$$

$a > 0$이므로

$$a = \frac{1}{3}$$

따라서

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x$$

이므로

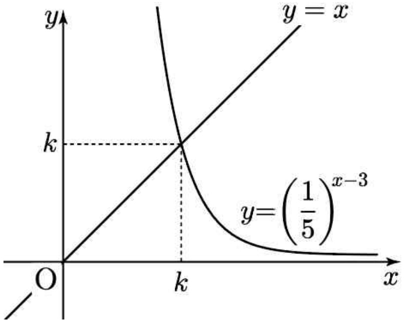
$f(3) = 54 - 9 - 4 = 41$

정답 41

20. **출제의도** : 지수의 성질과 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$는 다음 그림과 같다.



$x > k$인 모든 실수 x에 대하여

$f(f(x)) = 3x$ …… ㉠

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표가 k이므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$

즉, $\left(\frac{1}{5}\right)^{k} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = k$에서

$k \times 5^k = 5^3$

그러므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) = f\left(\left(\frac{1}{k \times 5^k}\right)^3\right) = f\left(\left(\frac{1}{5^3}\right)^3\right) = f\left(\frac{1}{5^9}\right) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

한편,

$x > k$에서 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이므로

k보다 작은 임의의 두 양수

y_1, y_2 $(y_1 < y_2)$에 대하여

$f(x_1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_1-3} = y_1$

$f(x_2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2-3} = y_2$

인 x_1, x_2 $(k < x_2 < x_1)$이 존재한다.

㉠에서

$f(f(x_1)) = 3x_1$, $f(f(x_2)) = 3x_2$

이므로

$f(f(x_1)) > f(f(x_2))$

즉, $f(y_1) > f(y_2)$이므로

함수 $f(x)$는 $x < k$에서 감소하고,

$x > k$에서 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이므로

함수 $f(x)$는 $x > k$에서 감소한다.

그러므로 ㉡에서

$f(\alpha) = \frac{1}{5^9}$

인 실수 α $(\alpha > k)$가 존재한다.

이때

$f(\alpha) = \left(\frac{1}{5}\right)^{\alpha-3} = \frac{1}{5^9}$

에서

$\alpha - 3 = 9$, 즉 $\alpha = 12$

따라서 ㉠에 의해 구하는 값은

$$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) = f\left(\frac{1}{5^9}\right) = f(f(\alpha)) = 3\alpha = 3 \times 12 = 36$$

정답 36

21. **출제의도** : 함수의 극한에 대한 조건이 주어졌을 때 미정계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\beta) = 0$인 실수 β가 존재한다.

모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$의

값이 존재하므로 $f(\beta)=0$인 β에 대하여

$\lim_{x\to\beta} f(x)=0$이고, $\lim_{x\to\beta} f(2x+1)=0$

함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(2\beta+1)=0$

즉 $2\beta+1$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

마찬가지 방법으로 $2\beta+1$이 방정식 $f(x)=0$의 근이면 $2(2\beta+1)+1=4\beta+3$도 방정식 $f(x)=0$ 근이고

$2(4\beta+3)+1=8\beta+7$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

만약 $\beta\neq 2\beta+1$, 즉 $\beta\neq -1$이면

β, $2\beta+1$, $4\beta+3$, $8\beta+7$가 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 네 근이다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$는 $x=-1$만 실근으로 갖는다.

$f(-1)=0$에서

$f(-1)=-1+a-b+4=0$

$b=a+3$

$$f(x)=x^3+ax^2+(a+3)x+4$$
$$=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\}$$

$f(x)\neq (x+1)^3$이므로

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$의 실근은 존재하지 않는다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(a-1)^2-16<0$

$a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$

$-3<a<5$

$f(1)=a+b+5=a+(a+3)+5=2a+8$에서 $f(1)$의 최댓값은 $a=4$일 때,

$2\times 4+8=16$

정답 16

22. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 첫째항의 절댓값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서 $|a_m|=|a_{m+2}|$를 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 3이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $|a_3|$이 홀수인 경우

$a_4=a_3-3$이고 짝수이다.

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}(a_3-3)$

$|a_3|=|a_5|$에서

$|a_3|=\left|\frac{1}{2}(a_3-3)\right|$

$a_3=1$ 또는 $a_3=-3$

$a_3=1$이면 $a_4=-2$이고 1은 홀수이므로 a_2는 짝수이고 $a_2=2$이므로 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_3=-3$이면 $a_4=-6$이고 $a_2=-6$이므로 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $|a_3|$이 0 또는 짝수인 경우

a_3	a_4	a_5
a_3	$\frac{1}{2}a_3$	$\frac{1}{2}a_3-3$
		$\frac{1}{4}a_3$

$|a_3|=\left|\frac{1}{4}a_3\right|$에서 $a_3=0$

$a_3=0$이면 3 이상의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m=0$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

<table>
<tr><td>a_3</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>0</td><td></td></tr>
</table>

$a_2=0$이면 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1의 값은 6이다.

한편, $|a_3|=\left|\frac{1}{2}a_3-3\right|$에서

$a_3=2$ 또는 $a_3=-6$

$a_3=2$이면 $a_4=1$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

<table>
<tr><td>a_3</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
</table>

이때 조건을 만족시키는 a_1의 값은 10, 7, 8이다.

$a_3=-6$이면 $a_4=-3$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

<table>
<tr><td>a_3</td><td>a_2</td><td>a_1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">-6</td><td>-3</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">-12</td><td>-9</td></tr>
<tr><td>-24</td></tr>
</table>

$a_2=-3$이면 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1의 값은 -9, -24이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합은

$6+(10+7+8)+(9+24)=64$

정답 64

■ [선택: 기하]

23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ① 27. ①
28. ④ 29. 107 30. 316

23. **출제의도** : 성분으로 나타내어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

풀이 :

$\vec{a}=(k,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에서

$\vec{a}+3\vec{b}=(k,\ 3)+(3,\ 6)$

$=(k+3,\ 9)$

이고, $\vec{a}+3\vec{b}=(6,\ 9)$이므로

$(k+3,\ 9)=(6,\ 9)$

따라서

$k+3=6$

이므로

$k=3$

정답 ③

24. **출제의도** : 포물선의 정의를 이용하여 포물선 위의 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :

포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1,0)$이고 준선이 직선 $x=-1$이므로 초점의 좌표는 $(3,0)$이다.

이때 포물선 위의 점 $(3,a)$에서 포물선의 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같으므로

$\sqrt{0^2+a^2}=|3-(-1)|$

$a^2=16$

$a>0$이므로 $a=4$

정답 ④

[다른 풀이]

포물선의 꼭짓점 $(1,0)$에서 준선 $x=-1$까지의 거리가 2이므로 포물선의 방정식은

$y^2=4\times2(x-1)$

즉, $y^2=8(x-1)$

이다.

이 포물선이 점 $(3,a)$를 지나므로

$a^2=8(3-1)=16$

$a>0$이므로 $a=4$

25. **출제의도** : 좌표공간에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 P라 하면 점 P가 z축 위에 있으므로 x좌표와 y좌표가 모두 0이다.

이때, 점 P의 x좌표는

$\dfrac{3\times(-4)+2\times a}{3+2}=0$

이므로 $a=6$

또, 점 P의 y좌표는

$\dfrac{3\times(-2)+2\times b}{3+2}=0$

이므로 $b=3$

또, 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점을 Q라 하면 점 Q가 xy평면 위에 있으므로 z좌표가 0이다.
이때, 점 Q의 z좌표는

$$\frac{3\times c-2\times 6}{3-2}=0$$

이므로 $c=4$
따라서

$$a+b+c=6+3+4=13$$

정답 ③

26. 출제의도 : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 x좌표는 $\frac{1}{n}$이므로
점 P의 y좌표를 y_1이라 하면
타원 C_1 : $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{1}{n}x}{2}+y_1y=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서
$y=0$일 때,
$x=2n$
이므로 점 P에서의 접선의 x절편 α는
$\alpha=2n$
점 Q의 x좌표는 $\frac{1}{n}$이므로
점 Q의 y좌표를 y_2라 하면
타원 C_2 : $2x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2}{n}x+\frac{y_2y}{2}=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서
$y=0$일 때,

$$x=\frac{n}{2}$$

이므로 점 Q에서의 접선의 x절편 β는

$$\beta=\frac{n}{2}$$

$6\le\alpha-\beta\le 15$에서

$$6\le 2n-\frac{n}{2}\le 15$$

$$6\le\frac{3n}{2}\le 15$$

$$4\le n\le 10$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 $4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 10$이고, 그 개수는 7이다.

정답 ①

27. 출제의도 : 공간도형의 위치관계에 관한 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

직선 BC가 평면 AMD와 수직이므로
$\overline{BC}\perp\overline{AM}$
이때 점 M이 선분 BC의 중점이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$인 이등변삼각형이고
$\overline{BM}=2\sqrt{5}$

이므로 $\overline{AM} = \sqrt{36-20} = 4$

즉, 삼각형 AMD는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

또, $\overline{DM} \perp \overline{BC}$이므로

$\overline{CD} = \sqrt{16+20} = 6$

이고, 점 M이 선분 BC의 중점이므로 삼각형 DBC도 이등변삼각형이다.

그러므로 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 선분 DM 위에 있고, 삼각형 AMD가 정삼각형이므로 수선의 발은 선분 DM의 중점이다. 이 점을 N이라 하자.

이때 삼각형 NCD의 넓이를 S_1이라 하면

S_1은 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$$S_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 4 = 2\sqrt{5}$$

한편, 삼각형 ACD에서 선분 AD의 중점을 L이라 하면

$\overline{CL} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DL}^2} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$

이므로 삼각형 ACD 넓이를 S_2라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

그러므로 두 평면 ACD, BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 삼각형 ACD의 평면 BCD 위로의 정사영이 삼각형 NCD이므로

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

이때 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$(4\sqrt{2} - r) : r = 3 : 1$

이므로

$r = \sqrt{2}$

따라서 삼각형 ACD에 내접하는 원의 넓이가 2π이므로 이 원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는

$$2\pi \times cos\theta = 2\pi \times \frac{\sqrt{10}}{8}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{4}\pi$$

정답 ①

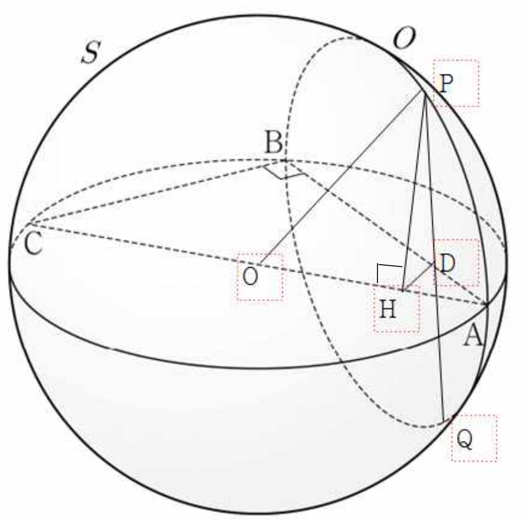
28. 출제의도 : 공간에서 구와 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 6$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$

이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + 6^2}$$
$$= 10$$



선분 AC의 중점을 O라 하면

구 S의 중심은 점 O이고, 반지름의 길이는 5이다.

원 O를 포함하는 평면과 평면 ABC가 수직이므로

선분 PQ와 선분 AB가 만나는 점을 D라 하면

$\overline{\mathrm{PD}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{QD}}$

점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{PO}} = 5$, $\overline{\mathrm{PH}} = 4$

이므로

직각삼각형 POH에서

$$\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PO}}^2 - \overline{\mathrm{PH}}^2}$$

$$= \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$$= 3$$

$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{OH}} = 5 - 3 = 2$

한편,

$\overline{\mathrm{PH}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{PD}} \perp$(평면ABC)

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{DH}}$

삼각형 ABC와 삼각형 AHD는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{HD}}$ 에서

$8 : 6 = 2 : \overline{\mathrm{HD}}$

$\overline{\mathrm{HD}} = \dfrac{3}{2}$

직각삼각형 PHD에서

$$\overline{\mathrm{PD}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2 - \overline{\mathrm{HD}}^2}$$

$$= \sqrt{4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{55}}{2}$$

따라서

$$\overline{\mathrm{PQ}} = 2 \times \overline{\mathrm{PD}}$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{55}}{2}$$

$$= \sqrt{55}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 쌍곡선의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

쌍곡선 $x^2 - \dfrac{y^2}{35} = 1$의 두 초점이

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c > 0)$

이므로

$c^2 = 1 + 35 = 36$에서

$c > 0$이므로

$c = 6$

$\overline{\mathrm{PF}} = \alpha$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}} = \alpha$

또, 점 P가 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 2$에서

$\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{PF}} + 2 = \alpha + 2$

$$\overline{\mathrm{QF'}} = \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{PF'}}$$

$$= \alpha + (\alpha + 2)$$

$$= 2(\alpha + 1)$$

삼각형 QF′F와 삼각형 FF′P가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{QF}'} : \overline{\mathrm{FF}'} = \overline{\mathrm{FF}'} : \overline{\mathrm{PF}'}$에서

$2(\alpha+1) : 12 = 12 : (\alpha+2)$

$2(\alpha+1)(\alpha+2) = 144$

$\alpha^2 + 3\alpha - 70 = 0$

$(\alpha+10)(\alpha-7) = 0$

$\alpha > 0$이므로

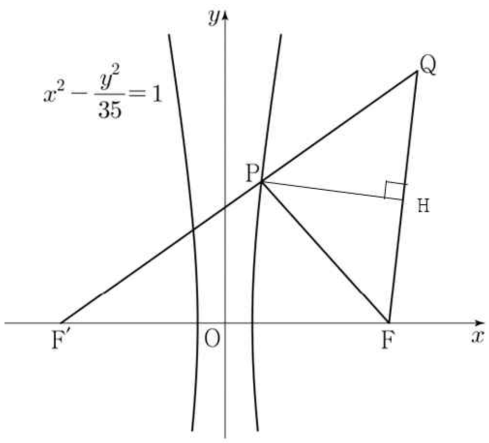
$\alpha = 7$

또, $\overline{\mathrm{QF}'} : \overline{\mathrm{QF}} = \overline{\mathrm{FF}'} : \overline{\mathrm{FP}}$에서

$16 : \overline{\mathrm{QF}} = 12 : 7$

$12 \times \overline{\mathrm{QF}} = 16 \times 7$

$\overline{\mathrm{QF}} = \dfrac{28}{3}$



삼각형 PFQ에서

점 P에서 변 QF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}}$

이므로 점 H는 선분 QF의 중점이다.

즉, $\overline{\mathrm{FH}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{QF}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{28}{3} = \dfrac{14}{3}$

직각삼각형 PFH에서

$\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{FH}}^2}$

$= \sqrt{7^2 - \left(\dfrac{14}{3}\right)^2}$

$= \dfrac{7\sqrt{5}}{3}$

삼각형 PFQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{QF}} \times \overline{\mathrm{PH}}$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{28}{3} \times \dfrac{7\sqrt{5}}{3}$

$= \dfrac{98}{9}\sqrt{5}$

따라서

$p = 9,\ q = 98$

이므로

$p + q = 9 + 98 = 107$

정답 107

30. 출제의도 : 벡터의 연산을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

선분 BC의 중점이 원점 O에 오고 점 B의 좌표가 $(-2, 0)$이 되도록 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓자.

$|\overrightarrow{\mathrm{XB}} + \overrightarrow{\mathrm{XC}}| = |2\overrightarrow{\mathrm{XO}}|$

이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{XB}} - \overrightarrow{\mathrm{XC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{CB}}| = 4$

이므로 주어진 조건에 의하여

$|2\overrightarrow{\mathrm{XO}}| = 4$, 즉 $|\overrightarrow{\mathrm{XO}}| = 2$

이므로 점 X가 나타내는 도형 S는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.

한편, $4\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PD}}$에서

$4(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OP})$

$4\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OP}$

즉, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$

이때 $\overrightarrow{OB}=(-2, 0)$, $\overrightarrow{OD}=(2, 4)$이므로

$\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{1}{2}, 0\right)+(1, 2)+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$

$=\left(\frac{1}{2}, 2\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$

그러므로 점 Q가 나타내는 도형은 도형 S를 원점 O를 중심으로 $\frac{1}{4}$배로 축소한 후 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$, y축이 방향으로 2만큼 평행이동한 원이다. 이 원의 중심을 R이라 하자. 즉, 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 $R\left(\frac{1}{2}, 2\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원이다.

이때,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RQ})$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{RQ}$

이고,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AR}=(4, -4)\cdot\left(\frac{5}{2}, -2\right)=18$

로 일정하다.

한편, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{RQ}$가 같은 방향일 때 최대이고 반대 방향일 때 최소이므로

$M=18+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{RQ}|=18+4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$

$=18+2\sqrt{2}$

$m=18-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{RQ}|=18-4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$

$=18-2\sqrt{2}$

따라서

$M\times m=(18+2\sqrt{2})(18-2\sqrt{2})$

$=324-8=316$

정답 316