2024학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 2023.11.20

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ①	02. ④	03. ②	04. ①	05. ④
06. ④	07. ⑤	08. ②	09. ④	10. ②
11. ①	12. ③	13. ①	14. ①	15. ③
16. 2	17. 8	18. 9	19. 32	
20. 25	21. 10	22. 483		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=2^{3\times\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^1\times 3^1$

$=6$

정답 ①

2. 출제의도 : 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-5x^2+3$에서

$f'(x)=6x^2-10x$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=24-20$

$=4$

정답 ④

3. 출제의도 : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{3}$에서

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수의 연속의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

이때,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(3x-a)$

$=6-a$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+a)$

$=4+a$

$f(2)=4+a$

그러므로

$6-a=4+a=4+a$

따라서

$2a=2$, $a=1$

정답 ①

5. **출제의도** : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-6x$이므로

$f(x)=\int(3x^2-6x)dx$

$=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1-3+C=6$ 에서 $C=8$

따라서

$f(2)=8-12+8=4$

정답 ④

6. **출제의도** : 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_4-S_2=a_3+a_4$ 이므로

$a_3+a_4=3a_4$, $a_3=2a_4$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=\frac{3}{4}$ 에서 $r\neq0$ 이고

$a_3=2a_4$ 에서 $r=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2}$

$a_5=a_1\times r^4$ 에서

$a_1=a_5\times\frac{1}{r^4}=\frac{3}{4}\times2^4=12$

$a_5=a_2\times r^3$ 에서

$a_2=a_5\times\frac{1}{r^3}=\frac{3}{4}\times2^3=6$

따라서 $a_1+a_2=12+6=18$

정답 ④

7. **출제의도** : 다항함수의 극댓값과 극솟값을 갖는 x의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$에서

$f'(x)=x^2-4x-12$

$=(x+2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고,

$x=6$에서 극소이다.

따라서

$\alpha=-2$, $\beta=6$

이므로

$\beta-\alpha=6-(-2)=8$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)$가 삼차함수이고

㉠이 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=3x(x^2+x+1)$

따라서

$\int_{-2}^{2}f(x)dx$

$$= \int_{-2}^{2} 3x(x^2+x+1)dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (3x^3+3x^2+3x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{2} 3x^2 dx$$

$$= 2 \times \left[x^3 \right]_0^2$$

$$= 2 \times 2^3$$

$$= 16$$

정답 ②

9. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3}{m + (1-m)} = 1$$

$$m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3 = 1$$

$$m(\log_5 12 - \log_5 3) = 1 - \log_5 3$$

$$m \times \log_5 \frac{12}{3} = \log_5 \frac{5}{3}$$

$$m \times \log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3}$$

이때,

$$m = \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4}$$

$$= \log_4 \frac{5}{3}$$

따라서,

$$4^m = 4^{\log_4 \frac{5}{3}}$$

$$= \frac{5}{3}$$

정답 ④

10. **출제의도** : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t) = 0 + \int_0^t (t^2 - 6t + 5)dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t,$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t (2t - 7)dt$$

$$= t^2 - 7t$$

이므로

$$f(t) = \left| x_1(t) - x_2(t) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \right|$$

이다. 함수 $g(t)$를

$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t$라 하면

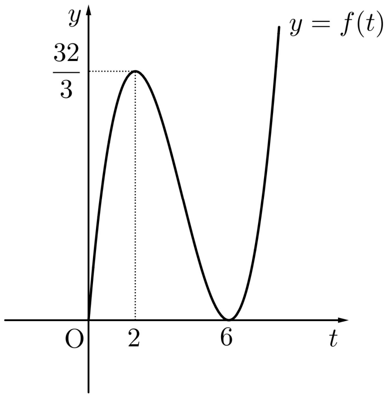
$g'(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$

$g'(t) = 0$에서 $t = 2$ 또는 $t = 6$

$t \geq 0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$t \geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t) \geq 0$이므로 $f(t) = g(t)$이고 함수 $y = f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(t)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고, 구간 $[2,\ 6]$에서 감소하고, 구간 $[6,\ \infty)$에서 증가한다. 즉, $a=2$, $b=6$이다.
시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_2^6 |v_2(t)|dt = \int_2^6 |2t-7|dt$$
$$= \int_2^{\frac{7}{2}} (7-2t)dt + \int_{\frac{7}{2}}^6 (2t-7)dt$$
$$= \left[7t-t^2\right]_2^{\frac{7}{2}} + \left[t^2-7t\right]_{\frac{7}{2}}^6$$
$$= \frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}$$

정답 ②

11. **출제의도** : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$|a_6|=a_8$에서
$a_6=a_8$ 또는 $-a_6=a_8$ …… ㉠
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로
$a_6 \neq a_8$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$-a_6=a_8$ 즉,
$a_6+a_8=0$ …… ㉢

한편, $|a_6|=a_8$에서
$a_8 \geq 0$이고, $a_6+a_8=0$이므로
$a_6<0<a_8$이다.
즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 양수이다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d>0)$이라 하면 ㉢에서
$(a_1+5d)+(a_1+7d)=0$
$a_1=-6d$ …… ㉣

한편, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{5}{96}$에서

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+5d}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\times\frac{5d}{a_1(a_1+5d)}$$
$$=\frac{5}{a_1(a_1+5d)}$$

이므로

$$\frac{5}{a_1(a_1+5d)}=\frac{5}{96}$$

$a_1(a_1+5d)=96$ …… ㉤
㉣을 ㉤에 대입하면
$-6d\times(-d)=96$
$d^2=16$
$d>0$이므로

$d=4$

$d=4$를 ㉣에 대입하면

$a_1=-6\times 4=-24$

따라서

$\sum_{k=1}^{15} a_k$

$=\frac{15\{2\times(-24)+14\times 4\}}{2}$

$=60$

정답 ①

12. 출제의도 :

곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$는 $x\ge t$일 때, 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $(t+f(t), 0)$에서 만난다.

그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\times\{f(t)\}^2$$

이때, 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} S'(t)&=f(t)+f(t)\times f'(t)\\ &=f(t)\{1+f'(t)\}\end{aligned}$$

한편, $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이므로

$0<t<6$에서 $f(t)>0$

또,

$1+f'(t)$

$=1+\frac{1}{9}\{(t-6)(t-9)+t(t-9)+t(t-6)\}$

$=1+\frac{1}{9}\{(t^2-15t+54)+(t^2-9t)$

$+(t^2-6t)\}$

$=1+\frac{1}{9}(3t^2-30t+54)$

$=1+\frac{1}{3}(t^2-10t+18)$

$=\frac{1}{3}(t^2-10t+21)$

$=\frac{1}{3}(t-3)(t-7)$

그러므로 $0<t<6$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(6)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	(극대)	↘	

그러므로 $S(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이다.

따라서, 최댓값은

$S(3)$

$=\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$

$=\frac{1}{9}\int_0^3 x(x-6)(x-9)dx$

$+\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{9}\times 3\times(-3)\times(-6)\right\}^2$

$=\frac{1}{9}\int_0^3(x^3-15x^2+54x)dx+18$

$=\frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+18$

$=\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{4}\times 81-5\times 27+27\times 9\right)+18$

$=\left(\frac{9}{4}-15+27\right)+18$

$=\left(\frac{9}{4}+12\right)+18$

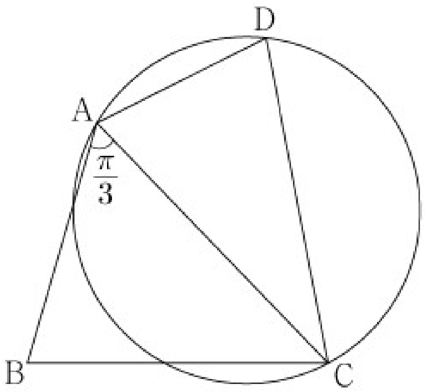
$=\frac{9}{4}+30$

$=\frac{129}{4}$

정답 ③

13. **출제의도** : 사인법칙, 코사인법칙 및 삼각형의 넓이를 활용하여 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=a(a>0)$

이라 하면

코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$$

$$(\sqrt{13})^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$a>0$이므로

$a=4$

즉, $\overline{AC}=4$

삼각형 ABC의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\sqrt{3}$$

$\overline{AD}\times\overline{CD}=9$

이므로

삼각형 ACD의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$$

$$=\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)$$

이때, $S_2=\frac{5}{6}S_1$이므로

$$\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)=\frac{5}{6}\times3\sqrt{3}$$

$$\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 ACD에서

사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2R$$

이므로

$$\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R$$

$$R=\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

따라서

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

$$=\frac{54}{25}$$

정답 ①

14. **출제의도** : 새롭게 정의된 함수가 조건을 만족시키도록 하는 두 자연수의 순서쌍을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \le 2$일 때,

$f(x) = 2x^3 - 6x + 1$에서

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$이므로

$f'(x) = 0$에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

$x \le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

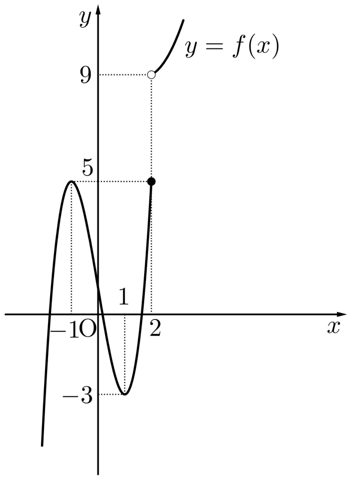
또한, a, b가 자연수이므로 곡선

$y = a(x-2)(x-b) + 9$

는 점 $(2, 9)$와 점 $(b, 9)$를 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.

(ⅰ) $b = 1$ 또는 $b = 2$인 경우

함수 $f(x)$는 $x > 2$에서 증가하고, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $-3 < k < 5$인 모든 실수 k에 대하여

$g(k) = \lim_{t \to k-} g(k) = \lim_{t \to k+} g(k) = 3$ …… ㉠

이므로

$g(k) + \lim_{t \to k-} g(k) + \lim_{t \to k+} g(k) = 9$ …… ㉡

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

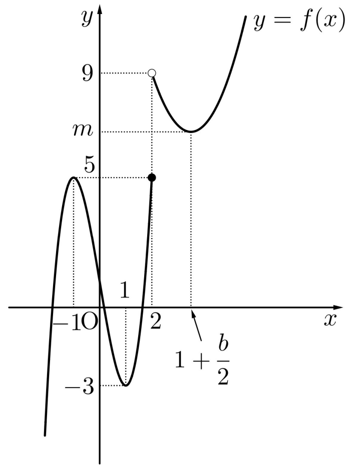
(ⅱ) $b \ge 3$인 경우

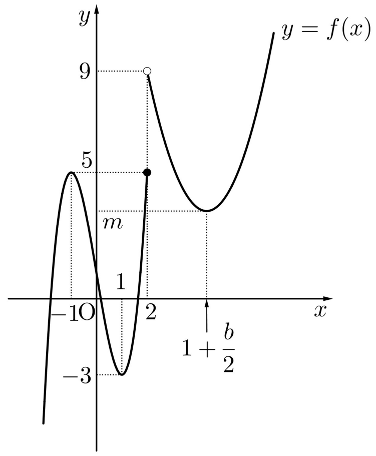
곡선 $y = a(x-2)(x-b) + 9$는 직선

$x = \dfrac{2+b}{2} = 1 + \dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$는 $x = 1 + \dfrac{b}{2}$에서 극솟값을 갖는다. 이 극솟값을 m이라 하자.

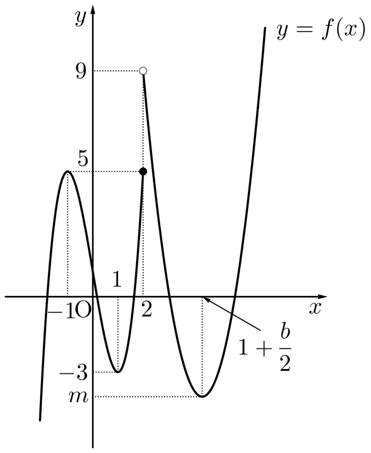
(ⅱ-①) $m > -3$인 경우





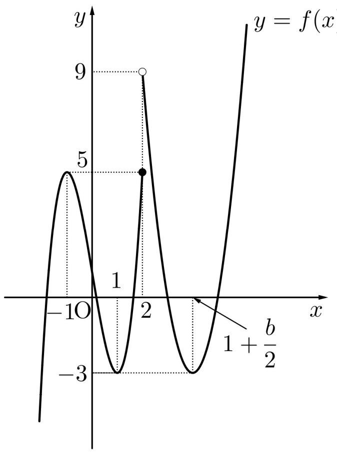
m과 5 중에 크지 않은 값을 m_1이라 하면 $-3 < k < m_1$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-②) $m < -3$인 경우



$m<k<-3$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-③) $m=-3$인 경우



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim_{t \to k-} g(k)$, $\lim_{t \to k+} g(k)$의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim_{t \to k-} g(k)$	$\lim_{t \to k+} g(k)$
$k<-3$	1	1	1
$k=-3$	3	1	5
$-3<k<5$	5	5	5
$k=5$	4	5	2
$5<k<9$	2	2	2
$k=9$	1	2	1
$k>9$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수 k의 값은 -3뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b \geq 3$, $m=-3$이다.

$f\left(1+\frac{b}{2}\right)=-3$에서

$a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9=-3$

$a(b-2)^2=48$

$48=2^4 \times 3$이므로 구하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(48,\ 3)$, $(12,\ 4)$, $(3,\ 6)$

이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$이다.

정답 ①

15. **출제의도** : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a_n이 홀수일 때

$a_{n+1}=2^{a_n}$은 자연수이고

a_n이 짝수일 때

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$은 자연수이다.

이때 a_1이 자연수이므로

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

$a_6+a_7=3$에서

$a_6=1$, $a_7=2$ 또는 $a_6=2$, $a_7=1$

이다.

(ⅰ) $a_6=1$일 때,

$a_6=1$이고 a_5가 홀수인 경우

$a_6=2^{a_5}$에서

$1=2^{a_5}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_5의 값은

없다.

$a_6=1$이고 a_5가 짝수인 경우

$a_6=\frac{1}{2}a_5$에서

$1=\frac{1}{2}a_5$

$a_5=2$

a_4를 구해보자.

$a_5=2$이고 a_4가 홀수인 경우

$a_5=2^{a_4}$에서

$2=2^{a_4}$

$a_4=1$

$a_5=2$이고 a_4가 짝수인 경우

$a_5=\frac{1}{2}a_4$에서

$2=\frac{1}{2}a_4$

$a_4=4$

a_3을 구해보자.

$a_4=1$일 때

$a_3=2$

$a_4=4$이고 a_3이 홀수인 경우

$a_4=2^{a_3}$에서

$4=2^{a_3}$

$a_3=2$

이때, a_3이 짝수이므로 모순이다.

$a_4=4$이고 a_3이 짝수인 경우

$a_4=\frac{1}{2}a_3$에서

$4=\frac{1}{2}a_3$

$a_3=8$

a_2를 구해보자.

$a_3=2$일 때

$a_2=1$ 또는 $a_2=4$

$a_3=8$이고 a_2가 홀수인 경우

$a_3=2^{a_2}$에서

$8=2^{a_2}$

$a_2=3$

$a_3=8$이고 a_2가 짝수인 경우

$a_3=\frac{1}{2}a_2$에서

$8=\frac{1}{2}a_2$

$a_2=16$

a_1을 구해보자.

$a_2=1$일 때

$a_1=2$

$a_2=4$일 때

$a_1=8$

$a_2=3$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$3=2^{a_1}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 없다.

$a_2=3$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$3=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=6$

$a_2=16$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$16=2^{a_1}$

$a_1=4$

이때 a_1이 짝수이므로 모순이다.

$a_2=16$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$16=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=32$

따라서 a_1의 값은

2 또는 6 또는 8 또는 32이다.

(ⅱ) $a_6=2$일 때,

(i)의 과정을 이용하면

$a_2=2$ 또는 $a_2=6$ 또는 $a_2=8$ 또는 $a_2=32$

a_1을 구해보자.

$a_2=2$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$2=2^{a_1}$

$a_1=1$

$a_2=2$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$2=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=4$

$a_2=6$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$6=2^{a_1}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 없다.

$a_2=6$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$6=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=12$

$a_2=8$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$8=2^{a_1}$

$a_1=3$

$a_2=8$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$8=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=16$

$a_2=32$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$32=2^{a_1}$

$a_1=5$

$a_2=32$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$32=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=64$

따라서 a_1의 값은

1 또는 3 또는 4 또는 5 또는 12 또는 16 또는 64이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

모든 a_1의 값의 합은

$(2+6+8+32)+(1+3+4+5+12+16+64)$

$=153$

정답 ③

16. 출제의도 : 지수에 미지수가 포함된 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$

$3^{x-8}=\left(3^{-3}\right)^x$

$3^{x-8}=3^{-3x}$

그러므로

$x-8=-3x$

$4x=8$
$x=2$

정답 2

17. 출제의도 : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x+1)(x^2+3)$이므로

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)\times 2x$

따라서,

$$f'(1)=(1+3)+2\times 2$$
$$=8$$

정답 8

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$에서

$$3\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -3\sum_{k=1}^{10} a_k + 33 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -3\left(2\sum_{k=1}^{10} b_k - 10\right)+33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = -6\sum_{k=1}^{10} b_k + 63$$

$$7\sum_{k=1}^{10} b_k = 63$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = 9$$

정답 9

19. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 부등식을 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(2+x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x,$$

$$f(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$$

이므로 주어진 부등식은

$$\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$$

즉,

$$-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$0<x<16$에서 $0<\frac{\pi}{4}x<4\pi$이므로 ㉠에서

$$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}x<\frac{2}{3}\pi$$

또는 $\frac{4}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{5}{3}\pi$

또는 $\frac{7}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{8}{3}\pi$

또는 $\frac{10}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{11}{3}\pi$

이다. 즉,

$\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$ 또는 $\frac{16}{3}<x<\frac{20}{3}$ 또는 $\frac{28}{3}<x<\frac{32}{3}$ 또는 $\frac{40}{3}<x<\frac{44}{3}$

이므로 구하는 자연수 x의 값은

2, 6, 10, 14이다.

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+6+10+14=32$

정답 32

20. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+2$

$f'(0)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 O(0, 0)에서의 접선의 방정식은

$y=2x$

이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표를 구해보자.

$f(x)=2x$에서

$-x^3+ax^2+2x=2x$

$x^2(x-a)=0$

$x=0$ 또는 $x=a$

점 A의 x좌표는 0이 아니므로 점 A의 x좌표는 a이다. 즉, 점 A의 좌표는

$(a,\ 2a)$

이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$

이다. 즉, 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이다.

이때,

$$\begin{aligned} f'(a)&=-3a^2+2a^2+2 \\ &=-a^2+2 \end{aligned}$$

이므로

직선 AB의 기울기는 $-a^2+2$이다.

$2\times(-a^2+2)=-1$에서

$a^2=\dfrac{5}{2}$

$a>\sqrt{2}$이므로

$a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

점 A의 좌표는

$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ \sqrt{10}\right)$

이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $y=0$을 대입하면

$0=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10}$

$x=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

점 B의 좌표는

$\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2},\ 0\right)$

이다.

따라서

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(\sqrt{10})^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$,

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(0-\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\times5\sqrt{2}=25$

정답 25

21. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 함수 $g(t)$가 최솟값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=0$일 때, 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 5를 가지므로

$g(0)=5$

한편, 함수 $y=-x^2+6x$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고 $f(5)=5$이므로 $1 \le t \le 5$일 때,

$g(t) \ge 5$

한편,

$f(5)=5$이고 $f(6)=0$

또, 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$가 최솟값을 5로 갖기 위해서는 $t=6$일 때, 구간 $[5, 7]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 5이상이어야 하므로

$f(7) \ge 5$

즉,

$a\log_4(7-5) \ge 5$

$a \times \log_{2^2}2 \ge 5$

$a \times \dfrac{1}{2} \ge 5$

$a \ge 10$

따라서, 양수 a의 최솟값은 10이다.

정답 10

22. 출제의도 : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문제의 조건으로부터

함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1) \ge 0$을 만족시켜야 한다. …… ㉠

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 반드시 실근을 갖는다.

(ⅰ) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라 할 때, a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

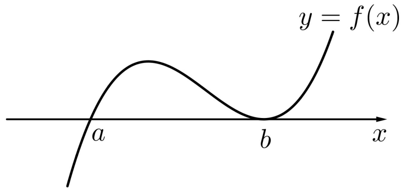
$f(m)<0<f(m+2)$

이므로 $f(m)f(m+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a, $b(a<b)$라 할 때, $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$이다.

(ⅱ-①) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$일 때



a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1) \ge 0$, $f(m+2) \ge 0$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1) \ge 0$,

$f(m)f(m+2) \ge 0$이어야 하므로

$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.

그러므로 $a=m+1$, $b=m+2$이다.

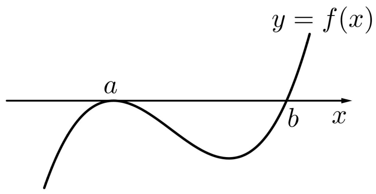
$f'\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$이므로 $m+1<\dfrac{1}{4}<m+2$이고

정수 m의 값은 -1이다. …… ㉢

즉, $f(x)=x(x-1)^2$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ-②) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$일 때



만약 $a<n<b$인 정수 n이 존재한다면 그 중 가장 큰 값을 n_1이라 하자. 그러면

$f(n_1)<0<f(n_1+2)$

이므로 $f(n_1)f(n_1+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉, $a<n<b$인 정수 n은 존재하지 않는다. …… ㉣

그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$,

$f(m+2)\geq 0$

이고, ㉢과 마찬가지로 $a=m+1$, $b=m+2$, 정수 m의 값은 -1이다.

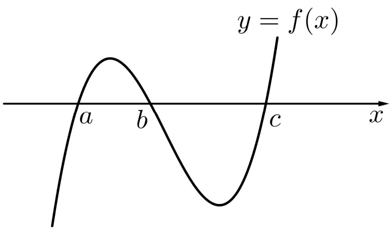
즉, $f(x)=x^2(x-1)$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$을 만족시키지 않는다

(ⅲ) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$

라 하자.



이때 ㉣과 마찬가지로 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않는다. 그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$,

$f(m+2)\geq 0$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1)\geq 0$,

$f(m)f(m+2)\geq 0$이어야 하므로

$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.

즉, $a=m+1$, $b=m+2$

또는 $a=m+1$, $c=m+2$

또는 $b=m+1$, $c=m+2$이다.

또, $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로

$f'(0)<0$이다.

(ⅲ-①) $a=m+1$, $b=m+2$일 때

$a<n<b$ 또는 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않고, $f'(0)<0$이므로 $b=m+2=0$이다. 이때 $a=m+1=-1$이므로

$f(x)=x(x+1)(x-c)=(x^2+x)(x-c)$

이다.

$f'(x)=(2x+1)(x-c)+(x^2+x)$

이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}-c\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}c-\frac{5}{16}$$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$에서

$-\frac{1}{2}c-\frac{5}{16}=-\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{8}$

그러나 이는 $b<c$에 모순이다.

(ⅲ-②) $a=m+1$, $c=m+2$일 때

$m+1$, $m+2$는 연속하는 두 정수이므로 $f'(n)<0$을 만족시키는 정수 n은 존재하지 않는다. 그러나 이는 $f'(0)<0$에 모순이다.

(ⅲ-③) $b=m+1$, $c=m+2$일 때

$a<n<b$ 또는 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않고, $f'(0)<0$이므로 $b=m+1=0$이다. 이때 $c=m+1=1$이므로

$f(x)=(x-a)x(x-1)=(x-a)(x^2-x)$

이다.

$f'(x)=(x^2-x)+(x-a)(2x-1)$

이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}+\left(-\frac{1}{4}-a\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a$$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ 에서

$\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{5}{8}$

그리고 $a=-\frac{5}{8}$ 이면

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{8}$$

이므로 $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$ 도 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$는

$f(x)=\left(x+\frac{5}{8}\right)(x^2-x)$이다.

따라서 $f(8)=\frac{69}{8}\times 56=483$

정답 483

■ [선택: 미적분]
23. ③ 24. ② 25. ④ 26. ③ 27. ①
28. ② 29. 162 30. 125

23. **출제의도** : 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x\times\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{5x\times\frac{\ln(1+5x)}{5x}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

정답 ③

24. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x=\ln(t^3+1)$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2}{t^3+1}$$

$y=\sin\pi t$에서

$$\frac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t$$

따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\pi\cos\pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}=\frac{\pi(t^3+1)\cos\pi t}{3t^2}$$

따라서 $t=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{\pi(1^3+1)\cos\pi}{3\times1^2}=\frac{\pi\times2\times(-1)}{3}=-\frac{2}{3}\pi$$

정답 ②

25. **출제의도** : 역함수의 미분법과 치환적분법을 이용하여 함수를 구하고 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
즉, 모든 양수 x에 대하여
$f(x)>0$ ⋯ ㉠
이다.
모든 양수 x에 대하여 $g(f(x))=x$이므로 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(f(x))f'(x)=1$
따라서

$$\int_1^a\frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$$

$$=\int_1^a\frac{f'(x)}{f(x)}dx=[\ln|f(x)|]_1^a$$

$=\ln f(a)-\ln f(1)$ (∵ ㉠)
$=\ln f(a)-\ln 8$
$=\ln f(a)-3\ln2$
이므로
$\ln f(a)-3\ln2=2\ln a+\ln(a+1)-\ln2$에서
$\ln f(a)=2\ln a+\ln(a+1)+2\ln2$
$=\ln a^2+\ln(a+1)+\ln2^2$
$=\ln4a^2(a+1)$

즉, $f(a)=4a^2(a+1)$이므로

$f(2)=4\times2^2\times(2+1)=48$

정답 ④

[다른 풀이]

함수 $g(x)$의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 그 역함수 $f(x)$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

즉, 모든 양수 x에 대하여

$f(x)>0$ ⋯ ㉠

이다.

$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$에서 $f(x)=y$라 하면

$x=1$일 때 $y=f(1)=8$,

$x=a$일 때 $y=f(a)$이고

$\frac{dy}{dx}=f'(x)$

이때 역함수의 미분법에 의하여

$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$

이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{g'(y)}$

이때 도함수 $g'(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g'(y)\neq0$

따라서

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$$
$$=\int_8^{f(a)}\left\{\frac{1}{g'(y)\times y}\times g'(y)\right\}dy$$
$$=\int_8^{f(a)}\frac{1}{y}dy$$
$$=[\ln|y|]_8^{f(a)}$$
$$=\ln|f(a)|-\ln|8|$$
$$=\ln|f(a)|-3\ln2$$

㉠에서 $f(a)>0$이므로 주어진 등식에서

$$\ln f(a)-3\ln2=2\ln a+\ln(a+1)-\ln2$$
$$\ln f(a)=2\ln a+\ln(a+1)+2\ln2$$
$$=\ln a^2+\ln(a+1)+\ln2^2$$
$$=\ln4a^2(a+1)$$

따라서

$f(a)=4a^2(a+1)$

이므로

$f(2)=4\times2^2\times(2+1)=48$

26. **출제의도** : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $x=t$ $(\frac{3}{4}\pi\leq t\leq\frac{5}{4}\pi)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{5}{4}\pi(1-2t)\cos t$

따라서 입체도형의 부피를 V라 하면

$u(t)=1-2t$, $v'(t)=\cos t$

$u'(t)=-2$, $v(t)=\sin t$

라 하면

$$V=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2t)\cos t\,dt$$
$$=[(1-2t)\sin t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\,dt$$
$$=[(1-2t)\sin t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}+2[-\cos t]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$
$$=\left(1-\frac{5}{2}\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$$

정답 ③

정답 ①

27. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=e^{-x}+e^{t}$이므로

$y'=-e^{-x}$

접점의 좌표를 $(s, e^{-s}+e^{t})$이라고 하면 접선의 방정식은

$y=-e^{-s}(x-s)+e^{-s}+e^{t}$

이 접선이 원점을 지나므로

$se^{-s}+e^{-s}+e^{t}=0$

$e^{t}=-(s+1)e^{-s}$ ⋯ ㉠

양변을 s에 대하여 미분하면

$e^{t}\dfrac{dt}{ds}=-e^{-s}+(s+1)e^{-s}=se^{-s}$ ⋯ ㉡

또한 $f(t)=-e^{-s}$이므로 양변을 s에 대하여 미분하면

$f'(t)\dfrac{dt}{ds}=e^{-s}$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서

$\dfrac{e^{t}}{f'(t)}=s$, 즉 $f'(t)=\dfrac{e^{t}}{s}$

또한 $f(a)=-e^{-s}=-e\sqrt{e}=-e^{\frac{3}{2}}$ 에서

$s=-\dfrac{3}{2}$

이고 ㉠에서 $e^{a}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$f'(t)=\dfrac{e^{t}}{s}$에서

$$f'(a)=\dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{3}e^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{3}e\sqrt{e}$$

28. 출제의도 : 정적분을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$ 이므로

$f'(x)=-4e^{4x^2}-4xe^{4x^2}\times 8x$

$\quad=-4e^{4x^2}-32x^2e^{4x^2}<0$

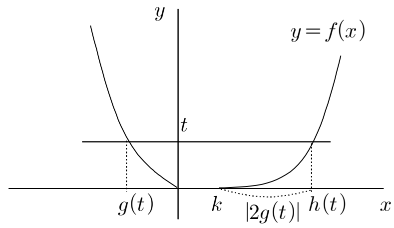
즉, $x<0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 $x\ge 0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

또한, 모든 양수 t에 대하여

$2g(t)+h(t)=k$

가 성립하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 $\displaystyle\int_{0}^{7}f(x)dx=e^{4}-1$에서 $h(t_1)=7$이라 하면

$$\int_{g(t_1)}^{0}(-4xe^{4x^2})dx=\frac{1}{2}(e^{4}-1)$$

$$\left[-\frac{1}{2}e^{4x^2}\right]_{g(t_1)}^{0}=\frac{1}{2}(e^{4}-1)$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4\{g(t_1)\}^2}=\frac{1}{2}(e^{4}-1)$$

$g(t_1)=-1$

즉 $k+|2\times(-1)|=7$ 에서 $k=5$ 이므로

$f(8)=f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(9)=f(-2)$

$$\frac{f(9)}{f(8)}=\frac{f(-2)}{f\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{-4\times(-2)e^{4(-2)^2}}{-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)e^{4\left(-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{4}{3}e^{16-9}$$

$$=\frac{4}{3}e^{7}$$

정답 ②

29. **출제의도** : 조건을 만족시키는 등비급수를 구하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n=ar^{n-1}$, $b_n=bs^{n-1}$ $(a\neq0,\ b\neq0,\ r\neq0,\ s\neq0)$이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하므로 $-1<r<1$, $-1<s<1$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{ab}{1-rs}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r},\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b}{1-s}$$

이므로

$$\frac{ab}{1-rs}=\frac{a}{1-r}\times\frac{b}{1-s}$$

$1-rs=(1-r)(1-s)$

$r+s=2rs$ ⋯ ㉠

(i) $r>0$인 경우

$a_1>0$ 이면 $a_2>0$, $a_3>0$ 이므로

$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=3\times\frac{a_2}{1-r^2}$$

$$7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=7\times\frac{a_3}{1-r^3}$$

$$\frac{3a_2}{1-r^2}=\frac{7a_3}{1-r^3}$$

$$\frac{3}{1-r^2}=\frac{7r}{1-r^3}$$

$4r^3-7r+3=0$

$(r-1)(2r-1)(2r+3)=0$

따라서 $r=\frac{1}{2}$인데 ㉠을 만족시키는 s의 값이 존재하지 않으므로 모순이다.

같은 방법으로 $a_1<0$인 경우도 존재하지 않는다.

(ii) $r<0$인 경우

$a_1>0$ 이면 $a_2<0$, $a_3>0$ 이고 수열 $\{|a_{2n}|\}$의 공비는 r^2, 수열 $\{|a_{3n}|\}$의 공비는 $-r^3$ 이므로

$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=3\times\frac{-a_2}{1-r^2}$$

$$7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|=7\times\frac{a_3}{1+r^3}$$

$$\frac{-3a_2}{1-r^2}=\frac{7a_3}{1+r^3},\quad \frac{-3}{1-r^2}=\frac{7r}{1+r^3}$$

$4r^3-7r-3=0$

$(r+1)(2r-3)(2r+1)=0$

따라서 $r=-\frac{1}{2}$이므로 ㉠에 대입하면

$s=\frac{1}{4}$이다.

$a_1<0$인 경우도 같은 방법으로 생각하면 같은 결론을 얻을 수 있다.

$b_n=b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1} + b\left(\frac{1}{64}\right)^{n}}{b\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{60}$$

$$= \frac{27}{20}$$

따라서 $S = \frac{27}{20}$이므로

$$120S = 120 \times \frac{27}{20} = 162$$

정답 162

30. 출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 극값을 갖는 x의 값을 구할 수 있는가?

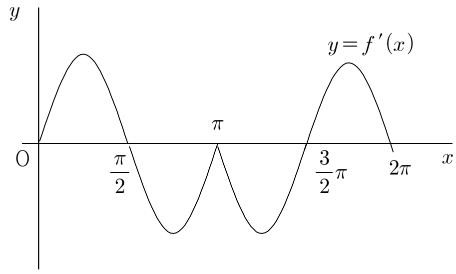
정답풀이 :

$$f'(x) = |sinx|cosx$$

$$= \begin{cases} \sin x \cos x & (\sin x \geq 0) \\ -\sin x \cos x & (\sin x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x < 0) \end{cases}$$

이때 함수 $y = \sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$이므로 함수 $y = f'(x)$의 그래프의 개형을 $0 \leq x \leq 2\pi$에서만 그려보면 다음과 같다.



또한

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}dt$$

에서

$$h'(x) = f(x) - g(x)$$

이므로 $h'(x) = 0$ 즉 $f(x) = g(x)$를 만족시키면서 그 값의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌는 경우이다.

이때 $y = \sin 2x$의 대칭성을 이용하여 양수 a의 값을 작은 수부터 차례대로 구하면

$$\frac{\pi}{4}, \ \frac{3}{4}\pi, \ \pi, \ \frac{5}{4}\pi, \ \frac{7}{4}\pi, \ 2\pi$$

이므로

$$a_6 = 2\pi, \ a_2 = \frac{3}{4}\pi$$

따라서

$$\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2) = \frac{100}{\pi} \times \left(2\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = 125$$

정답 125