2024학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 2023.11.20

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ①	02. ④	03. ②	04. ①	05. ④
06. ④	07. ⑤	08. ②	09. ④	10. ②
11. ①	12. ③	13. ①	14. ①	15. ③
16. 2	17. 8	18. 9	19. 32	
20. 25	21. 10	22. 483		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=2^{3\times\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^1\times 3^1$

$=6$

정답 ①

2. **출제의도** : 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-5x^2+3$ 에서

$f'(x)=6x^2-10x$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=24-20$

$=4$

정답 ④

3. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{3}$에서

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

정답 ②

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)=f(2)$

이때,

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(3x-a)$

$=6-a$

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}(x^2+a)$

$=4+a$

$f(2)=4+a$

그러므로

$6-a=4+a=4+a$

따라서

$2a=2$, $a=1$

정답 ①

5. **출제의도** : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-6x$이므로

$f(x)=\int(3x^2-6x)dx$

$=x^3-3x^2+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=1-3+C=6$ 에서 $C=8$

따라서

$f(2)=8-12+8=4$

정답 ④

6. **출제의도** : 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_4-S_2=a_3+a_4$ 이므로

$a_3+a_4=3a_4$, $a_3=2a_4$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_5=\frac{3}{4}$ 에서 $r\neq 0$ 이고

$a_3=2a_4$ 에서 $r=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2}$

$a_5=a_1\times r^4$ 에서

$a_1=a_5\times\frac{1}{r^4}=\frac{3}{4}\times 2^4=12$

$a_5=a_2\times r^3$ 에서

$a_2=a_5\times\frac{1}{r^3}=\frac{3}{4}\times 2^3=6$

따라서 $a_1+a_2=12+6=18$

정답 ④

7. **출제의도** : 다항함수의 극댓값과 극솟값을 갖는 x의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$에서

$f'(x)=x^2-4x-12$

$=(x+2)(x-6)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고,

$x=6$에서 극소이다.

따라서

$\alpha=-2$, $\beta=6$

이므로

$\beta-\alpha=6-(-2)=8$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$ …… ㉠

$f(x)$가 삼차함수이고

㉠이 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=3x(x^2+x+1)$

따라서

$\int_{-2}^{2}f(x)dx$

$$= \int_{-2}^{2} 3x(x^2+x+1)dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (3x^3+3x^2+3x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{2} 3x^2 dx$$

$$= 2 \times \left[x^3 \right]_0^2$$

$$= 2 \times 2^3$$

$$= 16$$

정답 ②

9. 출제의도 : 로그의 정의와 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1이므로

$$\frac{m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3}{m+(1-m)} = 1$$

$$m \times \log_5 12 + (1-m) \times \log_5 3 = 1$$

$$m(\log_5 12 - \log_5 3) = 1 - \log_5 3$$

$$m \times \log_5 \frac{12}{3} = \log_5 \frac{5}{3}$$

$$m \times \log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3}$$

이때,

$$m = \frac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4}$$

$$= \log_4 \frac{5}{3}$$

따라서,

$$4^m = 4^{\log_4 \frac{5}{3}}$$

$$= \frac{5}{3}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

시각 t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t) = 0 + \int_0^t (t^2-6t+5)dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t,$$

$$x_2(t) = 0 + \int_0^t (2t-7)dt$$

$$= t^2 - 7t$$

이므로

$$f(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$$

$$= \left| \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t \right|$$

이다. 함수 $g(t)$를

$g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t$라 하면

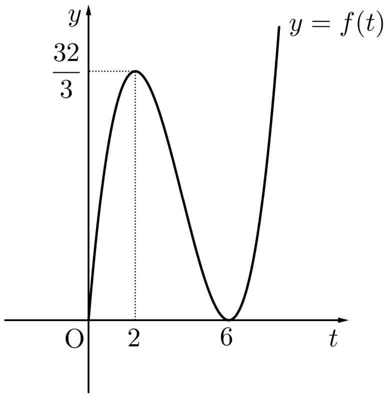
$g'(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$

$g'(t) = 0$에서 $t=2$ 또는 $t=6$

$t \geq 0$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	↗	$\frac{32}{3}$	↘	0	↗

$t \geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t) \geq 0$이므로 $f(t) = g(t)$이고 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(t)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고, 구간 $[2,\ 6]$에서 감소하고, 구간 $[6,\ \infty)$에서 증가한다. 즉, $a=2$, $b=6$이다.

시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_2^6 |v_2(t)|dt=\int_2^6 |2t-7|dt$$

$$=\int_2^{\frac{7}{2}}(7-2t)dt+\int_{\frac{7}{2}}^6(2t-7)dt$$

$$=\Big[7t-t^2\Big]_2^{\frac{7}{2}}+\Big[t^2-7t\Big]_{\frac{7}{2}}^6$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}$$

정답 ②

11. **출제의도** : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|a_6|=a_8$에서

$a_6=a_8$ 또는 $-a_6=a_8$ …… ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로

$a_6\neq a_8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-a_6=a_8$ 즉,

$a_6+a_8=0$ …… ㉢

한편, $|a_6|=a_8$에서

$a_8\geq 0$이고, $a_6+a_8=0$이므로

$a_6<0<a_8$이다.

즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 양수이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d>0)$이라 하면 ㉢에서

$(a_1+5d)+(a_1+7d)=0$

$a_1=-6d$ …… ㉣

한편, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{5}{96}$에서

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+5d}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\times\frac{5d}{a_1(a_1+5d)}$$

$$=\frac{5}{a_1(a_1+5d)}$$

이므로

$$\frac{5}{a_1(a_1+5d)}=\frac{5}{96}$$

$a_1(a_1+5d)=96$ …… ㉤

㉣을 ㉤에 대입하면

$-6d\times(-d)=96$

$d^2=16$

$d>0$이므로

$d=4$

$d=4$를 ㉣에 대입하면

$a_1=-6\times4=-24$

따라서

$\sum_{k=1}^{15}a_k$

$=\dfrac{15\{2\times(-24)+14\times4\}}{2}$

$=60$

정답 ①

12. 출제의도 :

곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$는 $x\geq t$일 때, 점 $(t, f(t))$를 지나고 기울기가 -1인 직선이므로 이 직선은 x축과 점 $(t+f(t), 0)$에서 만난다.

그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\times\{f(t)\}^2$$

이때, 양변을 미분하면

$$\begin{aligned}S'(t)&=f(t)+f(t)\times f'(t)\\&=f(t)\{1+f'(t)\}\end{aligned}$$

한편, $f(x)=\dfrac{1}{9}x(x-6)(x-9)$이므로

$0<t<6$에서 $f(t)>0$

또,

$1+f'(t)$

$=1+\dfrac{1}{9}\{(t-6)(t-9)+t(t-9)+t(t-6)\}$

$=1+\dfrac{1}{9}\{(t^2-15t+54)+(t^2-9t)$

$\quad+(t^2-6t)\}$

$=1+\dfrac{1}{9}(3t^2-30t+54)$

$=1+\dfrac{1}{3}(t^2-10t+18)$

$=\dfrac{1}{3}(t^2-10t+21)$

$=\dfrac{1}{3}(t-3)(t-7)$

그러므로 $0<t<6$에서 $S(t)$의 증가와 감소는 다음 표와 같다.

t	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$	(6)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	(극대)	$\searrow$	

그러므로 $S(t)$는 $t=3$에서 극대이면서 최대이다.

따라서, 최댓값은

$S(3)$

$=\displaystyle\int_0^3 f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$

$=\displaystyle\frac{1}{9}\int_0^3 x(x-6)(x-9)dx$

$\quad+\dfrac{1}{2}\times\left\{\dfrac{1}{9}\times3\times(-3)\times(-6)\right\}^2$

$=\displaystyle\frac{1}{9}\int_0^3(x^3-15x^2+54x)dx+18$

$=\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3+18$

$=\dfrac{1}{9}\times\left(\dfrac{1}{4}\times81-5\times27+27\times9\right)+18$

$=\left(\dfrac{9}{4}-15+27\right)+18$

$=\left(\dfrac{9}{4}+12\right)+18$

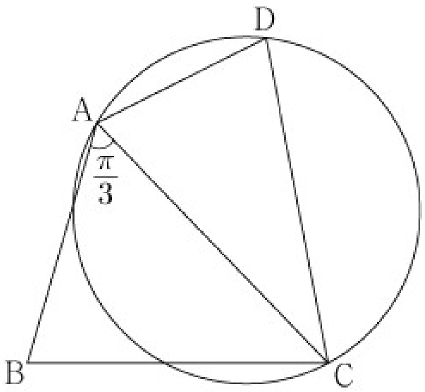
$=\dfrac{9}{4}+30$

$=\dfrac{129}{4}$

정답 ③

13. 출제의도 : 사인법칙, 코사인법칙 및 삼각형의 넓이를 활용하여 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=a(a>0)$

이라 하면

코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$$

$$(\sqrt{13})^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$a>0$이므로

$a=4$

즉, $\overline{AC}=4$

삼각형 ABC의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=3\sqrt{3}$$

$\overline{AD}\times\overline{CD}=9$

이므로

삼각형 ACD의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$$

$$=\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)$$

이때, $S_2=\frac{5}{6}S_1$이므로

$$\frac{9}{2}\sin(\angle ADC)=\frac{5}{6}\times3\sqrt{3}$$

$$\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 ACD에서

사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}=2R$$

이므로

$$\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R$$

$$R=\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

따라서

$$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

$$=\frac{54}{25}$$

정답 ①

14. 출제의도 : 새롭게 정의된 함수가 조건을 만족시키도록 하는 두 자연수의 순서쌍을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \le 2$일 때,

$f(x)=2x^3-6x+1$에서

$f'(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x \le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

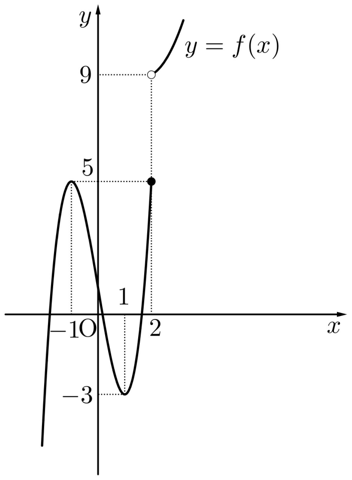
또한, a, b가 자연수이므로 곡선

$y=a(x-2)(x-b)+9$

는 점 $(2, 9)$와 점 $(b, 9)$를 지나고 아래로 볼록한 포물선이다.

(i) $b=1$ 또는 $b=2$인 경우

함수 $f(x)$는 $x>2$에서 증가하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여

$g(k)=\lim\limits_{t \to k-} g(k)=\lim\limits_{t \to k+} g(k)=3$ …… ㉠

이므로

$g(k)+\lim\limits_{t \to k-} g(k)+\lim\limits_{t \to k+} g(k)=9$ …… ㉡

을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

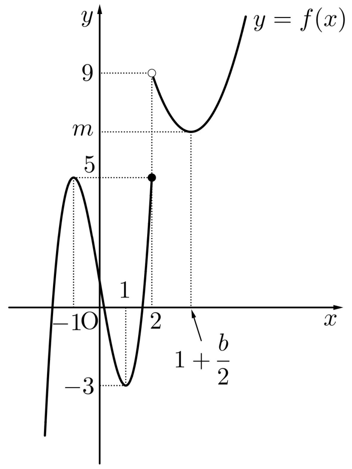
(ii) $b \ge 3$인 경우

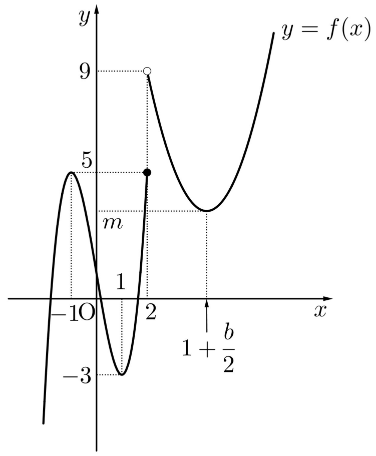
곡선 $y=a(x-2)(x-b)+9$는 직선

$x=\dfrac{2+b}{2}=1+\dfrac{b}{2}$에 대하여 대칭이므로

함수 $f(x)$는 $x=1+\dfrac{b}{2}$에서 극솟값을 갖는다. 이 극솟값을 m이라 하자.

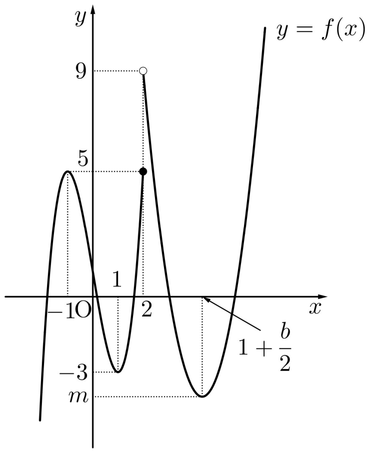
(ii-①) $m>-3$인 경우





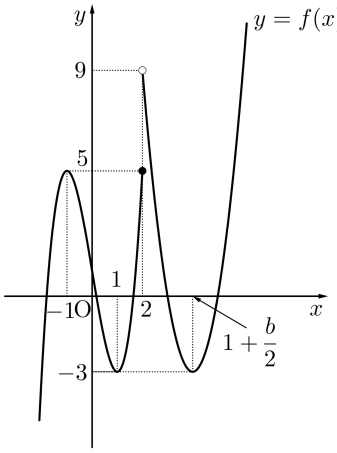
m과 5 중에 크지 않은 값을 m_1이라 하면 $-3<k<m_1$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ii-②) $m<-3$인 경우



$m<k<-3$인 모든 실수 k에 대하여 ㉠이 성립하므로 ㉡을 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 아니다.

(ⅱ-③) $m=-3$인 경우



k의 값에 따라 $g(k)$, $\lim\limits_{t\to k-}g(k)$, $\lim\limits_{t\to k+}g(k)$의 값을 구하면 다음과 같다.

	$g(k)$	$\lim\limits_{t\to k-}g(k)$	$\lim\limits_{t\to k+}g(k)$
$k<-3$	1	1	1
$k=-3$	3	1	5
$-3<k<5$	5	5	5
$k=5$	4	5	2
$5<k<9$	2	2	2
$k=9$	1	2	1
$k>9$	1	1	1

즉, ㉡을 만족시키는 실수 k의 값은 -3뿐이므로 문제의 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b\geq 3$, $m=-3$이다.

$f\left(1+\dfrac{b}{2}\right)=-3$에서

$a\left(\dfrac{b}{2}-1\right)\left(1-\dfrac{b}{2}\right)+9=-3$

$a(b-2)^2=48$

$48=2^4\times 3$이므로 구하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는

$(48, 3)$, $(12, 4)$, $(3, 6)$

이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3=51$이다.

정답 ①

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

a_n이 홀수일 때

$a_{n+1}=2^{a_n}$은 자연수이고

a_n이 짝수일 때

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$은 자연수이다.

이때 a_1이 자연수이므로

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

$a_6+a_7=3$에서

$a_6=1$, $a_7=2$ 또는 $a_6=2$, $a_7=1$

이다.

(ⅰ) $a_6=1$일 때,

$a_6=1$이고 a_5가 홀수인 경우

$a_6=2^{a_5}$에서

$1=2^{a_5}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_5의 값은

없다.

$a_6=1$이고 a_5가 짝수인 경우

$a_6=\frac{1}{2}a_5$에서

$1=\frac{1}{2}a_5$

$a_5=2$

a_4를 구해보자.

$a_5=2$이고 a_4가 홀수인 경우

$a_5=2^{a_4}$에서

$2=2^{a_4}$

$a_4=1$

$a_5=2$이고 a_4가 짝수인 경우

$a_5=\frac{1}{2}a_4$에서

$2=\frac{1}{2}a_4$

$a_4=4$

a_3을 구해보자.

$a_4=1$일 때

$a_3=2$

$a_4=4$이고 a_3이 홀수인 경우

$a_4=2^{a_3}$에서

$4=2^{a_3}$

$a_3=2$

이때, a_3이 짝수이므로 모순이다.

$a_4=4$이고 a_3이 짝수인 경우

$a_4=\frac{1}{2}a_3$에서

$4=\frac{1}{2}a_3$

$a_3=8$

a_2를 구해보자.

$a_3=2$일 때

$a_2=1$ 또는 $a_2=4$

$a_3=8$이고 a_2가 홀수인 경우

$a_3=2^{a_2}$에서

$8=2^{a_2}$

$a_2=3$

$a_3=8$이고 a_2가 짝수인 경우

$a_3=\frac{1}{2}a_2$에서

$8=\frac{1}{2}a_2$

$a_2=16$

a_1을 구해보자.

$a_2=1$일 때

$a_1=2$

$a_2=4$일 때

$a_1=8$

$a_2=3$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$3=2^{a_1}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 없다.

$a_2=3$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$3=\frac{1}{2}a_1$

$a_1=6$

$a_2=16$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2=2^{a_1}$에서

$16=2^{a_1}$

$a_1=4$

이때 a_1이 짝수이므로 모순이다.

$a_2=16$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2=\frac{1}{2}a_1$에서

$16 = \frac{1}{2}a_1$

$a_1 = 32$

따라서 a_1의 값은

2 또는 6 또는 8 또는 32이다.

(ⅱ) $a_6 = 2$일 때,

(i)의 과정을 이용하면

$a_2 = 2$ 또는 $a_2 = 6$ 또는 $a_2 = 8$ 또는 $a_2 = 32$

a_1을 구해보자.

$a_2 = 2$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2 = 2^{a_1}$에서

$2 = 2^{a_1}$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2 = \frac{1}{2}a_1$에서

$2 = \frac{1}{2}a_1$

$a_1 = 4$

$a_2 = 6$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2 = 2^{a_1}$에서

$6 = 2^{a_1}$

이 등식을 만족시키는 자연수 a_1의 값은 없다.

$a_2 = 6$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2 = \frac{1}{2}a_1$에서

$6 = \frac{1}{2}a_1$

$a_1 = 12$

$a_2 = 8$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2 = 2^{a_1}$에서

$8 = 2^{a_1}$

$a_1 = 3$

$a_2 = 8$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2 = \frac{1}{2}a_1$에서

$8 = \frac{1}{2}a_1$

$a_1 = 16$

$a_2 = 32$이고 a_1이 홀수인 경우

$a_2 = 2^{a_1}$에서

$32 = 2^{a_1}$

$a_1 = 5$

$a_2 = 32$이고 a_1이 짝수인 경우

$a_2 = \frac{1}{2}a_1$에서

$32 = \frac{1}{2}a_1$

$a_1 = 64$

따라서 a_1의 값은

1 또는 3 또는 4 또는 5 또는 12 또는 16 또는 64이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

모든 a_1의 값의 합은

$(2+6+8+32)+(1+3+4+5+12+16+64)$

$=153$

정답 ③

16. 출제의도 : 지수에 미지수가 포함된 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$

$3^{x-8} = \left(3^{-3}\right)^x$

$3^{x-8} = 3^{-3x}$

그러므로

$x-8 = -3x$

$4x=8$
$x=2$

정답 2

17. 출제의도 : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=(x+1)(x^2+3)$이므로

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)\times 2x$

따라서,

$$f'(1)=(1+3)+2\times 2$$
$$=8$$

정답 8

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)$$
$$=2\sum_{k=1}^{10} b_k-10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$에서

$$3\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k=33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-3\sum_{k=1}^{10} a_k+33 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-3\left(2\sum_{k=1}^{10} b_k-10\right)+33$$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=-6\sum_{k=1}^{10} b_k+63$$

$$7\sum_{k=1}^{10} b_k=63$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} b_k=9$$

정답 9

19. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 부등식을 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(2+x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x,$$

$$f(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$$

이므로 주어진 부등식은

$$\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$$

즉,

$$-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$0<x<16$에서 $0<\frac{\pi}{4}x<4\pi$이므로 ㉠에서

$$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}x<\frac{2}{3}\pi$$

또는 $\frac{4}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{5}{3}\pi$

또는 $\frac{7}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{8}{3}\pi$

또는 $\frac{10}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{11}{3}\pi$

이다. 즉,

$\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$ 또는 $\frac{16}{3}<x<\frac{20}{3}$ 또는

$\frac{28}{3}<x<\frac{32}{3}$ 또는 $\frac{40}{3}<x<\frac{44}{3}$

이므로 구하는 자연수 x의 값은

2, 6, 10, 14이다.

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+6+10+14=32$

정답 32

20. 출제의도 : 접선의 방정식을 구하고, 이를 활용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+2$

$f'(0)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2x$

이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표를 구해보자.

$f(x)=2x$에서

$-x^3+ax^2+2x=2x$

$x^2(x-a)=0$

$x=0$ 또는 $x=a$

점 A의 x좌표는 0이 아니므로 점 A의 x좌표는 a이다. 즉, 점 A의 좌표는

$(a,\ 2a)$

이다.

점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$

이다. 즉, 두 직선 OA와 AB는 서로 수직이다.

이때,

$$\begin{aligned} f'(a)&=-3a^2+2a^2+2\\ &=-a^2+2 \end{aligned}$$

이므로

직선 AB의 기울기는 $-a^2+2$이다.

$2\times(-a^2+2)=-1$에서

$a^2=\dfrac{5}{2}$

$a>\sqrt{2}$이므로

$a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

점 A의 좌표는

$\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ \sqrt{10}\right)$

이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $y=0$을 대입하면

$$0=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+\sqrt{10}$$

$x=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$

점 B의 좌표는

$\left(\dfrac{5\sqrt{10}}{2},\ 0\right)$

이다.

따라서

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(\sqrt{10})^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2+(0-\sqrt{10})^2}=5\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\times5\sqrt{2}=25$$

정답 25

21. 출제의도 : 로그함수의 그래프를 이해하고 함수 $g(t)$가 최솟값을 갖도록 하는 a의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=0$일 때, 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 5를 가지므로

$g(0)=5$

한편, 함수 $y=-x^2+6x$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고 $f(5)=5$이므로 $1 \le t \le 5$일 때,

$g(t) \ge 5$

한편,

$f(5)=5$이고 $f(6)=0$

또, 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$가 최솟값을 5로 갖기 위해서는 $t=6$일 때, 구간 $[5, 7]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 5이상이어야 하므로

$f(7) \ge 5$

즉,

$a\log_4(7-5) \ge 5$

$a \times \log_{2^2}2 \ge 5$

$a \times \dfrac{1}{2} \ge 5$

$a \ge 10$

따라서, 양수 a의 최솟값은 10이다.

정답 10

22\. **출제의도** : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문제의 조건으로부터

함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1) \ge 0$을 만족시켜야 한다. …… ㉠

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 반드시 실근을 갖는다.

(i) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a라 할 때, a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

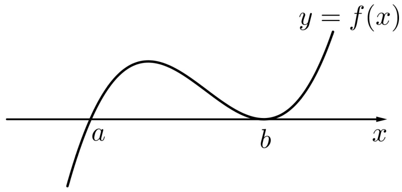
$f(m)<0<f(m+2)$

이므로 $f(m)f(m+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

방정식 $f(x)=0$의 실근을 a, $b(a<b)$라 할 때, $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$이다.

(ii -①) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$일 때



a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1) \ge 0$, $f(m+2) \ge 0$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1) \ge 0$,

$f(m)f(m+2) \ge 0$이어야 하므로

$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.

그러므로 $a=m+1$, $b=m+2$이다.

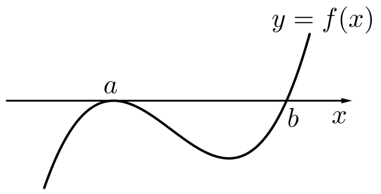
$f'\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$이므로 $m+1<\dfrac{1}{4}<m+2$이고

정수 m의 값은 -1이다. …… ㉢

즉, $f(x)=x(x-1)^2$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$을 만족시키지 않는다.

(ii -②) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$일 때



만약 $a<n<b$인 정수 n이 존재한다면 그 중 가장 큰 값을 n_1이라 하자. 그러면

$f(n_1)<0<f(n_1+2)$

이므로 $f(n_1)f(n_1+2)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉, $a<n<b$인 정수 n은 존재하지 않는다. …… ㉣

그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$,
$f(m+2)\geq 0$

이고, ㉢과 마찬가지로 $a=m+1$, $b=m+2$, 정수 m의 값은 -1이다.

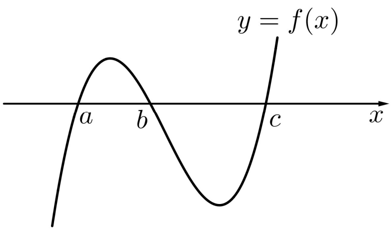
즉, $f(x)=x^2(x-1)$

그러나 이때 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)>0$이므로 $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$을 만족시키지 않는다

(ⅲ) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$

라 하자.



이때 ㉣과 마찬가지로 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않는다. 그러므로 a보다 작은 정수 중 최댓값을 m이라 하면

$f(m-1)<0$, $f(m)<0$, $f(m+1)\geq 0$,
$f(m+2)\geq 0$

이다. 이때 ㉠을 만족시키려면

$f(m-1)f(m+1)\geq 0$,
$f(m)f(m+2)\geq 0$이어야 하므로
$f(m+1)=f(m+2)=0$이어야 한다.

즉, $a=m+1$, $b=m+2$
또는 $a=m+1$, $c=m+2$
또는 $b=m+1$, $c=m+2$이다.

또, $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}<0$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$이므로

$f'(0)<0$이다.

(ⅲ-①) $a=m+1$, $b=m+2$일 때

$a<n<b$ 또는 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않고, $f'(0)<0$이므로 $b=m+2=0$이다. 이때 $a=m+1=-1$이므로

$f(x)=x(x+1)(x-c)=(x^2+x)(x-c)$

이다.

$f'(x)=(2x+1)(x-c)+(x^2+x)$

이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}-c\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}c-\frac{5}{16}$$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$에서

$-\frac{1}{2}c-\frac{5}{16}=-\frac{1}{4}$, $c=-\frac{1}{8}$

그러나 이는 $b<c$에 모순이다.

(ⅲ-②) $a=m+1$, $c=m+2$일 때

$m+1$, $m+2$는 연속하는 두 정수이므로 $f'(n)<0$을 만족시키는 정수 n은 존재하지 않는다. 그러나 이는 $f'(0)<0$에 모순이다.

(ⅲ-③) $b=m+1$, $c=m+2$일 때

$a<n<b$ 또는 $b<n<c$인 정수 n은 존재하지 않고, $f'(0)<0$이므로 $b=m+1=0$이다. 이때 $c=m+1=1$이므로

$f(x)=(x-a)x(x-1)=(x-a)(x^2-x)$

이다.

$f'(x)=(x^2-x)+(x-a)(2x-1)$

이므로

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}+\left(-\frac{1}{4}-a\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a$$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ 에서

$\frac{11}{16}+\frac{3}{2}a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{5}{8}$

그리고 $a=-\frac{5}{8}$ 이면

$$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{16}+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{8}$$

이므로 $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$ 도 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $f(x)$는

$f(x)=\left(x+\frac{5}{8}\right)(x^2-x)$이다.

따라서 $f(8)=\frac{69}{8}\times 56=483$

정답 483

■ [선택: 기하]

23. ④ 24. ③ 25. ② 26. ⑤ 27. ③
28. ⑤ 29. 11 30. 147

23. **출제의도** : 좌표공간에서 선분의 중점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ -2,\ 6)$, $\mathrm{B}(9,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a+9}{2},\ \dfrac{-2+2}{2},\ \dfrac{6+b}{2}\right)$

이 점의 좌표가 $(4,\ 0,\ 7)$과 일치하므로

$\dfrac{a+9}{2}=4$에서 $a=-1$

$\dfrac{6+b}{2}=7$에서 $b=8$

따라서

$a+b=-1+8$

$\quad=7$

정답 ④

24. **출제의도** : 타원 위의 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $(\sqrt{3},\ -2)$는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{(\sqrt{3})^2}{a^2}+\dfrac{(-2)^2}{6}=1$

$\dfrac{3}{a^2}=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

$a^2=9$

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3},\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{\sqrt{3}x}{9}+\dfrac{-2y}{6}=1$

즉, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-3$

따라서 접선의 기울기는

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

정답 ③

25. **출제의도** : 평면벡터의 내적을 이용하여 벡터의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$\qquad=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$, $|\vec{a}|=\sqrt{11}$, $|\vec{b}|=3$이므로

$17=4\times11-4\vec{a}\cdot\vec{b}+9$

$\quad=53-4\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{53-17}{4}$

$\quad=9$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$\qquad=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\qquad=11-2\times9+9$

$\qquad=2$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geq0$이므로

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$

정답 ②

26. **출제의도** : 정사영의 성질을 이용하

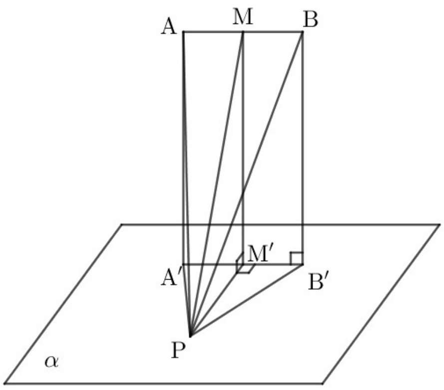
여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B는 평면 α 위에 있지 않고, $\overline{AB}=\overline{A'B'}$이므로 직선 AB는 평면 α와 평행하다.

따라서 선분 AB는 평면 α와 만나지 않고, 평면 AA′B′B와 평면 α는 서로 수직이다. ……㉠

선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영 M′은 선분 A′B′의 중점이다. ……㉡



그러므로 $\overline{PM'}\perp\overline{A'B'}$에서 직선 PM′은 선분 A′B′의 수직이등분선이다.

$\overline{PM'}=6$이므로 삼각형 A′B′P의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{A'B'}\times\overline{PM'}$$

$$=\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$$

두 평면 A′B′P, ABP가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$이므로

$$\frac{9}{2}=S\times\cos\theta$$

$$=18\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{1}{4}$$

㉠, ㉡에서 $\angle MPM'=\theta$이고 $\overline{MM'}\perp\overline{PM'}$이므로 직각삼각형 MPM′에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM}}$$

따라서

$$\overline{PM}=\frac{\overline{PM'}}{\cos\theta}$$

$$=\frac{6}{\frac{1}{4}}=6\times 4=24$$

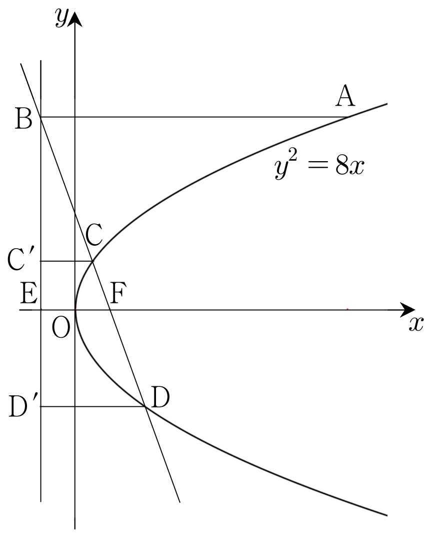
정답 ⑤

27. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

F(2, 0)이고, 준선은 직선 $x=-2$이다.

준선이 x축과 만나는 점을 E라 하고, 두 점 C, D에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CC'}}$, $\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{DD'}}$

이때 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$\overline{\mathrm{CC'}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DD'}}$

$\overline{\mathrm{CC'}}=k$ $(k>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{DD'}}=2k$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$

$=k+2k$

$=3k$

$\overline{\mathrm{BF}}=3k+k$

$=4k$

두 닮은 삼각형 BCC$'$, BFE에서

$\overline{\mathrm{EF}}=4$이므로

$3k:k=4k:4$에서 $k=3$

삼각형 BDD$'$에서

$\overline{\mathrm{BD}}=18$, $\overline{\mathrm{DD'}}=6$이므로

$\overline{\mathrm{BD'}}=12\sqrt{2}$

또 삼각형 BFE에서 $\overline{\mathrm{BE}}=8\sqrt{2}$

점 B의 y좌표가 $8\sqrt{2}$이므로

$(8\sqrt{2})^2=8x$에서 점 A의 x좌표는 16

따라서 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD'}}$

$=\frac{1}{2}\times18\times12\sqrt{2}$

$=108\sqrt{2}$

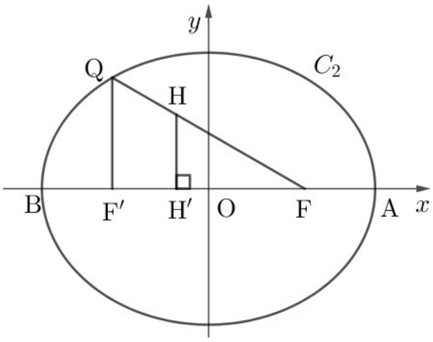
정답 ③

28. 출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 선분의 길이를 구하고 삼수선의 정리를 이용하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

평면 β를 xy평면, 선분 FF$'$의 중점을 원점 O, 직선 AB를 x축이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=18$이므로 $\mathrm{A}(9, 0)$, $\mathrm{B}(-9, 0)$이다.



점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원의 반지름의 길이가 4이므로 점 H에서 x축에 내린 수선의 발을 H$'$이라 하면

$\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{HQ}}=4$

직각삼각형 HH$'$F에서 $\angle\mathrm{HFH'}=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{HF}}=\frac{\overline{\mathrm{HH'}}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$

$\overline{\mathrm{H'F}}=\frac{\overline{\mathrm{HH'}}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=4\sqrt{3}$

타원의 정의에 의하여 타원 C_2의 주축의 길이가 18이므로

$\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=18$

즉, $\overline{\mathrm{HF}}+\overline{\mathrm{HQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}=18$

$\overline{\mathrm{QF'}}=18-\overline{\mathrm{HF}}-\overline{\mathrm{HQ}}$

$=18-8-4=6$

세 점 F$'$, H$'$, F는 한 직선 위에 있고,

$\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{HF}}=\overline{\mathrm{QF'}}:\overline{\mathrm{HH'}}=3:2$이므로

두 삼각형 FHH$'$, FQF$'$는 서로 닮음이고 닮음비가 $3:2$이다.

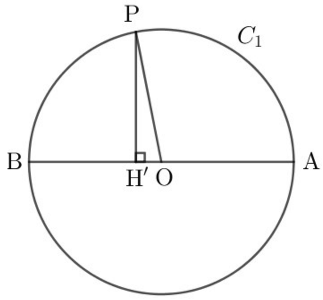
따라서

$\overline{\mathrm{FF'}}=\frac{3}{2}\times\overline{\mathrm{H'F}}=\frac{3}{2}\times4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{OH'}}=\overline{\mathrm{H'F}}-\overline{\mathrm{OF}}$

$= \overline{\mathrm{H'F}} - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{FF'}}$

$= 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$



점 P는 중심이 O이고 반지름의 길이가 9인 원 위의 점이고, 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PH'}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$이므로

$\overline{\mathrm{PH'}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{OH'}}^2}$

$= \sqrt{81-3} = \sqrt{78}$

$\overline{\mathrm{PO}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{HH'}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기 θ는 $\theta = \angle \mathrm{PH'H}$이다.

따라서

$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{HH'}}}{\overline{\mathrm{PH'}}}$

$= \frac{4}{\sqrt{78}} = \frac{2\sqrt{78}}{39}$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 쌍곡선의 정의를 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 P, Q는 모두 주축의 길이가 6인 쌍곡선 위의 점이고 조건 (가)와 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 6$ ……㉠

$\overline{\mathrm{QF}} - \overline{\mathrm{QF'}} = 6$ ……㉡

조건 (다)에서 삼각형 PQF의 둘레의 길이가 28이고, ㉡에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QF}} = \overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PQ}} + (\overline{\mathrm{QF'}} + 6)$

$= \overline{\mathrm{PF}} + (\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QF'}}) + 6$

$= \overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} + 6$

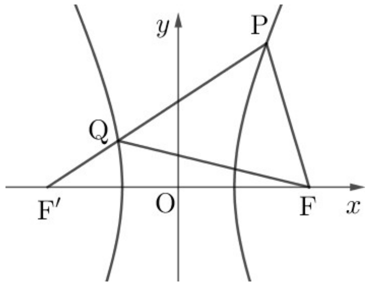
$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} + 6 = 28$

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 22$ ……㉢

조건 (나)에서 삼각형 PF′F가 이등변삼각형이고 ㉠에서 $\overline{\mathrm{PF'}} \neq \overline{\mathrm{PF}}$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{FF'}}$ 또는 $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{FF'}}$이다.

(ⅰ) $\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{FF'}}$인 경우



$\overline{\mathrm{FF'}} = 2c$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}} = 2c$

㉠에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PF'}} - 6 = 2c - 6$

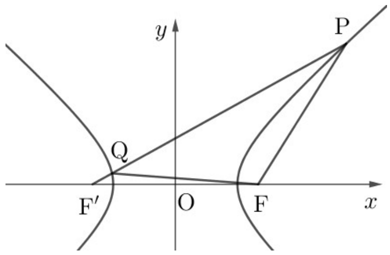
㉢에 의하여

$2c + (2c-6) = 22$

$4c = 28$

$c = 7$

(ⅱ) $\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{FF'}}$인 경우



$\overline{\mathrm{FF'}} = 2c$이므로 $\overline{\mathrm{PF}} = 2c$

㉠에 의하여

$\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{PF}} + 6 = 2c + 6$

㉢에 의하여

$2c + (2c+6) = 22$

$4c = 16$

$c = 4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 c의 값의 합은

$7 + 4 = 11$

정답 11

30. 출제의도 : 벡터의 연산을 이용하여 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

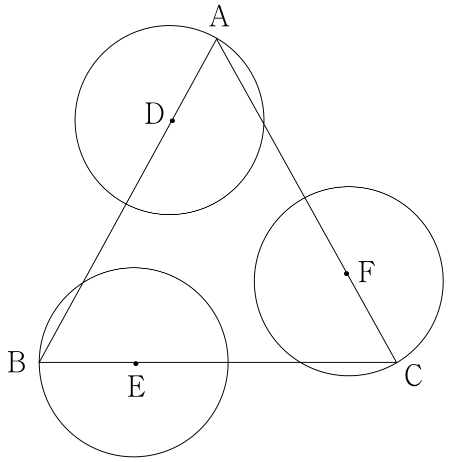
정답풀이 :

조건 (가)에서

점 P는 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이고,

점 Q는 점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이고,

점 R는 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



조건 (나)에서

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{RA}$

$= (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DP}) + (\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EQ}) + (\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FR})$

$= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FA} - (\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{FR})$

그런데 $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$이므로

$\overrightarrow{AX} = -(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{EQ} + \overrightarrow{FR})$

이때 $|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대이려면

세 벡터 $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{FR}$의 방향이 모두 같아야 한다.

즉, $|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이는 삼각형 DEF의 넓이와 같다.

삼각형 DBE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DE}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \times \overline{DB} \times \overline{BE} \times \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 9 + 1 - 2 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= 7$$

따라서 삼각형 DEF는 한 변의 길이가 $\sqrt{7}$인 정삼각형이므로

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{7})^2$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{4}$$

즉, $16S^2 = 16 \times \left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)^2$

$= 147$

정답 147