2022학년도 대학수학능력시험

# 수학영역 정답 및 풀이

*최근 수정일 : 22.03.07

■ [공통: 수학 I ·수학 II]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 01.② | 02.⑤ | 03.⑤ | 04.④ | 05.① |
| 06.③ | 07.① | 08.① | 09.④ | 10.⑤ |
| 11.③ | 12.③ | 13.② | 14.③ | 15.② |
| 16. 3 | 17. 4 | 18. 12 | 19. 6 | |
| 20. 110 | 21. 678 | 22. 9 | | |

**1. 출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\left(2^{\sqrt{3}}\times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=\left(2^{\sqrt{3}}\times 2^2\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2}$

$=2^{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}$

$=2^{3-4}$

$=2^{-1}$

$=\dfrac{1}{2}$

**정답 ②**

**2. 출제의도** : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f'(x)=3x^2+6x+1$

이므로

$f'(1)=3+6+1=10$

**정답 ⑤**

**3. 출제의도** : 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가?

**정답풀이** :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

$a_2=a_1+d=6$ ⋯⋯ ㉠

$a_4+a_6=36$에서

$(a_1+3d)+(a_1+5d)=36$

$2a_1+8d=36$

$a_1+4d=18$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1=2,\ d=4$

따라서

$a_{10}=2+9\times 4=38$

**정답 ⑤**

**4. 출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$x\to -1-$일 때, $f(x)\to 3$이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=3$

또, $x\to 2$일 때, $f(x)\to 1$이므로

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

따라서,

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3+1=4$

**정답 ④**

**5. 출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$a_1=1$이므로 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=1$

$a_5=1$이므로 $a_6=2$

$a_6=2$이므로 $a_7=4$

$a_7=4$이므로 $a_8=8$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8} a_k &= 2\times(1+2+4+8)\\ &= 2\times 15\\ &= 30\end{aligned}$$

**정답** ①

**6. 출제의도** : 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$, 즉

$2x^3-3x^2-12x=-k$ ⋯⋯ ㉠

에서

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하자.

$$\begin{aligned}f'(x)&=6x^2-6x-12\\&=6(x+1)(x-2)\end{aligned}$$

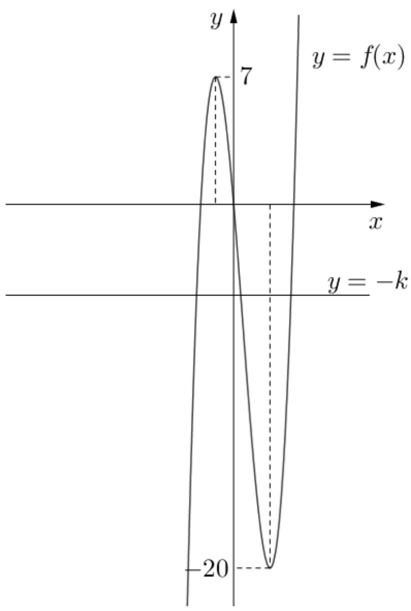
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $7$ | ↘ | $-20$ | ↗ |

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $7$을 갖고, $x=2$에서 극솟값 $-20$을 갖는다.




방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<-k<7$

즉, $-7<k<20$ 이다.

따라서 정수 $k$의 값은

$-6,\ -5,\ -4,\ \cdots,\ 19$

이고, 그 개수는 26이다.

**정답** ③

**7. 출제의도** : 삼각함수의 정의와 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\tan\theta-\dfrac{6}{\tan\theta}=1$이므로

양변에 $\tan\theta$를 곱하면

$\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\tan\theta=-2$ 또는 $\tan\theta=3$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\tan\theta=3$

이때,

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3$,

$\sin\theta=3\cos\theta$

이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$10\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 또는 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ …… ㉠

이 값을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+\frac{1}{10}=1$

$\sin^2\theta=\frac{9}{10}$

$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

이때, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ …… ㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$$\sin\theta+\cos\theta=\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$
$$=-\frac{4}{\sqrt{10}}$$
$$=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

**정답** ①

8. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

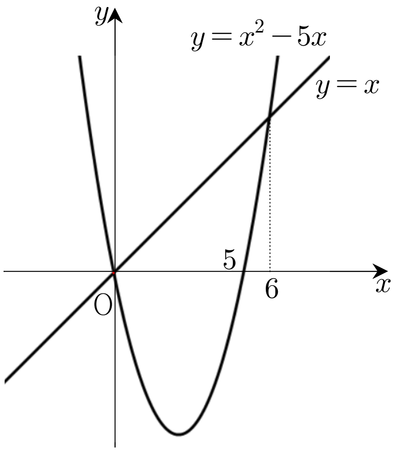
**정답풀이** :

$x^2-5x=x$에서

$x(x-6)=0$

$x=0$ 또는 $x=6$

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$가 만나는 점은 원점과 $(6, 6)$이다.




곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^6\{x-(x^2-5x)\}dx$$
$$=\int_0^6(6x-x^2)dx$$
$$=\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6$$
$$=36$$

따라서 직선 $x=k$가 넓이를 이등분하므로

$$18=\int_0^k\{x-(x^2-5x)\}dx$$
$$=\int_0^k(6x-x^2)dx$$
$$=\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^k$$

$=3k^2-\dfrac{1}{3}k^3$

정리하면

$k^3-9k^2+54=0$

$(k-3)(k^2-6k-18)=0$

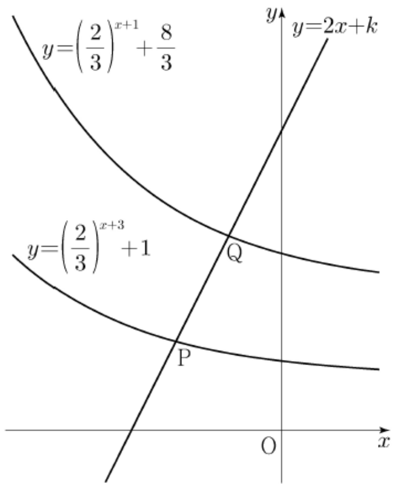
즉, $0<k<6$이므로

$k=3$

**정답** ①

**9. 출제의도** : 지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :




두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각

$p$, $q(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k)$, $\mathrm{Q}(q,\ 2q+k)$

로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로

$q-p=1$

즉, $q=p+1$이다.

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ …… ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+\dfrac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}+\dfrac{8}{3}=2p+k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}+\dfrac{8}{3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\dfrac{17}{3}$

**정답** ④

**10. 출제의도** : 다항함수의 도함수와 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

점 $(0,0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

이때, 점 $(0,0)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)(x-0)+0$

$y=f'(0)x$ …… ㉡

또, 곡선 $y=xf(x)$ 위에 점 $(1,2)$가 있으므로

$1\times f(1)=2$

$f(1)=2$ …… ㉢

$y=xf(x)$에서
$y'=f(x)+xf'(x)$이므로
$(1, 2)$에서의 접선의 방정식은
$y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+2$
$\quad=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$
$\quad=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ $\cdots\cdots$ ㉣
이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면
㉠에서
$d=0$
이때, $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로
㉢에서
$a+b+c=2$ $\cdots\cdots$ ㉤
㉡과 ㉣에서
두 접선이 일치해야 하므로
$f'(0)=f'(1)+2$, $f'(1)=0$
따라서 $f'(0)=2$, $f'(1)=0$
이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로
$f'(0)=2$에서
$c=2$
이때, $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로
$f'(1)=0$에서
$3a+2b+2=0$
㉤에서 $c=2$를 대입하면
$a+b=0$이므로
$b=-a$를 위 식에 대입하여 $a, b$를 구하면 $a=-2$, $b=2$이므로
$f(x)=-2x^3+2x^2+2x$,
$f'(x)=-6x^2+4x+2$
따라서
$f'(2)=-14$

**정답** ⑤

11. **출제의도** : 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로
함수 $f(x)$의 주기는 $a$이다.
직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로
양수 $t$에 대하여
$\mathrm{B}(t, \sqrt{3}t)$로 놓으면
$\mathrm{A}(-t, -\sqrt{3}t)$이고,
$\overline{\mathrm{AB}}=4t$이다.
이때, 함수 $f(x)$의 주기가 $a$이므로
$\overline{\mathrm{AC}}=4t=a$이고,
$\mathrm{C}(-t+a, -\sqrt{3}t)$, 즉 $\mathrm{C}(3t, -\sqrt{3}t)$이다.
점 C가 곡선 $y=\tan\dfrac{\pi x}{a}=\tan\dfrac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로
$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{\pi\times 3t}{4t}$
$-\sqrt{3}t=\tan\dfrac{3\pi}{4}$에서
$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

**정답** ③

12. **출제의도** : 함수의 연속의 성질을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$

이므로

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$

이때, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$이다.

( i ) $f(0)=1$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x)=1$

이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

( ii ) $f(0)=0$일 때,

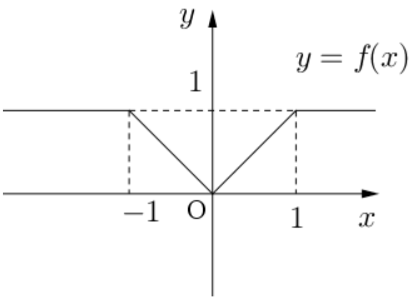
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x|\le 1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases}$$

이다.

( i ), ( ii )에서

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x|\le 1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases}$$




따라서

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1,\ f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

**정답** ③

13. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$$

그러므로 이 직선의 $y$절편은

$$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$$

그러므로 이 직선의 $y$절편은

$$-\frac{a(\log_4 b-\log_4 a)}{b-a}+\log_4 a$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡이 같으므로

$$-\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\frac{1}{2}\log_2 a$$

이 식을 정리하면

$$\frac{1}{2}\times\log_2 a=\frac{1}{2}\times\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$$

$$\log_2 a=\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$$

$$(b-a)\log_2 a=a\log_2\frac{b}{a}$$

$$\log_2 a^{b-a}=\log_2\left(\frac{b}{a}\right)^a$$

$$a^{b-a}=\frac{b^a}{a^a}$$

$$a^b=b^a \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

한편, $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$이고

$f(1)=40$이므로

$a^b + b^a = 40$

ⓒ을 대입하면

$a^b + a^b = 40$

$a^b = 20$

따라서 $b^a = 20$이므로

$f(2) = a^{2b} + b^{2a}$

$= (a^b)^2 + (b^a)^2$

$= 20^2 + 20^2$

$= 800$

**정답 ②**

**14. 출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

**정답풀이 :**

$x(0)=0,\ x(1)=0$이므로

점 P의 위치는 $t=0$일 때 수직선의 원점이고, $t=1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1 |v(t)|\,dt = 2$이므로

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^1 v(t)\,dt = 0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$이면

점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 $t_1$이 존재하므로

점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지

움직인 거리가 2 보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0 \le t \le 1$인 모든 시각 $t$에서

점 P와 원점 사이의 거리가 1 보다 작고, 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이므로

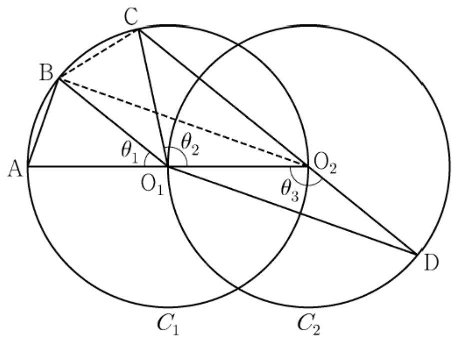
점 P는 $0 < t < 1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**정답 ③**

**15. 출제의도** : 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이의 비를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**




$\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로

$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$이고

$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로

$\angle CO_1B = \theta_1$이다.

이때, $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로

삼각형 $O_1O_2B$와 삼각형 $O_2O_1D$는 합동이다.

$\overline{AB} = k$라 할 때,

$\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로

$\overline{AO_2} = \sqrt{k^2 + (2\sqrt{2}k)^2} = \boxed{3k}$이고,

$\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 $O_2BC$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=k$, $\overline{\mathrm{BO_2}}=2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO_2B}=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로

삼각형 $\mathrm{BO_2C}$에서

$\overline{\mathrm{O_2C}}=x\,(0<x<3k)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\cos\frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times 2\sqrt{2}k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$3x^2-16kx+21k^2=0$

$(3x-7k)(x-3k)=0$

$0<x<3k$이므로

$$x=\frac{7}{3}k$$

즉, $\overline{\mathrm{O_2C}}=\boxed{\dfrac{7}{3}k}$이다.

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{O_2D}}+\overline{\mathrm{O_2C}}=\overline{\mathrm{O_1O_2}}+\overline{\mathrm{O_2C}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=k:\left(\dfrac{\boxed{3k}}{2}+\boxed{\dfrac{7}{3}k}\right)$이다.

이상에서

$$f(k)=3k,\ g(k)=\frac{7}{3}k,\ p=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$f(p)\times g(p)$

$$=\left(3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\frac{7}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=\frac{56}{9}$$

**정답** ②

16. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\log_2 120-\frac{1}{\log_{15}2}$$

$=\log_2 120-\log_2 15$

$$=\log_2\frac{120}{15}$$

$=\log_2 8$

$=\log_2 2^3$

$=3$

**정답** 3

17. **출제의도** : 도함수가 주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$=\int(3x^2+2x)\,dx$$

$=x^3+x^2+C$ (단, $C$는 적분상수)

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서

$f(x)=x^3+x^2+2$이므로

$f(1)=1+1+2=4$

**정답** 4

18. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{k=1}^{10}2a_k-\sum_{k=1}^{8}a_k=100$$에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{2}=50 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡을 하면

$$\frac{a_8}{2}=6$$

따라서 $a_8=12$

**정답** 12

19. **출제의도** : 미분을 이용하여 함수의 그래프의 개형을 알 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$

이때, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면

$f'(x)\geq 0$

이때, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면 $D/4\leq 0$이어야 하므로

$D/4=a^2-3(-a^2+8a)$

$\quad=4a^2-24a$

$\quad=4a(a-6)\leq 0$

그러므로

$0\leq a\leq 6$

따라서, $a$의 최댓값은 6이다.

**정답** 6

20. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$에

$x=0$을 대입하면

$f(1)=b$

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이므로

$b=1$

또, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로

$0\leq x\leq 1$에서

$f(x+1)=xf(x)+ax+1$

$\quad=x^2+ax+1$

$x+1=t$로 치환하면

$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1$

$\quad=t^2+(a-2)t+2-a$ …… ㉠

$f'(t)=2t+(a-2)$이고,

닫힌구간 $[0,1]$에서 $f(x)=x$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 $f'(1)=1$이므로

$a=1$

따라서 ㉠에서 $1\leq x\leq 2$일 때

$f(x)=x^2-x+1$ 이다.

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 (x^2-x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

즉, $60\times\int_1^2 f(x)\,dx=60\times\frac{11}{6}$

$\quad=110$

**정답** 110

21. **출제의도** : 등비수열의 합을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n|=2^n$

한편,

$$\sum_{k=1}^{9}|a_k|=\sum_{k=1}^{9}2^k=\frac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-2,$$

$|a_{10}|=2^{10}$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=-14$$

를 만족하기 위해서는

$a_1=-2,\ a_2=-4$

$\sum_{k=3}^{9} a_k=\sum_{k=3}^{9} 2^k=\frac{2^3(2^7-1)}{2-1}=2^{10}-8,$

$a_{10}=-1024$

이어야 한다.

따라서

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$

$=(-2)+2^3+2^5+2^7+2^9$

$=678$

**정답** 678

**22. 출제의도 :**

함수의 극한을 이용하여 도함수 $f'(x)$의 특징을 찾아 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

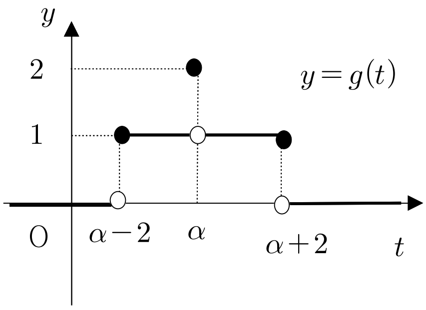
**정답풀이 :**

이차방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 중근을 갖는 경우에는 조건(나)에서 함수 $g(t)$가 함숫값 1과 2를 모두 갖는다는 조건에 모순이다.

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$를 갖는다.

( i ) $\beta=\alpha+2$일 때,

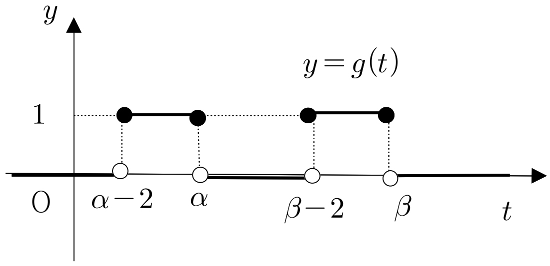
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.




이는 조건 (가)를 만족한다.

( ii ) $\beta>\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

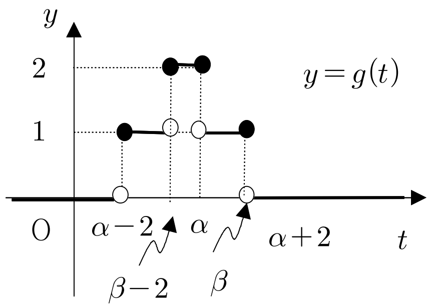



이는 조건 (나)에서

$g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii) $\beta<\alpha+2$일 때,

함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.




이때, $\beta-2\le a\le\alpha$인 $a$에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 ( i )의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$

$$=\frac{3}{2}\{x^2-(2\alpha+2)x+\alpha^2+2\alpha\}$$

로 놓을 수 있다.

이때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C$$

(단, $C$는 적분상수) …… ㉠

한편, 조건 (나)에서

$g(f(1))=g(f(4))=2$

이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 $t$의 값의 개수는 1이므로

$f(1)=f(4)$

㉠에서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$$

따라서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)$$

$$=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$$

양변에 2를 곱하면

$$1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)$$

$$=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$$

이 식을 정리하면

$3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$

$9\alpha^2-27\alpha+18=0$

$\alpha^2-3\alpha+2=0$

$(\alpha-1)(\alpha-2)=0$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

((ⅰ)-①) $\alpha=1$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=1$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1$$

$2+C=1$

$C=-1$

이때, $f(0)=-1$이므로

$g(f(0))=g(-1)=1$

그러므로 조건을 만족시킨다.

((ⅰ)-②) $\alpha=2$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서

$f(1)=2$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2$$

$8+C=2$

$C=-6$

이때, $f(0)=-6$이므로

$g(f(0))=g(-6)=0$

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, ((ⅰ)-①)에서

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$$

이므로

$$f(5)=\frac{1}{2}\times5^3-3\times25+\frac{9}{2}\times5-1$$

$$=\frac{125}{2}-75+\frac{45}{2}-1$$

$$=9$$

**정답** 9

**[선택: 확률과 통계]**
**23.** ④ **24.** ④ **25.** ① **26.** ③ **27.** ②
**28.** ① **29.** 31 **30.** 191

**23. 출제의도** : 이항정리를 이용하여 전개식의 항의 계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$(x+2)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r x^{7-r} \times 2^r$ (단, $r=0,1,2,\cdots,7$)

이므로

$x^5$의 계수는 $r=2$일 때

$${}_7C_2 \times 2^2 = \frac{7\times6}{2\times1}\times4=84$$

**정답** ④

**24. 출제의도** : 이항분포를 따르는 확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$V(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$$

이므로

$$\begin{aligned}V(2X)&=4V(X)\\&=4\times\frac{2}{9}n\\&=\frac{8}{9}n=40\end{aligned}$$

따라서, $n=45$

**정답** ④

**25. 출제의도** : 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

조건 (나)에서

$a^2-b^2=-5$ 또는 $a^2-b^2=5$

즉,

$(b-a)(b+a)=5$ 또는 $(a-b)(a+b)=5$

이고 $a,b$는 자연수이므로

$b-a=1,\ b+a=5$

또는

$a-b=1,\ a+b=5$

따라서, $a=2,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=2$이다.

또한, 조건 (가)에서

$a+b+c+d+e=12$

이므로 $c+d+e=7$ 이고 $c,d,e$는 자연수이므로

$c=c'+1,\ d=d'+1,\ e=e'+1$

($c',d',e'$은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=7$

$c'+d'+e'=4$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 $(c',d',e')$의 개수는

$$\begin{aligned}{}_3H_4&={}_{3+4-1}C_4\\&={}_6C_4\\&={}_6C_2\\&=\frac{6\times5}{2\times1}=15\end{aligned}$$

따라서, 구하는 모든 순서쌍 $(a,b,c,d,e)$의 개수는

$2\times15=30$

**정답** ①

**26. 출제의도** : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4이하이거나 7이상인 사건을 $A$라 하면 사건 $A^C$은 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4보다 크고 7보다 작은 경우이다. 즉, 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= 1-\mathrm{P}(A^C) \\ &= 1-\frac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3} \\ &= 1-\frac{\frac{5\times4}{2\times1}+\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}} \\ &= 1-\frac{16}{120} \\ &= \frac{13}{15} \end{aligned}$$

**정답** ③

27. **출제의도** : 모평균을 추정하여 신뢰구간을 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{10}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{10}$$

전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{20}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{20}$$

이때, $a=c$ 에서

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{10}=\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{20}$$

이고 $\overline{x_1}-\overline{x_2}=1.34$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{x_1}-\overline{x_2} &= 1.96\times\frac{\sigma}{10}-2.58\times\frac{\sigma}{20} \\ &= 0.67\times\frac{\sigma}{10}=1.34 \end{aligned}$$

$$\sigma=\frac{1.34\times10}{0.67}=20$$

따라서,

$$\begin{aligned} b-a &= 2\times1.96\times\frac{\sigma}{10} \\ &= 2\times1.96\times2 \\ &= 7.84 \end{aligned}$$

**정답** ②

28. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 $f$의 개수를 구할 수 있는가?

**정답풀이 :**

조건 (가)에 의하여

$f(1)\ge 1$

$f(2)\ge \sqrt{2}>1$

$f(3)\ge \sqrt{3}>1$

$f(4)\ge \sqrt{4}=2$

$f(5)\ge \sqrt{5}>2$

이고 조건 (나)에 의하여 치역으로 가능한 경우는

$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$
이다.

(i) 치역이 $\{1,2,3\}$인 경우

$f(1)=1$, $f(5)=3$ 이므로 $\{2,3,4\}$에서 $\{2,3\}$으로의 함수 중에서 치역이 $\{3\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$_2\Pi_3-1=2^3-1=7$

(ii) 치역이 $\{1,2,4\}$인 경우

(i)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 7이다.

(iii) 치역이 $\{1,3,4\}$인 경우

$f(1)=1$ 이므로 $\{2,3,4,5\}$에서 $\{3,4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{3\}$, $\{4\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

(iv) 치역이 $\{2,3,4\}$인 경우

((iv)-①) $f(5)=3$ 인 경우

$\{1,2,3,4\}$에서 $\{2,3,4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$_3\Pi_4-\{3+(_2\Pi_4-2)\times 2\}$

$=3^4-\{3+(2^4-2)\times 2\}$

$=81-31$

$=50$

((iv)-②) $f(5)=4$ 인 경우

((iv)-①)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 50이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 함수 $f$의 개수는

$7+7+14+50\times 2=128$

**정답** ①

**29. 출제의도** : 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 연속확률변수의 확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

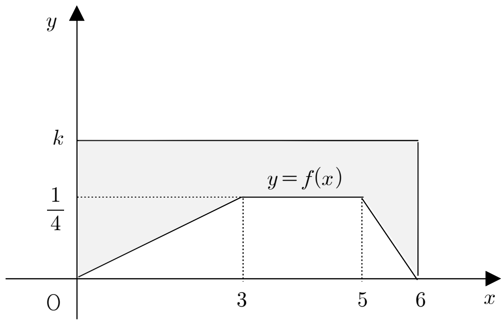
$0\le x\le 6$인 모든 실수 $x$에 대하여

$f(x)+g(x)=k$ ($k$는 상수)

이므로

$g(x)=k-f(x)$

이때, $0\le Y\le 6$이고 확률밀도함수의 정의에 의하여 $g(x)=k-f(x)\ge 0$ 즉, $k\ge f(x)$ 이므로 그림과 같이 세 직선 $x=0$, $x=6$, $y=k$ 및 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 1이다.




또한, $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이므로

$k\times 6=2$

따라서, $k=\dfrac{1}{3}$

이때,

$\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)=\mathrm{P}(2\le Y\le 5)$

이고 이 값은 세 직선 $x=2$, $x=5$, $y=\dfrac{1}{3}$ 및 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, $0\le x\le 3$

에서 $f(x)=\frac{1}{12}x$이므로

$\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)$

$=\mathrm{P}(2 \le Y \le 5)$

$=\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\{f(2)+f(3)\}\times 1\right]$

$+\left(\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{4}\times 2\right)$

$=\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\right\}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3}{24}+\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{24}$

따라서, $p=24$, $q=7$ 이므로

$p+q=31$

**정답** 31

30. **출제의도** : 조건부확률을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$a_5+b_5 \ge 7$인 사건을 $A$, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재하는 사건을 $B$라 하자.

사건 $A$가 일어나는 경우는

$a_5+b_5=7=2+2+1+1+1$

$a_5+b_5=8=2+2+2+1+1$

$a_5+b_5=9=2+2+2+2+1$

$a_5+b_5=10=2+2+2+2+2$

이고 주사위의 눈의 수가 5이상일 확률은 $\frac{1}{3}$, 4이하일 확률은 $\frac{2}{3}$이므로

(i) $a_5+b_5=7$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{8}{3^5}$

(ii) $a_5+b_5=8$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=10\times\frac{4}{3^5}$

(iii) $a_5+b_5=9$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\times\frac{2}{3^5}$

(iv) $a_5+b_5=10$일 확률은

${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{3^5}$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여

$\mathrm{P}(A)=10\times\frac{8}{3^5}+10\times\frac{4}{3^5}+5\times\frac{2}{3^5}+\frac{1}{3^5}$

또한, 사건 $A\cap B$인 경우는 (i), (ii)의 경우 3번째 시행까지 5이상의 눈의 수가 1번, 4이하의 눈의 수가 2번 일어나야 하고 (iii), (iv)인 경우는 사건 $A\cap B$은 일어나지 않는다.

$\mathrm{P}(A\cap B)$

$={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$+{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=3\times\frac{16}{3^5}+3\times\frac{4}{3^5}$

그러므로, 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$$=\frac{3\times\frac{16}{3^5}+3\times\frac{4}{3^5}}{10\times\frac{8}{3^5}+10\times\frac{4}{3^5}+5\times\frac{2}{3^5}+\frac{1}{3^5}}$$

$$=\frac{48+12}{80+40+10+1}$$

$$=\frac{60}{131}$$

이므로

$p=131$, $q=60$

따라서, $p+q=131+60=191$

**정답** 191

| |
|---|
| **[선택: 미적분]** |
| 23. ⑤ 24. ④ 25. ② 26. ③ 27. ① |
| 28. ② 29. 11 30. 143 |

23. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\times n}{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\times n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{5+0}{1-0}=5$$

**정답** ⑤

24. **출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$f(x^3+x)=e^x$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$ ⋯ ㉠

이다.

$x^3+x=2$에서

$x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)=0$

이므로 $x=1$이다.

따라서 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1+1)\times(3+1)=e$

이므로

$f'(2)=\frac{e}{4}$

**정답** ④

25. **출제의도** : 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

이때

$$\begin{aligned}a_{2n-1}-a_{2n}&=ar^{2n-2}-ar^{2n-1}\\&=ar^{2n-2}(1-r)\\&=a(1-r)(r^2)^{n-1}\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a(1-r)$이고 공비가 $r^2$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$에서

$-1<r<1$

이고

$\frac{a(1-r)}{1-r^2}=3$

이고 $r\neq1$이므로

$\frac{a}{1+r}=3$ ⋯ ㉠

또, $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\sum_{n=1}^{\infty}a^2r^{2n-2}=6$이므로

$\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\times\frac{a}{1+r}=6$

따라서 ㉠에서

$\frac{a}{1-r}\times3=6$

이므로

$$\frac{a}{1-r}=2$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$$

$$=\frac{a}{1-r}=2$$

**정답 ②**

**26. 출제의도** : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\times\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\times\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\ln(x^3+3x^2+1)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(\ln5-\ln1)$$

$$=\frac{\ln5}{3}$$

**정답 ③**

**27. 출제의도** : 평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 두 점의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 두 점의 좌표는

$(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$

이므로 이 두 점의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\ \cdots\ ㉠$$

이다. 두 식 $y=x^2$, $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$를 연립하면

$$x^2=t^2x-\frac{\ln t}{8},$$

$$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$$

이 방정식의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=t^2,$$

$$\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$$

따라서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=t^4-\frac{\ln t}{4}$$

이므로 ㉠에서 중점의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}t^2,\ \frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}\right)$이다.

그러므로 점 P의 시각 $t$에서의 위치는

$$x=\frac{1}{2}t^2,\ y=\frac{1}{2}t^4-\frac{\ln t}{8}$$

이다.

이때

$$\frac{dx}{dt}=t,\ \frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$$

이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$=\sqrt{t^2+4t^6-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$= 2t^3 + \frac{1}{8t}$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}$$

**정답** ①

**28. 출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는 $x$의 개수를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

$g(x) = 3f(x) + 4\cos f(x)$이므로

$$g'(x) = 3f'(x) - 4f'(x)\sin f(x)$$
$$= f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\}$$
$$= 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$$

이므로 $g'(x) = 0$에서

$x = 1$ 또는 $\sin(6\pi(x-1)^2) = \frac{3}{4}$

( i ) $x=1$일 때

$x=1$일 때 $\sin(6\pi(x-1)^2) = 0$이므로

$x=1$ 부근에서 $3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2) > 0$ 이다.

이때 $x-1$은 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로

$g'(x) = 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$도 $x=1$의 좌우에서 음에서 양으로 변한다.

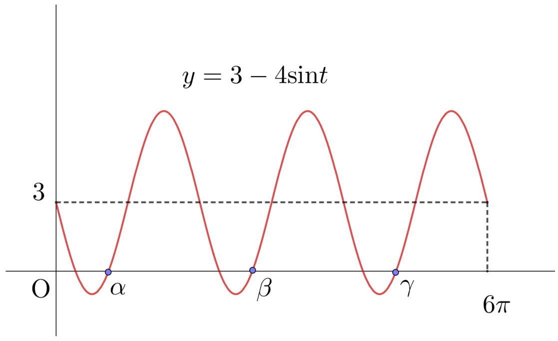
따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이다.

( ii ) $1 < x < 2$일 때

$12\pi(x-1) > 0$이고, 함수 $f(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 0에서 $6\pi$까지 증가한다.

즉, $f(x) = t$라 하면 $x$의 값이 1에서 2까지 증가할 때 $t$의 값은 0에서 $6\pi$까지 증가한다.

이때 함수 $y = 3 - 4\sin t$의 그래프는 다음과 같으므로 $t = \alpha, \beta, \gamma$의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin t$의 값은 음에서 양으로 변한다.




따라서 $f(x) = \alpha, \beta, \gamma$인 $x$의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin f(x)$의 값은 음에서 양으로 변하고 이러한 $x$는 세 수 $\alpha, \beta, \gamma$에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$가 $1 < x < 2$에서 극소가 되는 $x$의 개수는 3이다.

(iii) $0 < x < 1$일 때

함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 $x$에 대하여

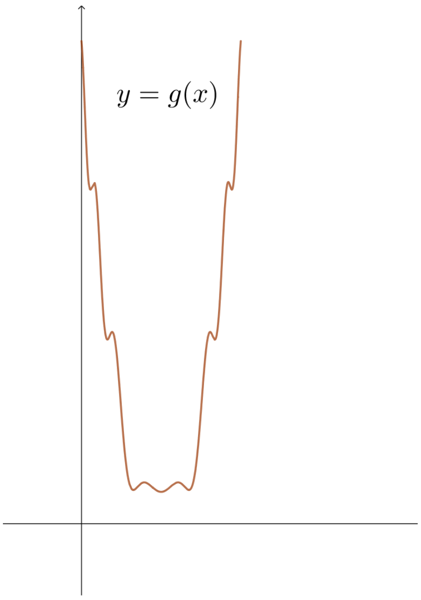
$f(1-x)=f(1+x)$
가 성립한다.
이때

$$\begin{aligned} g(1-x) &= 3f(1-x)+4\cos f(1-x) \\ &= 3f(1+x)+4\cos f(1+x) \\ &= g(1+x) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
따라서 (ⅱ)와 같이 $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 $x$의 개수도 3이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 $x$의 개수는
$1+3+3=7$
이다.

<참고>
$0<x<2$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.




**정답** ②

29. **출제의도** : 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

선분 AB의 중점을 M이라 하면
$\angle AMQ = 2\times\angle ABQ = 2\times 2\theta = 4\theta$
이므로
(부채꼴 AMQ의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times 1^2\times 4\theta = 2\theta$,
(삼각형 MBQ의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times 1^2\times \sin(\pi-4\theta)=\frac{1}{2}\sin 4\theta$
삼각형 RAB에서 $\angle ARB=\pi-3\theta$이므로
사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{BR}}{\sin\theta},$$

즉

$$\overline{BR}=\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로
(삼각형 RAB의 넓이)

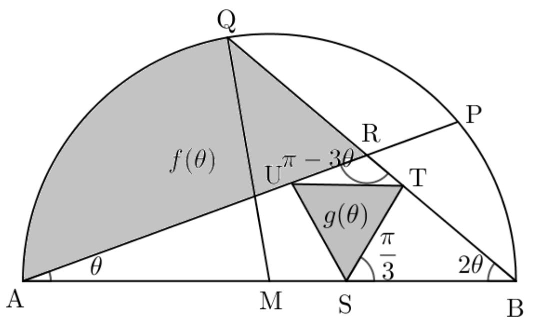
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BR}\times\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\sin 2\theta = \frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \end{aligned}$$

그러므로

$$f(\theta)=2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta-\frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta} \\ &= \lim_{\theta\to 0+}\left(2+2\times\frac{\sin 4\theta}{4\theta}-\frac{4\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}}{3\times\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}\right) \\ &= 2+2-\frac{4}{3}=\frac{8}{3} \quad \cdots ㉠ \end{aligned}$$




정삼각형 STU의 한 변의 길이를 $a$라 하면 삼각형 TSB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{\overline{\mathrm{BT}}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

즉

$$\overline{\mathrm{BT}}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin 2\theta}$$

두 삼각형 RUT, RAB가 서로 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{RT}}:\overline{\mathrm{RB}}=\overline{\mathrm{UT}}:\overline{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}-\frac{\sqrt{3}\,a}{2\sin 2\theta}:\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}=a:2$$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}a$$

$$\left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}+\frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}\right)a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta}a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$a=\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}$$

이때

$$g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

이고

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{a}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}\times\frac{1}{\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{\frac{\sin 2\theta\sin 3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin 2\theta+\sqrt{3}\sin 3\theta}{\theta}}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{2\times3}{0+3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{8}{3\sqrt{3}}$$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{a}{\theta}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=\frac{16\sqrt{3}}{27}\quad\cdots\text{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2}}{\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta}}$$

$$=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{27}}{\frac{8}{3}}$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

이므로

$p+q=9+2=11$

**정답** 11

**30. 출제의도** : 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있

는가?

**정답풀이 :**
조건 (가)에서 $f(1)=1$이므로 조건 (나)에 의하여

$g(2)=2f(1)=2$

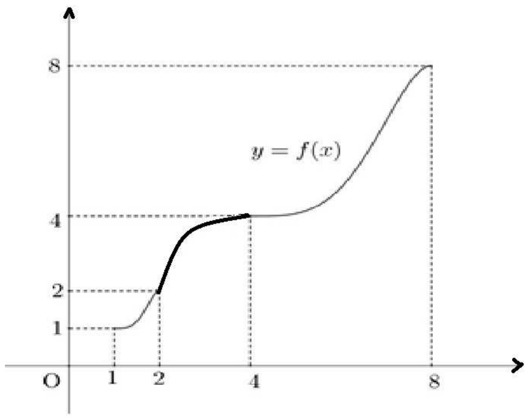
따라서 $f(2)=2$이므로

$g(4)=2f(2)=4$

따라서 $f(4)=4$이므로

$g(8)=2f(4)=8$

따라서 $f(8)=8$이다.




부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 xf'(x)dx$$

$$=[xf(x)]_1^8-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=8f(8)-f(1)-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=8\times8-1-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=63-\int_1^8 f(x)dx \cdots ㉠$$

이때

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$$

$\cdots$ ㉡

이고,

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4} \cdots ㉢$$

이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_2^4 f(x)dx=4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)dy$$

$$=12-\int_2^4 g(y)dy \cdots ㉣$$

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_2^4 g(y)dy=2\int_1^2 g(2t)dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y)dy=2\int_1^2 g(2t)dt$$

$$=2\int_1^2 2f(t)dt$$

$$=4\int_1^2 f(x)dx$$

$$=4\times\frac{5}{4}=5$$

㉣에서

$$\int_2^4 f(x)dx=12-\int_2^4 g(y)dy$$

$$=12-5=7 \cdots ㉤$$

또, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_4^8 f(x)dx=8\times8-4\times4-\int_4^8 g(y)dy$$

$$=48-\int_4^8 g(y)dy \ \cdots \ ㅂ$$

이때 $y=2t$로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_4^8 g(y)dy=2\int_2^4 g(2t)dt$$

이므로 조건 (나)에서

$$\int_4^8 g(y)dy=2\int_2^4 g(2t)dt$$

$$=2\int_2^4 2f(t)dt$$

$$=4\int_2^4 f(x)dx$$

$$=4\times 7=28$$

ㅂ에서

$$\int_4^8 f(x)dx=48-\int_4^8 g(y)dy$$

$$=48-28=20 \ \cdots \ ㅅ$$

ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅅ에서

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^8 f(x)dx$$

$$=\frac{5}{4}+7+20=\frac{113}{4}$$

이므로 ㄱ에서

$$\int_1^8 xf'(x)dx$$

$$=63-\int_1^8 f(x)dx$$

$$=63-\frac{113}{4}=\frac{139}{4}$$

따라서

$p+q=4+139=143$

**정답** 143

**[다른 풀이]**

$\int_1^8 xf'(x)dx$에서 $x=g(y)$라 하면

$x=1$일 때 $y=1$, $x=8$일 때 $y=8$이고,

$$\frac{dx}{dy}=g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

이므로

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\int_1^8 g(y)dy$$

$$=\int_1^2 g(y)dy+\int_2^4 g(y)+\int_4^8 g(y)dy$$

이때

$$\int_1^2 g(y)dy=2\times 2-1\times 1-\int_1^2 f(x)dx$$

$$=3-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$$

한편, $\int_2^4 g(y)dy=\int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\frac{y}{2}=t$라 하면 $y=2$일 때 $t=1$, $y=4$일 때 $t=2$이고, $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dy}$이므로

$$\int_2^4 g(y)dy=\int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=\int_1^2 4f(t)dt=4\int_1^2 f(t)dt$$

$$=4\times\frac{5}{4}=5,$$

또, $\int_4^8 g(y)dy=\int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$에서

$\frac{y}{2}=t$라 하면 $y=4$일 때 $t=2$, $y=8$일 때 $t=4$이고, $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dy}$이므로

$$\int_4^8 g(y)dy=\int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=\int_2^4 4f(t)dt=4\int_2^4 f(t)dt$$

$$=4\times\left\{4\times4-2\times2-\int_2^4 g(y)dy\right\}$$

$$=4(12-5)=28$$

따라서

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\int_1^8 g(y)dy$$

$$=\int_1^2 g(y)dy+\int_2^4 g(y)+\int_4^8 g(y)dy$$

$$=\frac{7}{4}+5+28=\frac{139}{4}$$

이므로

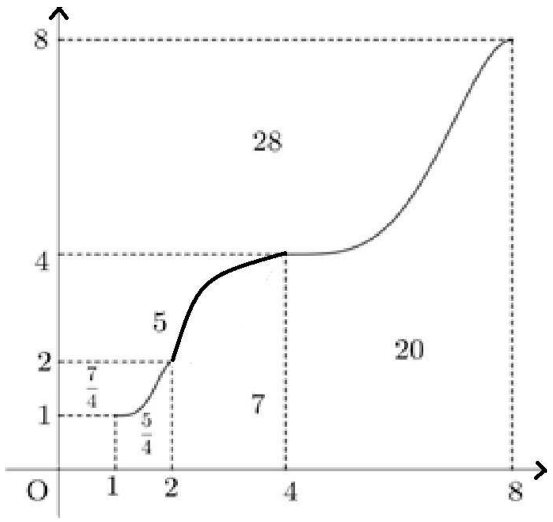
$p+q=4+139=143$

<참고>

조건 (나)의 성질

$g(2x)=2f(x)$

에서 다음 그림과 같이 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배씩 증가함을 알 수 있다.



| |
|---|
| [선택: 기하] |
| 23. ② 24. ③ 25. ⑤ 26. ② 27. ④ |
| 28. ⑤ 29. 100 30. 23 |

23. **출제의도** : 좌표공간의 점의 대칭이동을 이해하고 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

좌표공간의 점 $\mathrm{A}(2,1,3)$을 $xy$평면에 대하여 대칭이동시킨 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(2,1,-3)$

점 A를 $yz$평면에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(-2,1,3)$

따라서 구하는 선분 PQ의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}&=\sqrt{(2+2)^2+(1-1)^2+(-3-3)^2}\\&=\sqrt{52}\\&=2\sqrt{13}\end{aligned}$$

**정답** ②

24. **출제의도** : 초점의 좌표가 주어진 쌍곡선의 방정식을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{6}=1$의 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2},0)$이므로

$a^2+6=18$

$a^2=12$

$a>0$이므로

$a=2\sqrt{3}$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$2a=2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

**정답** ③

25. **출제의도** : 좌표평면의 두 직선의 방향벡터를 이해하고 이를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

두 직선

$\dfrac{x+1}{2}=y-3,\ x-2=\dfrac{y-5}{3}$

의 방향벡터를 각각

$\overrightarrow{u_1}=(2,1),\ \overrightarrow{u_2}=(1,3)$

이라 하면

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}\\&=\frac{|2\times1+1\times3|}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{1^2+3^2}}\\&=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

**정답** ⑤

26. **출제의도** : 타원의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

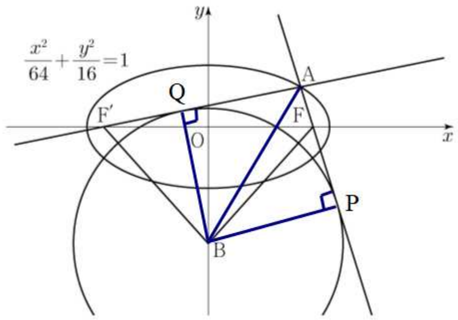
**정답풀이** :

$\overline{\mathrm{AF}}=p$, $\overline{\mathrm{AF'}}=q$라 하면 타원의 정의에 의하여

$p+q=2\times8=16$

원 $C$가 두 직선 AF, AF′과 접하는 두 점을 각각 P, Q, 원 $C$의 반지름의 길이를 $r$라 하면

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=r$




사각형 AFBF$'$의 넓이를 삼각형 ABF와 삼각형 ABF$'$으로 나누어 생각하면

$\frac{1}{2}\times p\times r+\frac{1}{2}\times q\times r=72$

따라서

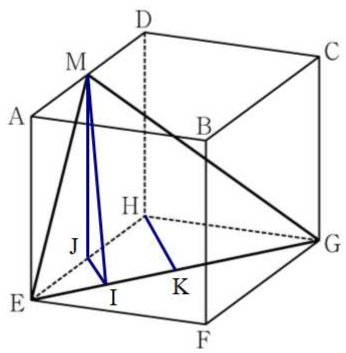
$$r=72\times\frac{2}{p+q}$$
$$=72\times\frac{2}{16}$$
$$=9$$

**정답** ②

**27. 출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

그림과 같이 점 M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I, 선분 EH에 내린 수선의 발을 J라 하자.




삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{JI}}\perp\overline{\mathrm{EG}}$

이므로 점 H에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 K라 하면 점 K는 선분 EG의 중점이고

$$\overline{\mathrm{IJ}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{HK}}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}$$

한편, 직각삼각형 MJI에서

$\overline{\mathrm{MJ}}=4$

이므로

$$\overline{\mathrm{MI}}=\sqrt{\overline{\mathrm{MJ}}^2+\overline{\mathrm{IJ}}^2}$$
$$=\sqrt{16+2}$$
$$=3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형 MEG의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EG}}\times\overline{\mathrm{MI}}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$$
$$=12$$

**정답** ④

**28. 출제의도** : 포물선의 정의와 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

**정답풀이** :

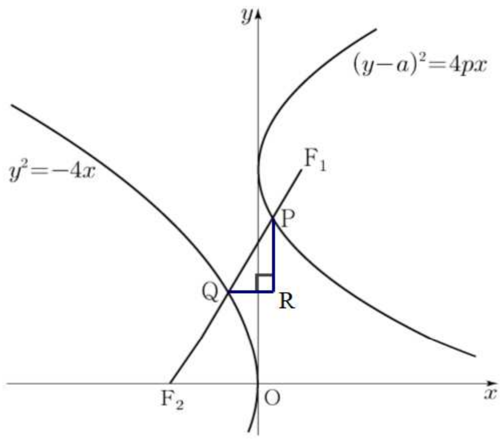
두 점 $\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_2$의 좌표가 각각

$\mathrm{F}_1(p,\ a)$, $\mathrm{F}_2(-1,\ 0)$

이고, $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}=3$이므로

$(p+1)^2+a^2=9$ ……㉠

그림과 같이 점 P를 지나고 $x$축에 수직인 직선과 점 Q를 지나고 $y$축에 수직인 직선이 만나는 점을 R라 하자.




직선 PQ의 기울기는 직선 $F_1F_2$의 기울기와 같은 $\dfrac{a}{p+1}$이므로 직각삼각형 PQR에서 양수 $t$에 대하여

$\overline{PR}=at$, $\overline{QR}=(p+1)t$

로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{PQ}=1$이므로

$a^2t^2+(p+1)^2t^2=1$

에서

$$t^2=\frac{1}{a^2+(p+1)^2}=\frac{1}{9}$$

즉, $t=\dfrac{1}{3}$

한편, 두 점 P, Q의 $x$좌표를 각각 $x_1$, $x_2$라 하면

$\overline{PF_1}=p+x_1$,

$\overline{QF_2}=1-x_2$,

$\overline{PF_1}+\overline{QF_2}=2$

이고

$$x_1-x_2=(p+1)t=\frac{1}{3}(p+1)$$

이므로

$(p+x_1)+(1-x_2)=2$

에서

$p=1-(x_1-x_2)$

$$=1-\frac{1}{3}(p+1)$$

즉, $p=\dfrac{1}{2}$

㉠에서

$$\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+a^2=9$$

이므로

$$a^2=\frac{27}{4}$$

따라서

$$a^2+p^2=\frac{27}{4}+\frac{1}{4}=7$$

**정답** ⑤

29. **출제의도** : 평면벡터의 연산과 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

조건 (가)에 의하여 점 P는 평행사변형 OACB의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos(\angle AOB)$

$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{4}$

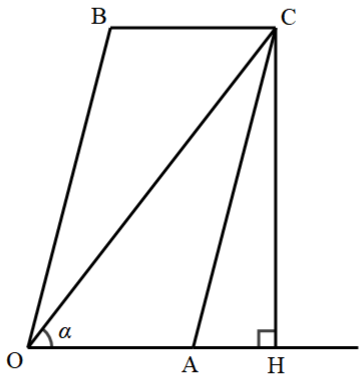
$=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}-1=2$

이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

( i ) 벡터 $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최대이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향일 때 최대가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때 최

대가 된다.
다음 그림과 같이 점 C에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle COA = \alpha$라 하자.



$\angle CAH = \angle AOB$에서

$\cos(\angle CAH) = \cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$

이므로

$\overline{AH} = \overline{AC} \times \cos(\angle CAH)$

$= \overline{OB} \times \frac{1}{4}$

$= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

한편,

$|\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2$

$= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

$= (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4}$

$= 2 + 8 + 2 = 12$

이므로

$|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$

그러므로

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

즉, 점 P가 선분 OA 위에 있을 때

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|\cos\alpha$

$= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{OP}| = 3$

이므로

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 반대 방향이면

$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| + |\overrightarrow{OX}|$

이므로

$M = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(ⅱ) 벡터 $3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}$의 크기는 $\overrightarrow{OP}$의 크기가 최소이고 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향일 때 최소가 되고, $\overrightarrow{OP}$의 크기는 점 P가 선분 OC 위에 있을 때 최소가 된다.

이때

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|$

$= |\overrightarrow{OP}| \times 2\sqrt{3} = 3$

이므로

$|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $\overrightarrow{OX}$가 $\overrightarrow{OP}$와 같은 방향이면

$|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}| = 3|\overrightarrow{OP}| - |\overrightarrow{OX}|$

이므로

$m = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$M \times m = 4\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right)$

$= 6\sqrt{6} - 8$

이므로

$a^2 + b^2 = 6^2 + (-8)^2$

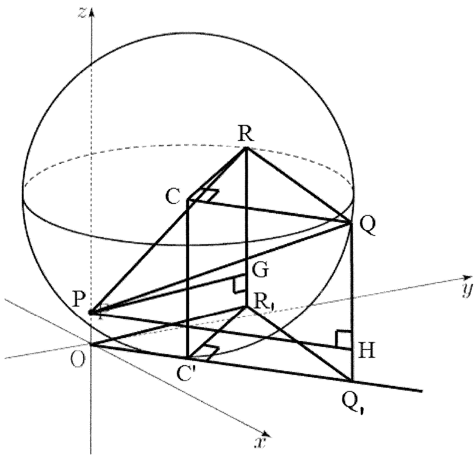
$= 100$

**정답** 100

**30. 출제의도** : 좌표공간의 구의 방정식 및 도형의 위치관계를 이해하고 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

**정답풀이** :

점 C에서 $xy$평면에 내린 수선의 발을 C′이라 하면 $\overline{CC'}=5$이므로 구 $S$는 점 C′에서 $xy$평면에 접한다.




평면 OPC는 점 C′을 지나므로 점 $Q_1$은 직선 OC′ 위에 있다. 이때 선분 $OQ_1$의 길이가 최대가 되려면 점 Q가 점 C를 지나고 직선 OC′과 평행한 직선이 구 $S$와 만나는 점 중 $x$좌표가 양수인 점이어야 한다.

이때

$\overline{OQ_1}=\overline{OC'}+5=3+5=8$

한편, 삼각형 $OQ_1R_1$의 넓이가 최대가 되려면 점 R가 점 C를 지나고 직선 CQ에 수직인 직선이 구 $S$와 만나는 점이어야 한다.

이때 $\overline{R_1C'}\perp\overline{OC'}$이고, $\overline{R_1C'}=5$이므로 삼각형 $OQ_1R_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times8\times5=20$

이제 삼각형 PQR의 넓이를 구해 보자.

점 P에서 직선 $QQ_1$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\overline{OQ_1}=8$,

$\overline{QH}=\overline{QQ_1}-1=4$

이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$ ……㉠

직각삼각형 CQR에서

$\overline{QR}=\sqrt{\overline{CQ}^2+\overline{CR}^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$ ……㉡

직각삼각형 $OC'R_1$에서

$\overline{OR_1}=\sqrt{\overline{OC'}^2+\overline{R_1C'}^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

이므로 점 P에서 직선 $RR_1$에 내린 수선의 발을 G라 하면

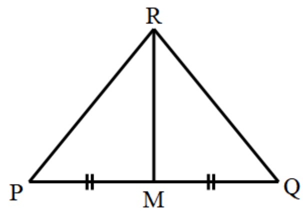
$\overline{PG}=\overline{OR_1}=\sqrt{34}$

$\overline{RG}=\overline{RR_1}-1=4$

직각삼각형 RPG에서

$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PG}^2+\overline{RG}^2}=\sqrt{34+16}=5\sqrt{2}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 삼각형 PQR는 $\overline{PR}=\overline{QR}$인 이등변삼각형이다.




위 그림과 같이 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{RM}=\sqrt{\overline{PR}^2-\overline{PM}^2}$

$=\sqrt{50-20}$

$=\sqrt{30}$

이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times\sqrt{30}=10\sqrt{6}$

이때 삼각형 PQR의 $xy$평면 위로의 정사

영이 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$이므로 두 평면 PQR와 $\mathrm{OQ_1R_1}$이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하면

$$\cos\theta = \frac{20}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는

$$20 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{20}{3}\sqrt{6}$$

이므로

$p+q=3+20=23$

**정답** 23