2018학년도 대학수학능력시험

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ②	02. ④	03. ①	04. ①	05. ③
06. ⑤	07. ⑤	08. ②	09. ①	10. ③
11. ④	12. ⑤	13. ②	14. ①	15. ⑤
16. ③	17. ⑤	18. ④	19. ②	20. ③
21. ②	22. 10	23. 7	24. 5	
25. 30	26. 4	27. 14	28. 43	
29. 32	30. 9			

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\times16^{\frac{1}{4}}$

$=2\times\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}$

$=2\times2$

$=4$

정답 ②

2. **출제의도** : 집합의 상등을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a+1=3,\ b=5$이므로

$a+b=2+5$

$=7$

정답 ④

3. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3}{5^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5^{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{5}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5^{n+1}}$

$=\frac{1}{5}$

정답 ①

4. **출제의도** : 합성함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(2)=2$이므로

$g(f(2))=g(2)$

$=1$

정답 ①

5. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to0-$일 때, $f(x)\to0$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=0$

또, $x\to1+$일 때, $f(x)\to3$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=3$

따라서,

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$

$=0+3$

$=3$

정답 ③

6. **출제의도** : 두 조건에 대하여 조건을 만족시키는 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 4\}$

$Q=\left\{x \mid \frac{1}{2}<x \le \frac{a}{2}\right\}$

이때, p가 q이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q$

따라서 $4 \le \frac{a}{2}$에서 $a \ge 8$이므로

구하는 최솟값은 8이다.

정답 ⑤

7. **출제의도** : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 지역 A를 희망한 학생일 사건을 A, 고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명이 지역 B를 희망한 학생일 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{140}{500}}{\frac{180}{500}}$$

$$=\frac{7}{9}$$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 자연수의 분할의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$11=7+4$

$=6+5$

$=5+3+3$

$=4+4+3$

이므로 구하는 방법의 수는 4이다.

정답 ②

9. **출제의도** : 정적분을 미적분의 기본정리를 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^a (3x^2-4)dx$

$=\left[x^3-4x\right]_0^a$

$=a^3-4a$

$=a(a+2)(a-2)=0$

$a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

따라서, $a>0$이므로

$a=2$

정답 ①

10. **출제의도** : 독립인 두 사건에 대하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A \cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B)$에서

$\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3} \times \mathrm{P}(B)$

따라서 $\frac{1}{3}\times \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

정답 ③

11. 출제의도 : 유리함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\frac{1}{2x-8}+3$

$=\frac{1}{2(x-4)}+3$

그러므로 함수 $y=\frac{1}{2x-8}+3$의 그래프는 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

한편, $y=0$을 대입하면

$\frac{1}{2x-8}+3=0$, $\frac{1}{2x-8}=-3$

$2x-8=-\frac{1}{3}$, $x=\frac{23}{6}$

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 x는 $1, 2, 3$이다.

(ⅰ) $x=1$일 때,

$y=-\frac{1}{6}+3=\frac{17}{6}$

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍은 $(1, 1)$, $(1, 2)$이다.

(ⅱ) $x=2$일 때,

$y=-\frac{1}{4}+3=\frac{11}{4}$

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍은 $(2, 1)$, $(2, 2)$이다.

(ⅲ) $x=3$일 때,

$y=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$

그러므로 조건을 만족시키는 순서쌍은 $(3, 1)$, $(3, 2)$이다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$2+2+2=6$

정답 ④

12. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$의 일반항은

${}_8\mathrm{C}_r x^{8-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_8\mathrm{C}_r 2^r x^{8-2r}$

$(r=0, 1, 2, \cdots, 8)$

따라서 $8-2r=4$에서 $r=2$이므로

x^4의 계수는

${}_8\mathrm{C}_2\times 2^2=28\times 4=112$

정답 ⑤

13. 출제의도 : 귀납적으로 주어진 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=2$이고 이 수는 짝수이므로

$a_2=a_1-1=1$

이때, a_2는 홀수이므로

$a_3=a_2+2=1+2=3$

a_3는 홀수이므로

$a_4 = a_3 + 3 = 3 + 3 = 6$

a_4는 짝수이므로

$a_5 = a_4 - 1 = 6 - 1 = 5$

a_5는 홀수이므로

$a_6 = a_5 + 5 = 5 + 5 = 10$

a_6는 짝수이므로

$a_7 = a_6 - 1 = 10 - 1 = 9$

정답 ②

14. 출제의도 : 조건을 만족시키는 등차수열의 첫째항과 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$\dfrac{a_5 + a_{13}}{2} = a_9$이므로 $a_9 = 0$에서

$a + 8d = 0$ …… ㉠

또, $\displaystyle\sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{18}{2} \times (a_1 + a_{18})$

$= 9(2a + 17d)$

이므로 $9(2a + 17d) = \dfrac{9}{2}$에서

$2a + 17d = \dfrac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -4,\ d = \dfrac{1}{2}$이므로

$a_{13} = a + 12d$

$= -4 + 12 \times \dfrac{1}{2} = 2$

정답 ①

15. 출제의도 : 표본평균의 확률분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(201.5,\ 1.8^2)$을 따른다.

이때, 이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(201.5,\ \dfrac{1.8^2}{9}\right)$ 즉, $\mathrm{N}(201.5,\ 0.6^2)$을 따르고, $Z = \dfrac{\overline{X} - 201.5}{0.6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서, 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 200)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{\overline{X} - 201.5}{0.6} \geq \dfrac{200 - 201.5}{0.6}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \geq -2.5)$

$= \mathrm{P}(-2.5 \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(Z \geq 0)$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5) + \mathrm{P}(Z \geq 0)$

$= 0.4938 + 0.5$

$= 0.9938$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_{\sqrt{3}} a = 2\log_3 a = 4\log_9 a = \log_9 a^4$이므로

$\log_9 a^4 = \log_9 ab$에서

$a^4 = ab$

$a(a^3 - b) = 0$에서 $b = a^3$

따라서 $\log_a b = \log_a a^3 = 3$

정답 ③

17. 출제의도 : 이산확률변수의 평균을 구할 수 있고 평균, 분산, 표준편차의 성질을 이해하는가?

정답풀이 :

$Y=10X-2.21$이라 하자.

확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

확률의 총합이 1이므로

$$a+b+\frac{2}{3}=1$$

$$a+b=\frac{1}{3} \ \cdots\cdots \ ㉠$$

또, $\mathrm{E}(Y)=10\mathrm{E}(X)-2.21=0.5$ 이므로

$$\mathrm{E}(Y)=(-1)\times a+0\times b+1\times\frac{2}{3}$$

$$=-a+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{2} \ \cdots\cdots \ ㉡$$

그러므로 ㉠과 ㉡에서

$$a=\boxed{\frac{1}{6}}\ ,\ b=\boxed{\frac{1}{6}}$$

이고 $\mathrm{V}(Y)=\frac{7}{12}$이다.

한편, $Y=10X-2.21$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\boxed{100}\times\mathrm{V}(X)$이다.

따라서,

$$\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\boxed{100}}\times\frac{7}{12}$$

이다.

그러므로 $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{1}{6}$, $r=100$이므로

$$pqr=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times100=\frac{25}{9}$$

정답 ⑤

18. 출제의도 : 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉 $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$로 놓을 수 있다.

이때, $f'(x)=(x-2)(x+a)$
$+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$

이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2}$$

$$=\frac{2+a}{(2+a)^2}=\frac{1}{2+a}$$

따라서 $\frac{1}{2+a}=\frac{1}{4}$에서 $a=2$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

즉 $f(3)=2\times1\times5=10$

정답 ④

19. 출제의도 : 등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle B_1C_1D_1 = 30^\circ$, $\angle C_1D_1B_1 = 90^\circ$ 이므로

직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서

$$\overline{C_1D_1} = \overline{B_1C_1}\cos 30^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역의 넓이는

$\triangle B_1C_1D_1 - ($부채꼴$B_2C_1D_1)$

$$= \frac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times\overline{D_1B_1} - \overline{C_1D_1}^2\times\pi\times\frac{30^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\pi\times\frac{1}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-\pi}{16} \;\cdots\cdots\; ㉠$$

또, 삼각형 $C_1A_2C_2$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{C_2C_1}\times\overline{C_1A_2}\times\sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\overline{B_2C_1}\right)\times\left(\overline{B_2C_1}\cos 30^\circ\right)\times\sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{64} \;\cdots\cdots\; ㉡$$

따라서, R_1의 넓이 S_1은 ㉠과 ㉡에 의해

$$S_1 = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{64} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$$

한편, 직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$\angle B_2C_1A_2 = 30^\circ$ 이므로

$\angle A_2B_2C_1 = 60^\circ$

또,

$$\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_1}\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\overline{B_2C_1} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

그러므로 삼각형 $A_2B_2C_2$에서

$\angle A_2B_2C_2 = 60^\circ$ 이고 $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$

즉, 삼각형 $A_2B_2C_2$은 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 인 정삼각형이다.

그러므로 길이의 비가 $1 : \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{3}{16}$ 이다.

따라서,

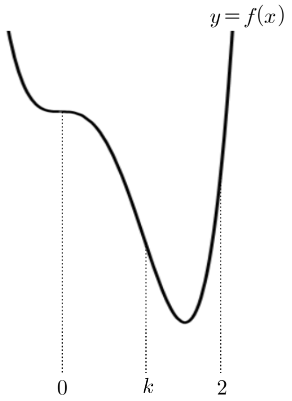
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{1-\frac{3}{16}} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

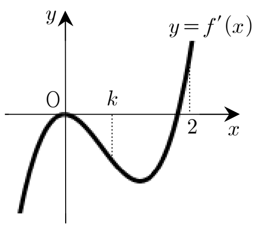
정답 ②

20. 출제의도 : 조건을 만족시키는 사차함수의 그래프와 도함수의 그래프를 이용하여 참 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.





ㄱ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서

함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축은 열린 구간 $(k, 2)$에서 만난다.

즉 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $f(0)=0$이면 양수 a에 대하여

$f(x)=x^3(x-a)$로 놓을 수 있다.

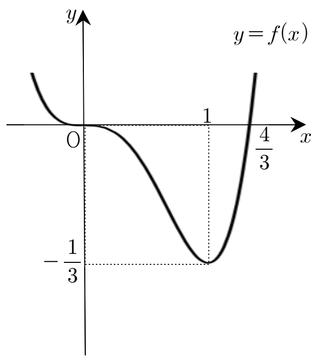
$f(x)=x^4-ax^3$에서

$f'(x)=4x^3-3ax^2$이고

$f'(2)=32-12a=16$에서 $a=\dfrac{4}{3}$

즉 $f(x)=x^3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{3}$을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq-\dfrac{1}{3}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ③

21. **출제의도** : 합성함수에 관련된 주어진 조건을 그래프를 이용하여 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

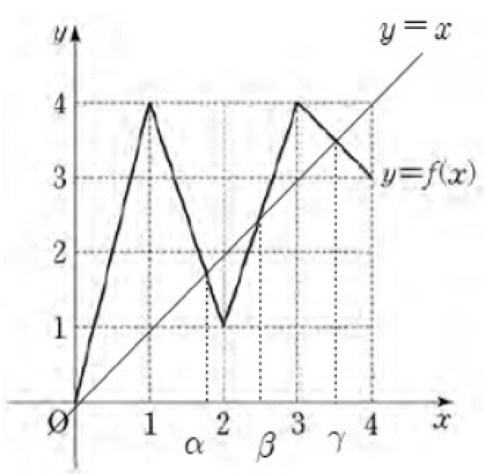
$g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$에서

$f(f(a))=f(a)$, $f(f(b))=f(b)$

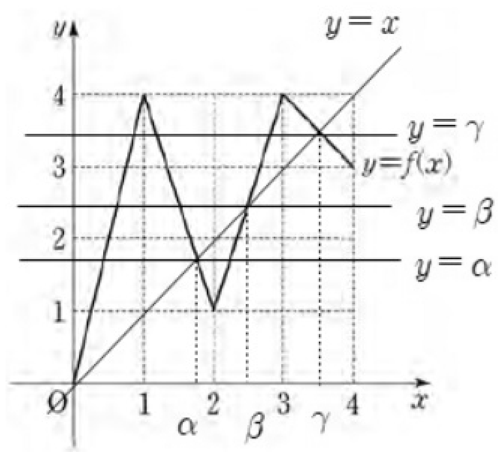
이때, $f(a)=k$라 하면

$f(k)=k$

그러므로 k는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표이다.



이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 위의 그림과 같이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(0<\alpha<\beta<\gamma)$라 하자.
이제, $f(x)$의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$인 경우를 나타내면 다음과 같다.



(ⅰ) $f(x)=0$인 경우
x의 값은 0이다.
(ⅱ) $f(x)=\alpha$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.
이때, $x\neq\alpha$인 값을 $x_1, x_2\ (x_1<\alpha<x_2)$라 하면 x의 값은 $x_1,\ \alpha,\ x_2$이다.
(ⅲ) $f(x)=\beta$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.
이때, $x\neq\beta$인 값을 $y_1, y_2\ (y_1<y_2<\beta)$라 하면 x의 값은 $y_1,\ y_2,\ \beta$이다.
(ⅳ) $f(x)=\gamma$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\gamma$는 그림과 같이 네 점에서 만난다.
이때, $x\neq\gamma$인 값을
$z_1, z_2, z_3\ (z_1<z_2<z_3<\gamma)$라 하면 x의 값은 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ \gamma$이다.
이때, 함수 $g(x)=f(f(x))$가 집합 X에서 X로의 함수이어야 하므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.
(ⅰ) $f(x)$의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$의 값 중 서로 다른 두 값을 갖도록 a, b를 정하는 경우
이 경우 $f(x)=0$, $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$, $f(x)=\gamma$인 x의 값은 각각 $0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$이어야 한다.
즉, 두 수 a, b는 $0, \alpha, \beta, \gamma$에서 서로 다른 두 수를 택해야 하므로 집합 X의 개수는

$$_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(ⅱ) $f(x)$의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$의 값 중 하나의 값만 갖도록 a, b를 정하는 경우
$f(x)=0$일 때는 두 수 a, b를 결정할 수 없다.
$f(x)=\alpha$일 때는 두 수 a, b는 $x_1,\ \alpha,\ x_2$ 중 α를 반드시 포함하여 두 수를 택해야 하므로 집합 X의 개수는 2이다.
$f(x)=\beta$인 경우 두 수 a, b는 $y_1,\ y_2,\ \beta$ 중 β를 반드시 포함하여 두 수를 택해야 하므로 집합 X의 개수는 2이다.
$f(x)=\gamma$인 경우 두 수 a, b는 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ \gamma$ 중 γ를 반드시 포함하여 두 수를 택해야 하므로 집합 X의 개수는 3이다.
그러므로 집합 X의 개수는 7이다.
따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 집합 X의 개수는
$6+7=13$

정답 ②

22. 출제의도 : 조합의 기호를 알고, 그

값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{5\times 4}{2\times 1} = 10$

정답 10

23. **출제의도** : 미분법과 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 2x^3 + x + 1$에서

$f'(x) = 6x^2 + 1$이므로

$f'(1) = 6\times 1^2 + 1 = 7$

정답 7

24. **출제의도** : 두 집합에 대하여 주어진 집합의 원소의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$B^C = \{1, 3, 5, 7\}$이므로

$A\cup B^C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

따라서 $n(A\cup B^C) = 5$

정답 5

25. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{x\to 1}(x+1)f(x) = 1$이므로

$g(x) = (x+1)f(x)$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$

따라서, $x \neq -1$일 때, $f(x) = \dfrac{g(x)}{x+1}$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1)f(x)$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left\{(2x^2+1)\times\dfrac{g(x)}{x+1}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{x+1}\times\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

$= \dfrac{3}{2}\times 1 = \dfrac{3}{2}$

그러므로

$20a = 20\times\dfrac{3}{2} = 30$

정답 30

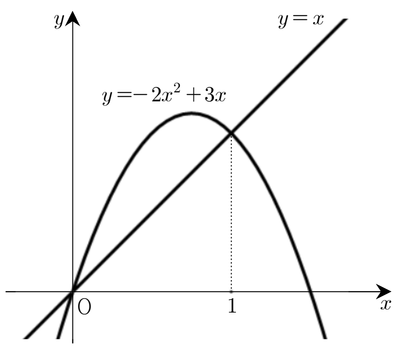
26. **출제의도** : 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$-2x^2 + 3x = x$에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$이므로

곡선 $y = -2x^2 + 3x$와 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표는 $0, 1$이고

곡선 $y = -2x^2 + 3x$와 직선 $y = x$는 그림과 같다.



구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1\{(-2x^2+3x)-x\}\,dx$$

$$=\int_0^1(-2x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$$

따라서 $p+q=3+1=4$

정답 4

27. **출제의도** : $\sum$의 성질을 이용할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28$에서

$$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k+1\}=28$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=28$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=18 \cdots\cdots ㉠$$

또, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$에서

$$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+a_k\}=16$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=16$$

이 식의 양변에 2를 곱하면

$$2\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=32 \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 ㉠을 변끼리 빼면

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=14$$

정답 14

28. **출제의도** : 독립시행의 확률을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

앞면이 6회, 뒷면이 0회 나올 확률은

$${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

앞면이 5회, 뒷면이 1회 나올 확률은

$${}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

앞면이 4회, 뒷면이 2회 나올 확률은

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

따라서 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=({}_6\mathrm{C}_0+{}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=(1+6+15)\times\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$$

이므로 $p+q=32+11=43$

정답 43

29. **출제의도** : 미분가능성을 이해하고 있으며 미분을 이용하여 부등식에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x<a$, $x>a$일 때, 다항함수이므로 이 범위에서 미분가능하다.

한편, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능해야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{0-0}{x-a}=0 \cdots\cdots ㉠$$

또,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a}$$

여기서 $x\to a+$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재해야 하므로 (분자)→0에서

$$\lim_{x\to a+}(x-1)^2(2x+1)=0$$

$$(a-1)^2(2a+1)=0$$

$$a=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=1$$

(i) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}2(x-1)^2$$

$$=\frac{9}{2}$$

이 값은 ㉠의 값과 다르므로 $a=-\frac{1}{2}$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

(ii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1}$$

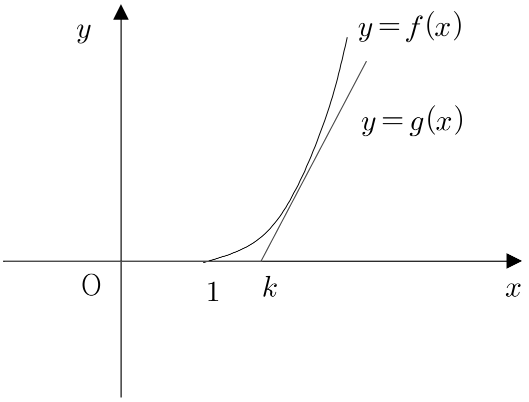
$$=\lim_{x\to 1+}(x-1)(2x+1)$$

$$=0$$

이 값은 ㉠의 값과 같으므로 $a=1$일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하다.

따라서, (i), (ii)에서 $a=1$이다.

한편, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$이어야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.



$x>1$일 때, 함수 $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$와 접하고 기울기가 12인 접선의 접점을 $(m, f(m))$ $(m>1)$라 하자.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\{(x-1)^2\}'(2x+1)+(x-1)^2(2x+1)' \\ &=2(x-1)(2x+1)+2(x-1)^2 \\ &=(x-1)\{(4x+2)+(2x-2)\} \\ &=6x(x-1) \end{aligned}$$

이때, 접선의 기울기가 12이므로

$$6m(m-1)=12$$

$$m^2-m-2=0$$

$$(m+1)(m-2)=0$$

$$m=-1 \text{ 또는 } m=2$$

이때, $m>1$이므로

$m=2$

그러므로 접선의 방정식은

$y-5=12(x-2)$

$y=12x-19$

$y=12\left(x-\frac{19}{12}\right)$

따라서, $k \geq \frac{19}{12}$이므로 k의 최솟값은 $\frac{19}{12}$이다.

그러므로

$a+p+q=1+12+19=32$

정답 32

30. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 함수에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 정하고, 극한값을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 $y=x$와 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{n^2}{2}$이다.

$2\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{2}\right)=\frac{241}{768}$이므로

$$F(x)=h(x)-x$$
$$=\begin{cases} g(x)-x & (0 \leq x<5 \text{ 또는 } x \geq k) \\ x-g(x) & (5 \leq x<k) \end{cases}$$

로 놓으면

$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx=\frac{241}{768}$이다.

$n \leq x<n+1$일 때

$$g(x)-x=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{3}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2-(x-n)\right\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(1+n-x)$$

$$=-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))$$

이므로

$$\int_n^{n+1}\{g(x)-x\}\,dx$$

$$=\int_n^{n+1}\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}x(x-1)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 x(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{1}{6} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편, $\int_0^n F(x)\,dx$

$$=\int_0^1(g(x)-x)\,dx+\cdots+\int_4^5(g(x)-x)\,dx$$
$$+\int_5^6(x-g(x))\,dx+\cdots+\int_{k-1}^k(x-g(x))\,dx$$
$$+\int_k^{k+1}(g(x)-x)\,dx+\cdots+\int_{n-1}^n(g(x)-x)\,dx$$

이때, ㉠은 $n=0$일 때도 성립하므로 ㉠에서

$$2\int_0^n F(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$$
$$-\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$
$$+\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$-\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$이므로

$$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

$$=\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}$$

즉 $\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{241}{768}$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{1}{16}$이므로

$k-5=4$에서 $k=9$

정답 9