(홀수형)

2011학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

$$4^{\frac{3}{2}} \times \log_3 \sqrt{3} = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{2} \log_3 3$$

$$= 2^3 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2^2 = 4$$

답 ②

2.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

이므로

$$A(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하려는 행렬의 모든 성분의 합은

$2-2+2+2=4$

답 ④

3.

$\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 이므로

$\overline{PA}^2 = 4\overline{PB}^2$

$(-1)^2 + (-2)^2 + a^2 = 4\{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2\}$

$5 + a^2 = 12$

$a^2 = 7$

$a > 0$ 이므로

$a = \sqrt{7}$

답 ①

4.

$\sqrt{4x^2 - 5x + 7} = 4x^2 - 5x + 1$ 에서

$4x^2 - 5x + 7 = X$ 로 놓으면

$\sqrt{X} = X - 6 \quad \cdots ㉠$

양변을 제곱하면

$X = X^2 - 12X + 36$, $X^2 - 13X + 36 = 0$

$(X-4)(X-9) = 0$

$X = 4$ 또는 $X = 9$

$X = 4$ 이면 ㉠에서 $2 = -2$ 가 되어 모순

$\therefore \ X = 9$

$4x^2 - 5x + 7 = 9$ 에서

$4x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \cdots ㉡$

따라서, 주어진 무리방정식의 근은

이차방정식 ㉡의 근과 같으므로

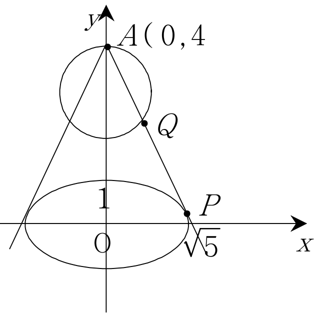
구하는 모든 실근의 곱은

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

답 ①

5.



점 $A(0,4)$ 에서 타원 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$y = mx + 4$

이다.

$\frac{x^2}{5} + (mx+4)^2 = 1$ 에서

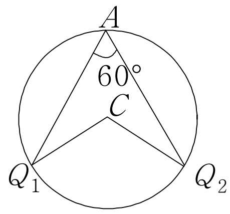
$(1+5m^2)x^2 + 40mx + 75 = 0$

$\frac{D}{4}=400m^2-75-375m^2=0$

$m^2=3$

$m=\pm\sqrt{3}$

따라서, 두 접선이 이루는 예각의 크기는 $60°$이다.



점 Q가 나타내는 도형은 그림에서 호 Q_1Q_2이고,

$\angle Q_1CQ_2=120°$

이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\pi$

답 ④

6.

현수막 B는 2곳 이상 설치해야 하므로 B가 2곳, 3곳, 4곳에 설치하는 경우로 나누어 경우의 수를 구한다.

(ⅰ) A 1곳, B 2곳, C 2곳에 설치하는 경우

$\frac{5!}{2!2!}=30$(가지)

(ⅱ) A 1곳, B 3곳, C 1곳에 설치하는 경우

$\frac{5!}{3!}=20$(가지)

(ⅲ) A 1곳, B 4곳에 설치하는 경우

$\frac{5!}{4!}=5$(가지)

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하려는 경우의 수는 $30+20+5=55$(가지)

답 ①

7.

두 점수의 합이 70점이 되는 경우는 다음의 세 가지이다.

구분	(ⅰ)	(ⅱ)	(ⅲ)
관람객 투표	점수 A	점수 B	점수 C
심사 위원	점수 C	점수 B	점수 A

관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사 위원 점수를 받는 사건이 서로 독립이므로 각각의 확률은 다음과 같다

(ⅰ)이 일어날 확률 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(ⅱ)가 일어날 확률 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(ⅲ)이 일어날 확률 : $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하려는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$

답 ③

8.

ㄱ. $\lim_{x\to1+0}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(-x)$

$=-1+\lim_{t\to-1-0}f(t)$

$=-1+1=0$ (참)

ㄴ. $f(x)\ge0$ 즉, $-2\le x<1$, $x\ge2$ 일 때

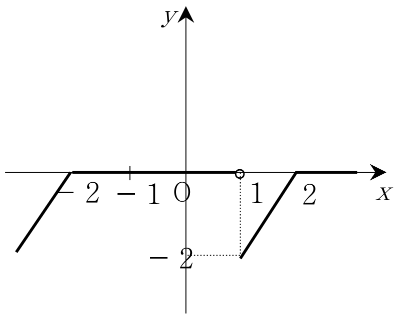
$f(x)-|f(x)|=f(x)-f(x)=0$

$f(x)<0$ 즉, $x<-2$, $1\le x<2$ 일 때

$f(x)-|f(x)|=f(x)+f(x)=2f(x)$

따라서, 함수 $f(x)-|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.

2011학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설



그러므로 함수 $f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서 불연속이다. (참)

ㄷ. (반례) $a=1$일 때,

$f(x)$는 $x=-1, 1$에서 불연속이고,

$f(x-1)$은 $x=0, 2$에서 불연속이므로

$x \neq -1, 0, 1, 2$일 때 함수 $f(x)f(x-1)$은 연속이다.

$\lim_{x \to -1} f(x)f(x-1)=0=f(-1)f(-2)$이므로

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 0} f(x)f(x-1)=0=f(0)f(-1)$이므로

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 1} f(x)f(x-1)=0=f(1)f(0)$이므로

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x \to 2} f(x)f(x-1)=0=f(2)f(1)$이므로

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=2$에서 연속이다.

따라서, 함수 $f(x)f(x-1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이다. (거짓)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

9.

지반 A, B의 유효수직응력을 각각 S_A, S_B라 하면 $S_A=1.44S_B$

시험기가 지반 A, B에 들어가면서 받는 저항력을 각각 R_A, R_B라 하면 $R_A=1.5R_B$

지반 A, B의 상대밀도를 각각 D_A, D_B라 하면

$$D_A=-98+66\log\frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}} \cdots ㉠$$

$$D_B=-98+66\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}} \cdots ㉡$$

㉠ − ㉡에서

$$D_A-D_B=66\left(\log\frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}}-\log\frac{R_B}{\sqrt{S_B}}\right)$$

$$=66\log\frac{1.5R_B\cdot\sqrt{S_B}}{\sqrt{1.44S_B}\cdot R_B}$$

$$=66\log\frac{1.5}{\sqrt{1.44}}$$

$$=66\log\frac{1.5}{1.2}$$

$$=66\log\frac{5}{4}$$

$$=66(1-3\log 2)$$

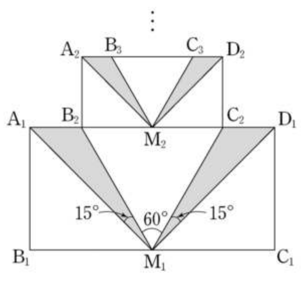
$$=66(1-3\times 0.3)$$

$$=6.6$$

$\therefore D_A=D_B+6.6=65+6.6=71.6$

답 ④

10.



$\triangle C_2M_1M_2$에서 $\angle C_2M_1M_2=30°$이므

로

$\overline{C_2M_2} = \overline{M_1M_2}\tan 30° = 1\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{C_2D_1} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ S_1 = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{3-\sqrt{3}}{3}\times 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

한편

$\overline{C_2D_1} : \overline{C_3D_2} = \overline{C_1M_1} : \overline{C_2M_2} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\triangle C_2M_1D_1 : \triangle C_3M_2D_2 = 1 : \frac{1}{3}$

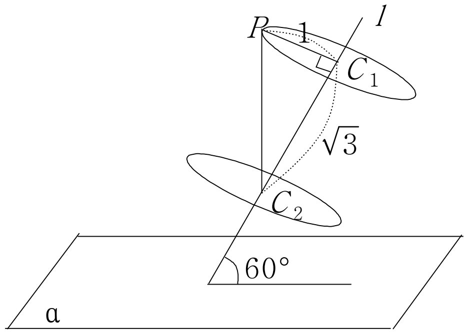
따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 이고

공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

답 ②

11.

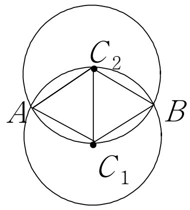


$\triangle C_1PC_2$에서 $\overline{PC_1} = 1$, $\overline{C_1C_2} = \sqrt{3}$ 이므로

$\angle C_1PC_2 = 60°$, $\angle PC_2C_1 = 30°$

따라서, 선분 PC_2는 빛의 방향과 평행하므로

두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자는 두 원판이 아래 그림과 같이 포개어진 상태에서 빛에 의해 평면 α에 생기는 그림자와 같다.



그림에서 두 호 AC_1B, AC_2B로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times 1^2\times\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$= \frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, 포개어진 두 원의 넓이는

$2\pi-\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$

원판이 평면 α와 이루는 각의 크기가 30° 이므로 구하는 그림자의 넓이는

$\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos 30°$

$= \left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$

답 ⑤

12.

$A = (a\ b)$, $B(c\ d)$, $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$라 하자.

(단, $a+b\neq 0$, $c+d\neq 0$, $pq\neq 0$)

ㄱ. $PA = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(a\ b) = \begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix}$

이때 $pa\cdot qb - pb\cdot qa = 0$ 이므로 PA는 역행렬을 갖지 않는다.(참)

2011학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

ㄴ. $PA=\begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix}$, $PB=\begin{pmatrix} pc & pd \\ qc & qd \end{pmatrix}$ 에서

$PA=PB$ 이면 $pa=pc$, $pb=pd$, $qa=qc$, $qb=qd$

즉, $p(a-c)=0$, $p(b-d)=0$, $q(a-c)=0$, $q(b-d)=0$

그런데 $p\neq 0$, $q\neq 0$ 이므로 $a=c$, $b=d$

$\therefore$ $A=B$(참)

ㄷ. $PA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p(a+b) \\ q(a+b) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} p(a+b) \\ q(a+b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 에서 $p(a+b)=1$, $q(a+b)=1$

그런데 $a+b\neq 0$ 이므로 $p=q=\frac{1}{a+b}$

따라서 $PA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$을 만족하는 행렬

$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$ 가 존재한다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13.

고객의 집에서 시장까지의 거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(1740, 500^2)$을 따르므로

$$P(X\geq 2000)=P\left(Z\geq\frac{2000-1740}{500}\right)$$
$$=P(Z\geq 0.52)$$
$$=0.5-P(0\leq Z\leq 0.52)$$
$$=0.5-0.2$$
$$=0.3$$

$P(X<2000)=1-P(Z\geq 2000)=1-0.3=0.7$

집에서 시장까지의 거리가 2000m 미만일 사건을 A, 자가용을 이용하여 시장에 오는 사건을 B라 하면

$P(A\cap B)=0.7\times 0.05=0.035$

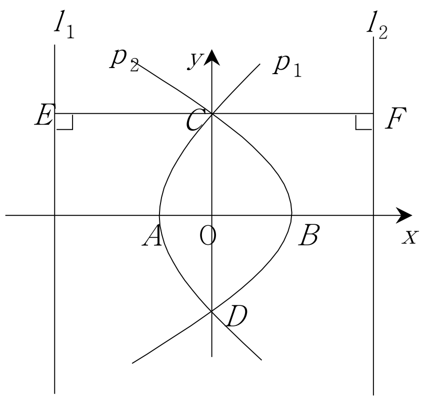
$P(A^c\cap B)=0.3\times 0.15=0.045$

$\therefore$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.035}{0.035+0.045}=\frac{7}{16}$$

답 ②

14.



점 C에서 p_1의 준선 l_1에 내린 수선의 발을 E, p_2의 준선 l_2에 내린 수선의 발을 F라 하자.

$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하면

$a+b=2$ $\cdots$㉠

포물선의 정의에 의해

$\overline{BC}=\overline{CE}$이므로 $\sqrt{b^2+c^2}=a+2$ $\cdots$㉡

$\overline{OC}=\overline{CF}$이므로 $c=2b$ $\cdots$㉢

㉠,㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$b^2+(2b)^2=(a+2)^2$

$5b^2=(a+2)^2$

$5(2-a)^2=(a+2)^2$

$4a^2-24a+16=0$, $a^2-6a+4=0$

$a<2$이므로 $a=3-\sqrt{5}$

$\therefore \ b=\sqrt{5}-1 \ , \ c=2(\sqrt{5}-1)$

따라서, $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 2(\sqrt{5}-1)$

$=2(\sqrt{5}-1)$

답 ③

15.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$ 이고

$a_{n+1}=n+1+\frac{(n-1)!}{a_1a_2\cdots a_n} \ (n\geq 1) \ \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $a_1a_2\cdots a_n$을 곱하면

$a_1a_2\cdots a_{n+1}=$

$a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)! \ (n\geq 1)$

$b_n=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}$ 이라 하면, $b_1=a_1=1$ 이고

$$b_{n+1}=\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=b_n+\frac{1}{n(n+1)} \ (n\geq 1)$$

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n(n+1)} \ (n\geq 1)$ 이므로

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1+1-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{2n-1}{n}$$

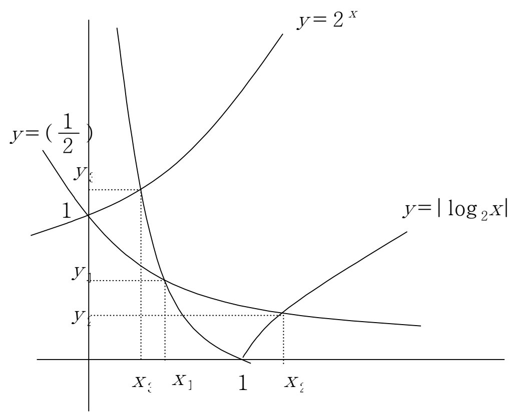
$f(n)=\frac{1}{n(n+1)}$, $g(n)=\frac{2n-1}{n}$ 이므로

$f(13)\times g(7)=\frac{1}{13\times 14}\times\frac{13}{7}=\frac{1}{98}$

답 ⑤

16.

세 점 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, $R(x_3,y_3)$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



또한, $|\log_2 x|=\begin{cases}\log_2 x & (x\geq 1)\\ \log_{\frac{1}{2}} x & (x<1)\end{cases}$ 이다.

ㄱ. 위의 그림에서 $x_1<1$ 이고

$\log_{\frac{1}{2}} x=1$ 에서 $x=\frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{1}{2}<x_1<1$ (참)

ㄴ. 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$와 $y=(\frac{1}{2})^x$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=2^x$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 점 $Q(x_2,y_2)$, $R(x_3,y_3)$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$x_2 = y_3$, $y_2 = x_3$

$\therefore\ x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$ (참)

ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{y_1 - 1}{x_1} > \dfrac{y_2 - 1}{x_2}$

따라서 좌변은 두 점 $(0,1)$, (x_1, y_1)을 지나는 직선의 기울기이고 우변은 두 점 $(0,1)$, (x_2, y_2)을 지나는 직선의 기울기이므로

$\dfrac{y_1 - 1}{x_1} < \dfrac{y_2 - 1}{x_2}$

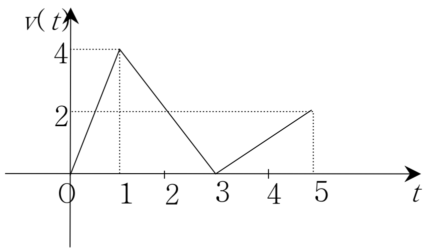
$\therefore\ x_2(x_1 - 1) < y_1(y_2 - 1)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 뿐이다.

답 ③

17.

$v(t)$의 그래프는 다음과 같다.



시각 $t = 0$에서 $t = x$까지 움직인 거리를 $p(x)$,

시각 $t = x$에서 $t = x + 2$까지 움직인 거리를 $q(x)$,

시각 $t = x + 2$에서 $t = 5$까지 움직인 거리를 $r(x)$라 하자.

ㄱ. $p(1) = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$

$q(1) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

$r(1) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$\therefore\ f(1) = 2$ (참)

ㄴ. $p(2) = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 4 + \dfrac{1}{2}(4 + 2) \times 1 = 5$

$q(2) = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 2 + \dfrac{1}{2} \times 1 \times 1 = \dfrac{3}{2}$

$r(2) = \dfrac{1}{2}(1 + 2) \times 1 = \dfrac{3}{2}$

이므로 $f(2) = \dfrac{3}{2}$

$\therefore\ f(2) - f(1) = \dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{1}{2}$

$\int_1^2 v(t)\,dt = \dfrac{1}{2}(4 + 2) \times 1 = 3$

$\therefore\ f(2) - f(1) \neq \int_1^2 v(t)\,dt$ (거짓)

ㄷ. $0 < x < 1$에서

$p(x) = \dfrac{1}{2} \times x \times 4x = 2x^2 < 2$

$q(x) > \dfrac{1}{2}(4 + 2) \times 1 = 3$

$r(x) > \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$\therefore\ f(x) = p(x) = 2x^2$

$1 < x < \dfrac{3}{2}$ 에서

$p(x) > 2$

$q(x) > \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} \times 3 = \dfrac{9}{4}$

$r(x) < \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$\therefore\ f(x) = r(x) = 2 - \dfrac{1}{2}(x - 3)(x - 3)$

$= -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{5}{2}$

따라서, $\lim_{x \to 1-0} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 1+0} f(x) = 0$이므로

$f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
그러므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)
따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

18.

$f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2$

$=(x-1)(3x-9)$

$=3(x-1)(x-3)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1, 3$

$f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가지므로

$f(3)=4\times(-1)+a=10$

$\therefore\ a=14$

답 14

19.

$1+\frac{k}{x-k}\le\frac{1}{x-1}$

$\frac{x}{x-k}-\frac{1}{x-1}\le 0$

$\frac{x^2-2x+k}{(x-1)(x-k)}\le 0$

$(x^2-2x+k)(x-1)(x-k)\le 0,\ x\ne 1, x\ne k$ …㉠

(i) $k=1$일 때,

㉠에서 $(x-1)^4\le 0, x\ne 1$
따라서, 부등식의 해가 없다.

(ii) $k>1$일 때,

$x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1>0$ 이므로
㉠에서 $(x-1)(x-k)\le 0,\ x\ne 1,\ x\ne k$
$\therefore\ 1<x<k$ …㉡

㉡을 만족하는 정수 x가 $2, 3, 4$의 3개이므로
자연수 k의 값은 5이다.

답 5

20.

두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x+10}$의 교점의 x좌표를 구하면
$\sqrt{x}=\sqrt{-x+10}$에서
양변을 제곱하면
$x=-x+10$, $x=5$
따라서, 회전체의 부피 V는

$V=\pi\int_0^5 x\,dx+\pi\int_5^{10}(-x+10)\,dx$

$=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5+\pi\left[-\frac{x^2}{2}+10x\right]_5^{10}$

$=\frac{25}{2}\pi+\pi\left(-50+100+\frac{25}{2}-50\right)$

$=25\pi$

$\therefore\ a=25$

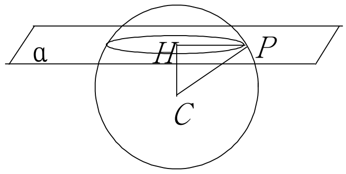
답 25

21.

$\frac{x}{2}=y=z+3=t$에서
점 A의 좌표를 $(2t, t, t-3)$으로 놓으면
점 A는 평면 $x+2y+2z=6$ 위의 점이므로
$2t+2t+2(t-3)=6$, $t=2$
$\therefore\ A(4, 2, -1)$
점 $C(1, -1, 5)$를 중심으로 하고 점 A를 지나는 구의 반지름의 길이는
$\overline{CA}=\sqrt{3^2+3^2+(-6)^2}=\sqrt{54}$ 이므로
구의 방정식은

2011학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=54$



그림에서 $\overline{CP}=\sqrt{54}$

$\overline{CH}=\dfrac{|1-2+10-6|}{\sqrt{1+4+4}}=1$

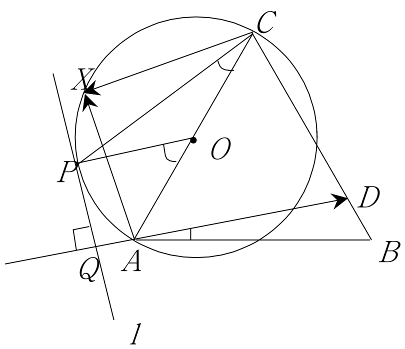
이므로 $\overline{HP}=\sqrt{54-1}=\sqrt{53}$

따라서, 구와 평면 α가 만나서 생기는 원의 넓이는 53π이다.

$\therefore\ k=53$

답 53

22.



$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\ \cdots$ ㉠

세 점 A, C, D는 고정된 점이므로

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다.

따라서, ㉠에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$의 값이 최소가 되어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$

이고, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은 상수이므로

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 최소이어야 한다.

그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선이 원과 접할 때의 접점을 P라 하면

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta\geq|\overrightarrow{AP}|\cos\theta$

$=-|\overrightarrow{AQ}|$

이때, $\angle POA=\angle OAD=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{15}=\dfrac{4}{15}\pi$

이므로

$2\angle ACP=\angle AOP$에서

$\angle ACP=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{15}\pi=\dfrac{2}{15}\pi$

$\therefore\ p+q=15+2=17$

답 17

23.

$n=2$ 일 때 $\{3, 3^3\}$ 이므로

$S=\{3^4\}$ 즉, $f(2)=1$

$n=3$ 일 때 $\{3, 3^3, 3^5\}$ 이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8\}$ 즉, $f(3)=3$

$n=4$ 일 때 $\{3, 3^3, 3^5, 3^7\}$ 이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8, 3^{10}, 3^{12}\}$ 즉, $f(4)=5$

…

$n=k$ 일 때 $\{3, 3^3, \cdots, 3^{2k-1}\}$ 이므로

$S=\{3^4, 3^6, \cdots, 3^{4(k-1)}\}$ 즉, $f(k)=2k-3$

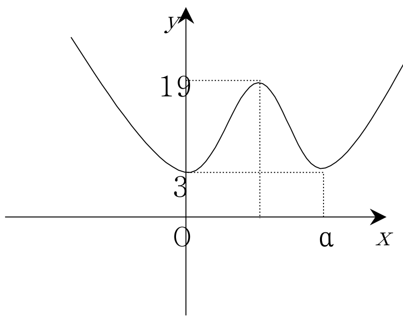
$\therefore\ \sum_{n=2}^{11}f(n)=\sum_{n=2}^{11}(2n-3)$

$=1+3+5+\cdots+19$

$=10^2=100$

답 100

24.



$x\to\pm\infty$ 일 때 $f(x)\to\infty$ 이므로

$|f(x)-t|$ 가 $t=3$ 에서 처음으로 미분불가능한 점이 생기려면 그림과 같이 $x=0$, $x=\alpha$ 에서 극솟값을 갖고, $f(0)=f(\alpha)$ 이어야 한다.

따라서,

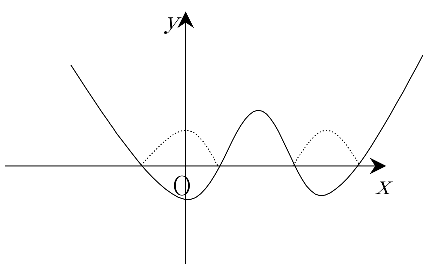
$$f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$$

으로 놓을 수 있다.

$t\le 3$ 일 때 $f(x)-t\ge 0$ 이므로

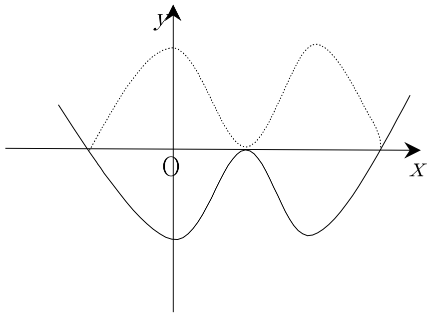
$|f(x)-t|$ 는 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하다.

$\therefore\ g(t)=0$



$3<t<19$ 일 때

$|f(x)-t|$ 는 네 점에서 미분가능하지 않으므로 $g(t)=4$



$t\ge 19$ 일 때

$|f(x)-t|$ 는 두 점에서 미분가능하지 않으므로 $g(t)=2$

따라서, $f(x)$ 의 극댓값이 19이어야 하므로

$$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)$$
$$=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)$$
$$=0$$

에서 $x=0,\ \dfrac{\alpha}{2},\ \alpha$

$\therefore\ f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=19$

$f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^2}{4}\times\dfrac{\alpha^2}{4}+3=19$

$\alpha^4=16\times16$

$\therefore\ \alpha=4$

따라서, $f(x)=x^2(x-4)^2+3$ 이므로

$f(-2)=4\times36+3=147$

답 147

25. $m=2$ 일 때

$f(2)=1+1=2$

$m=4$ 일 때

$f(4)=1+1+3+1=(1+3)+(1+1)=6$

$m=8$ 일 때

$f(8)=1+1+3+1+5+3+7+1$

$=(1+3+5+7)+(1+1+3+1)=22$

$m=16$ 일 때

2011학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$f(16) = (1+3+5+7+\cdots+15)+$
$(1+1+3+1+5+3+7+1) = 86$

$\cdots$

$$f(2^n) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k$$

$$= 2 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$= \frac{4^n+2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}+2}{3} - \frac{4^n+2}{3}}{\frac{4^{n+2}+2}{3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}-4^n}{4^{n+2}+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 4^n}{4^{n+2}+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{16+\frac{2}{4^n}} = \frac{3}{16}$$

$\therefore\ p+q = 19$

답 19

미분과 적분

26.

$$\tan\Theta = \tan\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{\Theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\Theta}{2}}$$

$$= \frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

따라서 $0<\Theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sec\Theta = \sqrt{1+\tan^2\Theta} = \sqrt{9} = 3$$

답 ①

27.

$y^3 = \ln(5-x^2)+xy+4$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3y^2y' = \frac{-2x}{5-x^2}+y+xy'$$

따라서 점 $(2, 2)$에서 y'을 구하면

$$12y' = \frac{-4}{5-2^2}+2+2y',\ 10y' = -2$$

$y' = -\frac{1}{5}$ 이므로 점 $(2, 2)$에서 접선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$ 이다.

답 ⑤

28.

$\int_a^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2}\,dx$ 에서

$\frac{\{f(x)\}^2}{x^2} = g(x)$라고 하면

$$g'(x) = \frac{2f(x)f'(x)\cdot x^2 - 2x\{f(x)\}^2}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{f(2x)}{x^2} - \frac{2\{f(x)\}^2}{x^3}$$

$$xg'(x) = \frac{f(2x)}{x} - 2g(x)$$

$$\int_a^{2a} xg'(x)\,dx = \int_a^{2a} \frac{f(2x)}{x}\,dx - \int_a^{2a} 2g(x)\,dx$$

$$[xg(x)]_a^{2a} - \int_a^{2a} g(x)\,dx = \int_a^{2a} \frac{f(2x)}{x}\,dx - 2\int_a^{2a} g(x)\,dx$$

---- (*)

이 때 $f(a)=0$ 이므로 $g(a)=0$

$f(2a)=g(2a)=0$ 이다.

따라서 (*)를 간단히 하면

$$\int_a^{2a} g(x)\,dx = \int_a^{2a} \frac{f(2x)}{x}\,dx$$

$2x=t$ 라 하면 $x=\frac{t}{2}$, $dx=\frac{1}{2}dt$

$x=a$ 이면 $t=2a$

$x=2a$ 이면 $t=4a$

이므로

$$\int_a^{2a} g(x)\,dx = \int_{2a}^{4a} \frac{f(t)}{t}\,dt = k$$

답 ④

29.

주어진 조건 (가), (나), (다)에 의하여

구간 (0, 1)에서 $f(x)=e^x$임을 알 수 있다.

그런데 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다.

따라서 구간 $1 \le x < 2$ 에서

$f(1)=e, f'(1)=e$이고

(나)조건에 의하여 $f'(x)$는 증가하는 함수이므로 $e=f'(1) \le f'(x)$ 이다.

이 때 $1 \le x < 2$인 구간에서 이 식의 양변을 적분하면

$$\int_1^x e\,dx \le \int_1^x f'(x)\,dx$$

즉 $ex \le f(x)$ 이므로 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^2 ex\,dx \le \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$\int_1^2 ex\,dx = \left[\frac{1}{2}ex^2\right]_1^2 = \frac{3e}{2}$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$\ge \int_0^1 e^x\,dx + \frac{3e}{2} = \frac{5e}{2} - 1$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{5e}{2}-1$ 이다.

답 ③

30.

점 P의 좌표를 $P(\cos\Theta, \sin\Theta)$ 라고 하면

$Q(\ln(\sin\Theta+1), \sin\Theta)$

$R(\ln(\sin\Theta+1), 0)$

이고 이 때 직선 OP의 방정식은

$y=\tan\Theta x$이므로 점 T의 좌표

$T(\ln(\sin\Theta+1), \tan\Theta\ln(\sin\Theta+1))$

이다.

따라서 삼각형 ORT의 넓이 $S(\Theta)$는

$S(\Theta)=\frac{1}{2}\tan\Theta\{\ln(1+\sin\Theta)\}^2$이므로

$$\lim_{\Theta\to+0}\frac{S(\Theta)}{\Theta^3} = \frac{1}{2}\lim_{\Theta\to+0}\frac{\tan\Theta\{\ln(1+\sin\Theta)\}^2}{\Theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\Theta\to+0}\frac{\tan\Theta}{\Theta}\lim_{\Theta\to+0}\frac{\{\ln(1+\sin\Theta)\}^2}{\Theta^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\Theta\to+0}\frac{\tan\Theta}{\Theta}\lim_{\Theta\to+0}\left\{\frac{\ln(1+\sin\Theta)}{\Theta}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\Theta\to+0}\frac{\tan\Theta}{\Theta}\lim_{\Theta\to+0}\left[\ln(1+\sin\Theta)^{\frac{1}{\sin\Theta}\cdot\frac{\sin\Theta}{\Theta}}\right]^2$$

$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}=a$

$\therefore\ 60a=60\times\frac{1}{2}=30$

답 30

확률과 통계

26.

확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{ax+2}{10}\quad(x=-1,0,1,2)$$

이므로 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2-a}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2+a}{10}$	$\frac{2+2a}{10}$	1

따라서

$$\frac{(2-a)+2+(2+a)+(2+2a)}{10}=1$$

이므로 $8+2a=10$, $a=1$

따라서 평균 $E(X)$는

$$E(X)=-1\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{4}{10}=1$$

$$V(X)=(-1)^2\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{4}{10}-1^2=1$$

$\therefore\ V(3X+2)=3^2V(X)=9$

답 ①

27.

남자 탁구선수 4명과 여자 탁구선수 4명에서 2명씩 4개의 조를 만드는 경우의 수는

$${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{4!}=105$$

이 때 남자 1명과 여자 1명으로 이루어진 조가 2개인 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_4C_2\times2\times1=\frac{4\times3}{2}\times\frac{4\times3}{2}\times2=72$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{105}=\frac{24}{35}$

답 ④

28.

이 회사 직원의 하루 생산량을 확률변수 X 라고 하면 X는 정규분포

$N(an+100,\ 12^2)$을 따른다.

이 때 근무 기간이 16개월인 직원의 하루 생산량이 84이하일 확률이 0.0228 이므로

$$P(X\le84)=P\left(Z\le\frac{84-(16a+100)}{12}\right)$$

$$=P\left(Z\le\frac{-4-4a}{3}\right)$$

$$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{4+4a}{3}\right)=0.0228$$

에서 $P\left(0\le Z\le\frac{4+4a}{3}\right)=0.4772$

$\frac{4+4a}{3}=2$, $a=\frac{1}{2}$

따라서 근무 기간이 36개월인 직원의 하루 생산량이 100이상이고 142이하일 확률은

$P(100\le X\le142)$

$$=P\left(\frac{100-(18+100)}{12}\le Z\le\frac{142-(18+100)}{12}\right)$$

$= P(-1.5 \le Z \le 2)$
$= P(0 \le Z \le 1.5) + P(0 \le Z \le 2)$
$= 0.4332 + 0.4772 = 0.9104$

답 ③

29.

자료 A 의 5개의 수를 작은 수부터 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라고 하면

A 의 평균과 중앙값은 모두 25이므로

$a_3 = 25$ 이고

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 25$에서

$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = 5 \times 25 - 25 = 100$

이 때 자료 B 의 7개의 수는

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, x, y$ 이다.

ㄱ. 자료 B 의 평균이 25이므로

$\dfrac{x+y}{2} = 25$ 이다.

따라서 B 의 중앙값은 25이다. (참)

ㄴ. 자료 B 의 평균이 27이상 이면

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + x + y}{7} \ge 27$

$x + y \ge 7 \times 27 - 125 = 64$

따라서 x와 y중 적어도 하나는 32이상이다. (참)

ㄷ. x와 y가 모두 25이면 자료 B 의 7개의 수는 $a_1, a_2, 25, 25, 25, a_4, a_5$ 이므로 자료 B의 평균이 25이다.

따라서 B의 분산은

$$\frac{(a_1-25)^2+(a_2-25)^2+(a_4-25)^2+(a_5-25)^2}{7}$$

이고 자료 A의 분산은

$$\frac{(a_1-25)^2+(a_2-25)^2+(a_4-25)^2+(a_5-25)^2}{5}$$

이다.

따라서 B의 분산이 A의 분산보다 작으므로 B의 표준편차가 A의 표준편차보다 작다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

답 ⑤

30.

$|\hat{p} - p| \le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$에서

$\hat{p} - 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \le p \le \hat{p} + 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$

이므로

$P(\hat{p} - 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} \le p \le \hat{p} + 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})})$

$= P\left(\dfrac{-0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}} \le Z \le \dfrac{0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}} \right)$

$\ge 0.9544 = 2 \times 0.4772$

따라서

$\dfrac{0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}} \ge 2$, $0.16\sqrt{n} \ge 2$

$\sqrt{n} \ge \dfrac{25}{2}$, $n \ge 156.25$

따라서 n의 최솟값은 157이다.

답 157

2011학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

이산수학

26.
자연수 7을 1 또는 2 또는 3으로 분할하는 경우의 수이므로

$$\begin{aligned} 7 &= 2+2+3 \\ &= 1+3+3 \\ &= 1+1+2+3 \\ &= 2+2+2+1 \\ &= 1+1+1+1+3 \\ &= 1+1+2+2+1 \\ &= 1+1+1+1+1+2 \\ &= 1+1+1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

로 모두 8개이다.

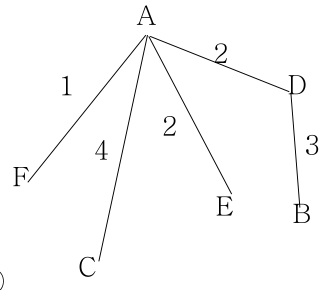
답 ③

27.
v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 의 5개의 점 중 3개가 서로 연결되어 있고 v_6, v_7, v_8 은 3개가 서로 연결되어 있으므로 해밀턴회로가 존재하기 위해서는 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 에 적어도 2개 이상의 변을 추가 해야 한다.
따라서 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 의 5개의 점 중 점을 2개, 2개 택하는 방법의 수가 그래프 H의 개수이므로 구하는 개수는

$${}_5C_2 \times ({}_5C_2 - 1) \times \frac{1}{2} = 45$$

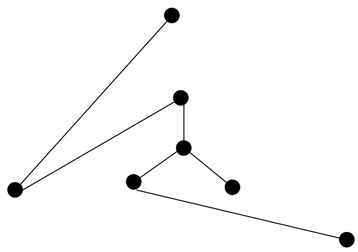
답 ④

28.
연결하는 비용이 적게 들어가는 지점이 A 이므로 6개의 사무실을 다음과 같이 연결하면 전산망을 구축하는데 필요한 비용이 최소가 된다.
따라서 최소 비용은
$1+4+2+2+3=12$ 즉 1200만원이다.



답 ②

29.
ㄱ. 그래프 G의 생성수형도를 다음과 같이 생각할 수 있으므로 생성수형도의 변의 개수는 6이다. (참)



ㄴ. 그래프 G는 변이 꼭짓점에서만 만나게 그릴 수 있으므로 평면그래프이다. (거짓)
ㄷ. 그래프 G의 꼭짓점을 적절하게 색칠하기 위해 필요한 색의 수는 4이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ 이다.

답 ①

30.
$a_1 = 1$, $a_2 = 1$ 이고
3자리 문자열 중 조건을 만족하는 문자열은

aaa, aba, aca이므로 $a_3 = 3$ 이므로

$a_3 = a_2 + pa_1 = 1 + p = 3 \quad \therefore\ p = 2$

따라서 $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ 이고

$a_7 = a_6 + 2a_5 = \cdots = 21a_2 + 22a_1 = 43 = q$

$\therefore\ p + q = 2 + 43 = 45$

답 45