

(홀수형)

2010학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

$$27^{\frac{1}{3}} + \log_2 4 = (3^3)^{\frac{1}{3}} + 2\log_2 2$$

$$= 3 + 2 = 5$$

답 ⑤

2.

$A=3E$ 이므로

$$AB+2B=3EB+2B=5B=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 구하려는 행렬의 모든 성분의 합은 $5 \times 2 = 10$

답 ①

3.

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a} - b) = \sqrt{3+a} - b = 0$$

$$\text{즉, } b = \sqrt{3+a}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{3+a}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3+a}} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3+a} = 2, \quad 3+a = 4$$

따라서 $a=1$ 이므로 $b=2$

$$\therefore a+b=3$$

답 ①

4.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by=2(x+a)$$

이므로 점 Q 의 좌표는 $(-a, 0)$ 이다.

또한, $b^2=4a$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{4a^2 + b^2} = \sqrt{4a^2 + 4a} = 4\sqrt{5}$$

$$4a^2 + 4a = 80, \quad a^2 + a - 20 = 0$$

$$(a+5)(a-4) = 0$$

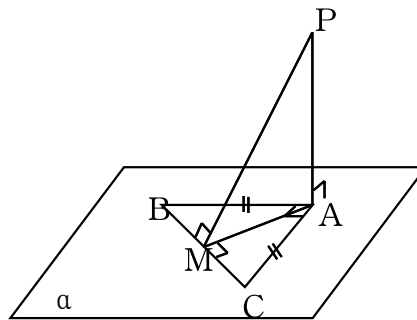
$$\therefore a=4 \quad (\because a > 0)$$

따라서 $b^2=16$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 32$$

답 ②

5.



점 P 에서 직선 BC 에 내린 수선의 발을 M 이라 하면 삼수선의 정리에 의해

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}$$

$\angle A = 90^\circ$ 이므로 점 M 은 선분 BC 의 중점이다.

$$\overline{BC} = 6 \text{이므로}$$

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} = 3$$

$\overline{PA} = 4$ 이므로 삼각형 PAM 에서

$$\overline{PM} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AM}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

답 ②

6.

처리해야 할 6가지의 업무를 A, B, C, D, E, F 라 하면 C, D, E, F 4가지 업무 중 2가지 업무를 택하는 방법의 가지 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6(\text{가지})$$

이때, 업무 C, D가 택해졌다고 가정할 때

A, B, C, D 4가지 업무의 처리 순서를 정하는 방법의 가지 수는

$$4! = 24(\text{가지})$$

이 중 업무 A가 업무 B보다 먼저 처리되는 방법의 가지 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12(\text{가지})$$

따라서 구하려는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$$6 \times 12 = 72(\text{가지})$$

답 ③

7.

‘여행’이라는 단어를 포함하는 사건을 A 광고일 사건을 B라고 하자.

‘여행’이라는 단어를 포함하고, 광고일 확률	‘여행’이라는 단어를 포함하지 않고, 광고일 확률
$P(A \cap B)$ $= 0.1 \times 0.5 = 0.05$	$P(A^c \cap B)$ $= 0.9 \times 0.2 = 0.18$

$$\begin{aligned} \therefore P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= 0.1 \times 0.5 + 0.9 \times 0.2 = 0.23 \end{aligned}$$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1 \times 0.5}{0.23} = \frac{5}{23}$$

답 ①

8.

(i) $a \neq 0$ 인 경우

방정식 $ax^2 + 2(a-2)x - (a-2) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 판별식 D 가 양수이어야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a-2)^2 + a(a-2) = 2a^2 - 6a + 4 \\ &= 2(a^2 - 3a + 2) = 2(a-1)(a-2) > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < 1 \text{ 또는 } a > 2$$

또한, 중근(한 개의 실근)을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = 2(a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

또한, 실근을 갖지 않을 조건은

$$\frac{D}{4} = 2(a-1)(a-2) < 0$$

$$\therefore 1 < a < 2$$

(ii) $a = 0$ 인 경우

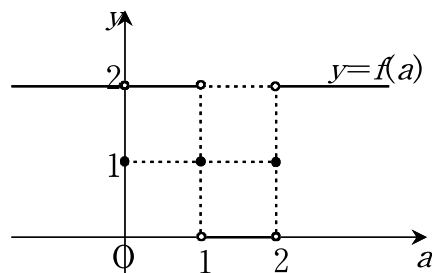
$$-4x + 2 = 0 \text{ 이므로 실수 } x \text{ 는 } x = \frac{1}{2} \text{ 인 한 개}$$

다.

(i), (ii)에 의하여

$$f(a) = \begin{cases} 2 & (a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < 1, a > 2) \\ 1 & (a = 0, 1, 2) \\ 0 & (1 < a < 2) \end{cases}$$

이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



ㄱ.

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = 2, \quad f(0) = 1 \text{ 이므로 } \lim_{a \rightarrow 0} f(a) \neq f(0)$$

(거짓)

$$\text{ㄴ. } \lim_{a \rightarrow c+0} f(a) \neq \lim_{a \rightarrow c-0} f(a) \text{ 인 } c \text{ 는 } c = 1, c = 2 \text{ 이}$$

(홀수형)

2010학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

다. (참)

ㄷ. $a=0, 1, 2$ 에서 함수 $f(a)$ 가 불연속이다.

(참)

답 ④

9.

확률변수 X 를 그 공장에서 생산되는 병의 내압강도라 놓으면 X 는 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

$$G=0.8\text{이면 } 0.8 = \frac{m-40}{3\sigma} \text{ 이므로}$$

$$m=40+2.4\sigma \text{ 이다.}$$

임의로 추출된 한 개의 병이 불량품일 확률은 $P(X < 40)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(X < 40) &= P\left(Z < \frac{40 - (40 + 2.4\sigma)}{\sigma}\right) \\ &= P(Z < -2.4) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.4) \\ &= 0.5 - 0.4918 = 0.0082 \end{aligned}$$

답 ③

10.

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{0.01t^{1.25}w^{0.25}}{0.05t^{0.75}w^{0.30}} = \frac{t^{0.5}}{5w^{0.05}}$$

이므로 이 식에 $t=20, w=8$ 을 대입하면

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{20^{0.5}}{5 \times 8^{0.05}} = \frac{(4 \times 5)^{0.5}}{5 \times 2^{0.15}} = 2^{0.85} \times 5^{-0.5}$$

$$\therefore a=0.85, b=-0.5$$

따라서 $a+b=0.35$ 이다.

답 ②

11.

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} \text{ 에서}$$

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x) + g(x)}{f(x)g(x)}$$

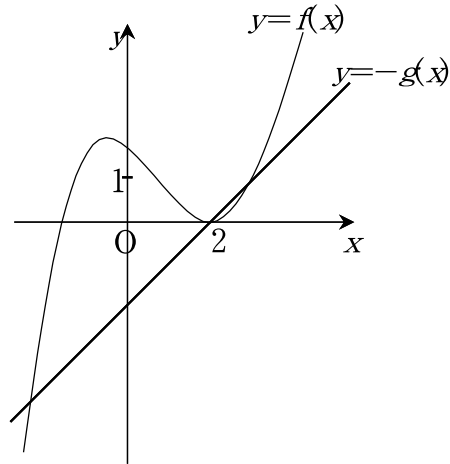
$$\{f(x) + g(x)\} \left\{1 - \frac{1}{f(x)g(x)}\right\} = 0$$

따라서 $f(x) = -g(x)$ 또는 $f(x)g(x) = 1$

(단, $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$)

(i) $f(x) = -g(x)$ 인 경우

$y = -g(x)$ 의 그래프는 [그림1]과 같고 $y = f(x)$ 의 그래프와 세 점에서 만난다. 이때, $f(2) = g(2) = 0$ 이므로 $x=2$ 는 주어진 방정식의 무연근이다. 따라서 이 경우의 실근의 개수는 2개이다.



[그림1]

(ii) $f(x)g(x) = 1$ 인 경우 (즉, $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ 인 경우)

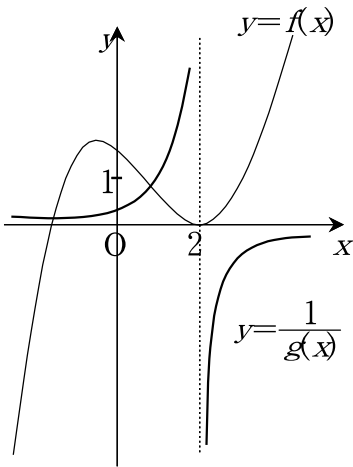
함수 $g(x)$ 의 기울기를 m ($m < 0$)이라 하면

$g(x) = m(x-2)$ 이고 y 절편은 $-2m$ 이며 주어진 그래프에서 $-2m > 1$ 이다.

따라서 $y = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m(x-2)}$ 이고 y 절편은

$$-\frac{1}{2m} \text{이며 } 0 < -\frac{1}{2m} < 1 \text{ 이다.}$$

그러므로 $y = \frac{1}{g(x)}$ 의 그래프는 [그림2]와 같다. 따라서 이 경우의 실근의 개수는 2개이다.



[그림2]

따라서 (i), (ii)에 의해 주어진 방정식의 실근의 개수는 4이다.

답 ④

12.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{m+1}{m+5} \frac{C_k}{C_k} &= \frac{m+1}{m+5} \frac{C_0}{C_0} + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{m+1}{m+5} \frac{C_k}{C_k} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^m \frac{m+1}{m+5} \frac{C_{k+1}}{C_{k+1}} \end{aligned}$$

따라서 (가)에 들어갈 수는 1이다.

$$\begin{aligned} {}_{l+1}C_{k+1} &= \frac{(l+1)!}{(k+1)! \times (l-k)!} \\ &= \frac{l+1}{k+1} \times \frac{l!}{k! \times (l-k)!} \\ &= \frac{l+1}{k+1} \times {}_lC_k \end{aligned}$$

따라서 (나)에 들어갈 식은 $\frac{l+1}{k+1}$ 이다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} \frac{m+1}{m+5} \frac{C_k}{C_k} &= 1 + \sum_{k=0}^m \frac{m+1}{m+5} \frac{C_{k+1}}{C_{k+1}} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^m \frac{m+1}{m+5} \times \frac{m}{-k+1} \times \frac{C_k}{C_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{m+1}{m+5} \times \sum_{k=0}^m \frac{m}{m+4} \frac{C_k}{C_k} \\ &= 1 + \frac{m+1}{m+5} \times \frac{m+5}{5} = \frac{m+6}{5} \end{aligned}$$

따라서 (다)에 들어갈 식은 $\frac{m+1}{m+5}$ 이다.

답 ②

13.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로 } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

$$(BA)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$BABA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

이 등식의 왼쪽에 B^{-1} 을 곱하면

$$B^{-1}BABA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$ABA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

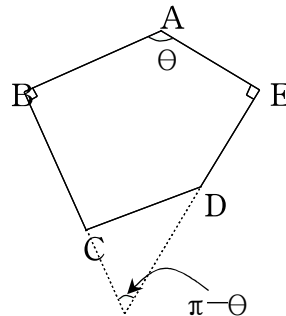
$$\therefore (AB)^2 = (ABA)B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

답 ③

14.

ㄱ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM}$ 이므로 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ 와 \overrightarrow{AM} 은 평행하다. (참)

ㄴ. (참)



$\angle B = \angle E = 90^\circ$ 이므로 \overrightarrow{AB} 와 \overrightarrow{AE} 가 이루는

(홀수형)

2010학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

각을 θ 라 하면 \vec{BC} 와 \vec{ED} 가 이루는 각은 $\pi - \theta$ 이다.

따라서

$$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = |\vec{AB}| |\vec{AE}| \cos \theta$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{ED} = |\vec{BC}| |\vec{ED}| \cos(\pi - \theta) = -|\vec{BC}| |\vec{ED}| \cos \theta$$

이때, $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$, $|\vec{AE}| = |\vec{ED}|$ 이므로

$$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = -\vec{BC} \cdot \vec{ED} \quad (\text{참})$$

$$\square. |\vec{BC} + \vec{ED}|^2 = |\vec{BC}|^2 + 2\vec{BC} \cdot \vec{ED} + |\vec{ED}|^2$$

$$|\vec{BE}|^2 = |\vec{AE} - \vec{AB}|^2 = |\vec{AE}|^2 - 2\vec{AE} \cdot \vec{AB} + |\vec{AB}|^2$$

이때, $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$, $|\vec{AE}| = |\vec{ED}|$ 이고 'ㄴ'에 의해

$$\vec{AB} \cdot \vec{AE} = -\vec{BC} \cdot \vec{ED} \text{이 성립하므로}$$

$$|\vec{BC} + \vec{ED}|^2 = |\vec{BE}|^2$$

따라서 $|\vec{BC} + \vec{ED}| = |\vec{BE}|$ 이 성립한다. (참)

답 ⑤

15.

원 O_2 의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$|\vec{A_1C_2}| + |\vec{A_2C_1}| - |\vec{A_2C_2}| = |\vec{A_1C_1}|$$

이므로

$$3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2r = 6$$

$$\therefore r = 3\sqrt{2} - 3$$

따라서 반복되어지는 도형의 뚫음비는

$$3 : (3\sqrt{2} - 3) = 1 : (\sqrt{2} - 1)$$

이므로 넓이의 비는

$$1 : (\sqrt{2} - 1)^2 = 1 : (3 - 2\sqrt{2})$$

그러므로 수열 $\{S_n + T_n\}$ 은 공비가 $3 - 2\sqrt{2}$ 인 등비수열이다. 이 때 첫째항 $S_1 + T_1$ 의 값은

$$\pi \cdot 3^2 - 2 \times \left\{ \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot (3\sqrt{2})^2 \right\}$$

$$= 18$$

이므로

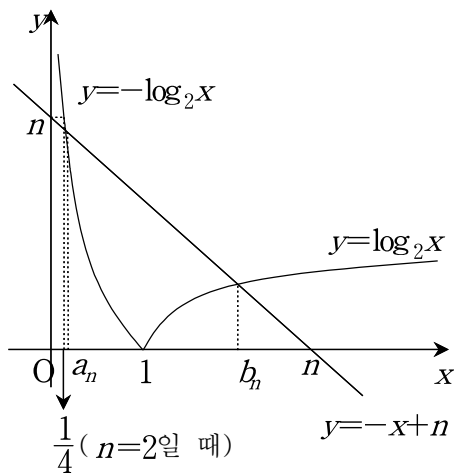
$$\sum_{n=1}^{\infty} (S_n + T_n) = \frac{18}{1 - (3 - 2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{18}{2\sqrt{2} - 2}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{2} - 1} = 9(\sqrt{2} + 1)$$

답 ④

16.



ㄱ. $2 = -\log_2 x$ 을 만족하는 x 의 값은 $\frac{1}{4}$ 이므로

로 $a_2 > \frac{1}{4}$ 이다. (거짓)

ㄴ. 모든 자연수 n 에 대하여 $0 < a_{n+1} < a_n$ 이

므로 $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ 이다. (참)

ㄷ. $b_n < n$ 이므로 $\frac{b_n}{n} < 1$ 이다.

또, $\log_2 b_n = -b_n + n$ 이므로

$$0 = b_n - n + \log_2 b_n < b_n - n + \log_2 n$$

따라서 $n - \log_2 n < b_n$

양변을 n 으로 나누면

$$1 - \frac{\log_2 n}{n} < \frac{b_n}{n}$$

따라서 $1 - \frac{\log_2 n}{n} < \frac{b_n}{n} < 1$ 이 성립한다. (참)

답 ④

17.

ㄱ. 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 주기가 2인 주기 함수 $g(x)$ 가 실수전체의 집합에서 미분가능 하기 위한 필요충분조건은

$$f(1)=f(-1), f'(1)=f'(-1) \text{ (참)}$$

ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 라 하면

$$f(1)=1+a+b+c+d$$

$$f(-1)=1-a+b-c+d$$

$$f(1)=f(-1)\text{이므로 } a+c=0,$$

$$\therefore c=-a$$

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c\text{이고}$$

$$f'(1)=4+3a+2b+c$$

$$f'(-1)=-4+3a-2b+c$$

$$f'(1)=f'(-1)\text{이므로 } 4+2b=0$$

$$\therefore b=-2$$

즉, $f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$ 이고

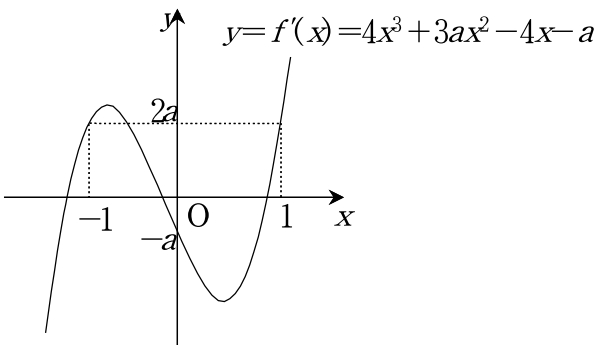
$$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a\text{이다.}$$

$$f'(0)=-a, f'(1)=4+3a-4-a=2a\text{이므로}$$

$$f'(0)f'(1)=-2a^2\leq 0 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. $f'(-1)=f'(1)=2a$ 이고 $f'(1)>0$ 이므로 $a>0$

$f'(0)=-a<0$ 이므로 $y=f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구간 $(-\infty, -1)$ 에 $f'(c)=0$ 인 c 가 존재한다. (참)

답 ③

18.

$$f'(x)=2x(x^2+x-2)+(x^2+1)(2x+1)\text{이므로}$$

$$f'(2)=4\cdot 4+5\cdot 5=16+25=41$$

답 41

19.

$$x^2-7x=t\text{라 하면}$$

$$\sqrt{t+15}=t+9$$

양변을 제곱하면

$$t+15=t^2+18t+81$$

$$t^2+17t+66=0, (t+11)(t+6)=0$$

$$\therefore t=-6 \text{ 또는 } t=-11$$

이때, $t=-11$ 은 무리방정식의 무연근이므로

$$x^2-7x=-6$$

즉, $x^2-7x+6=0, (x-1)(x-6)=0$ 에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 6이다.

답 6

다른 풀이

$\sqrt{x^2-7x+15}=t (t\geq 0)$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t=t^2-6, t^2-t-6=(t-3)(t+2)=0$$

$$\therefore t=3$$

이때, $\sqrt{x^2-7x+15}=3$ 이므로

$$x^2-7x+15=9, x^2-7x+6=(x-1)(x-6)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 구하는 방정식의 모든 실근의 곱은 6이다.

(홀수형)

2010학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

20.

주어진 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(2, 3, 1)$ 이 구하고자 하는 평면의 법선벡터이고 점 $(1, -5, 2)$ 을 지나므로 평면의 방정식은

$$2(x-1)+3(y+5)+(z-2)=0$$

따라서 $2x+3y+z+11=0$ 이므로

$$a=3, b=1, c=11$$

$$\therefore a+b+c=3+1+11=15$$

답 15

21.

$$A_1=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right), A_n=\frac{1}{n}f(1)\text{이므로}$$

$$A_1+A_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f(1)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\{1+an+(1+a+2b)n^2\}$$

$$=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

따라서 $a=0$ 이고 $1+a+2b=7$ 즉, $b=3$ 이다.

$$\therefore f(x)=x^2+3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{8k}{n} A_k = 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \times \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= 8 \int_0^1 xf(x) dx$$

$$= 8 \int_0^1 x(x^2+3) dx$$

$$= 8\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = 2+12=14$$

답 14

22.

$$A_n(x_n, 0)\text{이므로}$$

$$P_n\left(x_n, \frac{1}{x_n}\right), Q_n\left(\frac{1}{x_n}, x_n\right),$$

$$R_n\left(\frac{1}{x_n}, 0\right), A_{n+1}\left(\frac{1}{x_n}+1, 0\right)$$

이다.

$$\text{따라서 } x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+1, x_1=2\text{이므로}$$

$$x_2=\frac{1}{x_1}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$x_3=\frac{1}{x_2}+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

$$x_4=\frac{1}{x_3}+1=\frac{3}{5}+1=\frac{8}{5}$$

$$x_5=\frac{1}{x_4}+1=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8}$$

$$\therefore p+q=8+13=21$$

답 21

23.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 공비를 r 라 하면

$$a_2=ar=\frac{1}{2} \dots\dots\text{㉠}$$

$$a_5=ar^4=\frac{1}{6} \dots\dots\text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } r^3=\frac{1}{3}$$

㉠의 양변을 세제곱하면

$$(ar)^3=\frac{1}{8}$$

$$\text{따라서 } a^3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \text{ 이므로}$$

$$a^3 = \frac{3}{8}$$

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} = ar^{n-1} ar^n ar^{n+1} = a^3 r^{3n} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

따라서 수열 $\{a_n a_{n+1} a_{n+2}\}$ 은 첫째항이

$\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$ 이고 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{16}$$

$$\therefore p+q=16+3=19$$

답 19

다른 풀이

공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}$$

이므로 수열 $\{a_n a_{n+1} a_{n+2}\}$ 즉, $\{(a_{n+1})^3\}$ 은 첫째항이 a_2^3 , 공비가 r^3 인 등비수열이다.

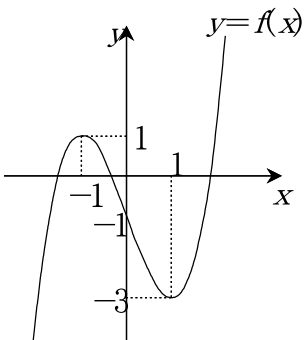
$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2} &= \frac{a_2^3}{1-r^3} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

24.

$$f(x) = x^3 - 3x - 1 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 3$$

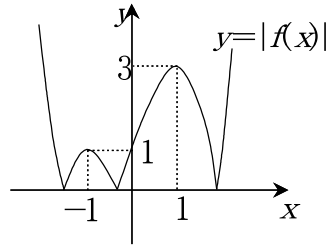
따라서 $f'(x) = 0$ 이 되는 x 의 값은 ± 1 이다.

이때, $f(1) = -3$, $f(-1) = 1$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



[그림1]

따라서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

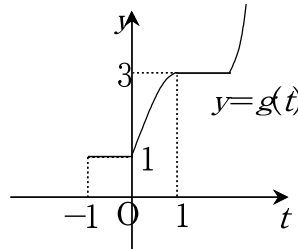


[그림2]

따라서 $-1 \leq x \leq t$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값 $g(t)$ 는 구간 $[-1, 1]$ 에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq t \leq 0) \\ -t^3 + 3t + 1 & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = g(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



[그림3]

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 g(t) dt &= \int_{-1}^0 g(t) dt + \int_0^1 (-t^3 + 3t + 1) dt \\ &= \int_{-1}^0 1 dt + \int_0^1 (-t^3 + 3t + 1) dt \\ &= [t]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + t \right]_0^1 \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore p+q=4+13=17$$

답 17

25.

x 축을 포함하는 평면 α 가 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 와 만나서 생기는 단면은 반지름의 길이가 1인 원이고 이 원을 xy 평면 위로 정사영한 도형은 타원이며 이 타원의 장축의 길이는 구

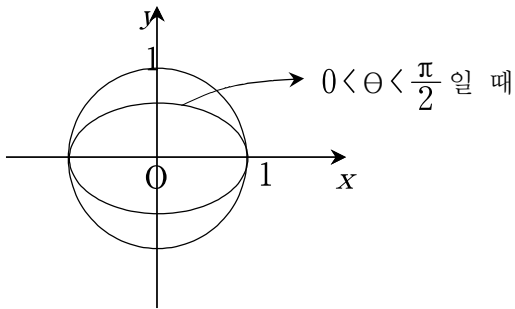
(홀수형)

2010학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

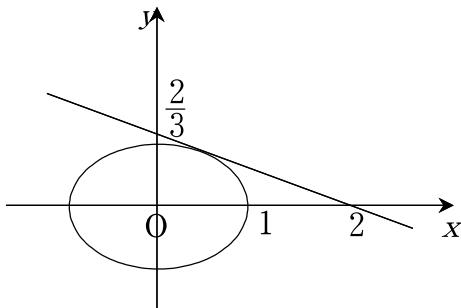
의 지름의 길이와 같고, 단축의 길이는 $2\cos\theta$ 이다.

따라서 정사영한 도형의 방정식은

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\theta} = 1$$



이 타원이 영역 $\{(x, y, 0) | x+3y-2 \leq 0\}$ 에 포함되게 하려면 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 θ 중 가장 작은 θ 가 존재하고, 이 때 $\cos\theta$ 는 최댓값을 갖게 된다.



$\cos\theta$ 의 값이 최대가 될 때는 타원

$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\theta} = 1$ 과 직선 $x+3y-2=0$ 이 그림과

같이 접하는 경우이다. 즉, 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인

타원의 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x \pm \sqrt{1^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta}$$

이고 이 접선의 y 절편이 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$\sqrt{\frac{1}{9} + \cos^2\theta} = \frac{2}{3}$$

따라서 $\cos^2\theta = \frac{1}{3} = M^2$ 이므로

$$60M^2 = 60 \times \frac{1}{3} = 20$$

답 20

미분과 적분

26.

$\tan\theta = -\sqrt{2}$ 이고 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

또한,

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{-2\sqrt{2}}{1-2} = 2\sqrt{2}$$

이므로

$$\sin\theta \tan 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

27.

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1, e)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-e=e(x-1) \text{ 즉, } y=ex \text{이다.}$$

이 직선이 $y=2\sqrt{x-k}$ 와 접하므로

$$ex=2\sqrt{x-k}, \quad e^2x^2=4(x-k)$$

$$e^2x^2-4x+4k=0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

에서 $\textcircled{1}$ 이 중근을 갖는다.

$$\frac{D}{4} = 4 - e^2 \cdot 4k = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{e^2}$$

답 ②

28.

$\angle PAO = \theta$ 이므로 $\angle POQ = 2\theta$ 이다.

$\triangle POQ$ 에서

$$\tan 2\theta = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\overline{OQ}} \text{에서 } \overline{OQ} = \frac{1}{\cos 2\theta}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\overline{PQ} - \overline{OQ}}{\theta - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\tan 2\theta - \frac{1}{\cos 2\theta}}{\theta - \frac{\pi}{4}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\sin 2\theta - 1}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\theta} \end{aligned}$$

$\theta - \frac{\pi}{4} = t$ 라 하면

$$\sin 2\theta = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right) = \cos 2t$$

$$\cos 2\theta = \cos 2\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right) = -\sin 2t$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-0} \frac{\overline{PQ} - \overline{OQ}}{\theta - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{-t \sin 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2t - 1}{-t \sin 2t (\cos 2t + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 2t}{-t \sin 2t (\cos 2t + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t \times \frac{1}{2} \times (\cos 2t + 1)} = 1 \end{aligned}$$

답 ④

29.

$$\neg. \int_0^1 \{f'(x)g(1-x) - g'(x)f(1-x)\} dx = k$$

에서 $1-x=t$ 라 하면

$$\int_1^0 \{f'(1-t)g(t) - g'(1-t)f(t)\} (-1) dt = k$$

$$\text{즉, } \int_0^1 \{f'(1-x)g(x) - g'(1-x)f(x)\} dx = k$$

(홀수형)

2010학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$$\therefore \int_0^1 \{f(x)g'(1-x) - g(x)f'(1-x)\} dx = -k$$

(참)

$$\sqsubset. \{f(x)g(1-x)\}'$$

$$= f'(x)g(1-x) - f(x)g'(1-x)$$

이므로 양변에 정적분을 취하면

$$[f(x)g(1-x)]_0^1$$

$$= \int_0^1 f'(x)g(1-x) dx - \int_0^1 f(x)g'(1-x) dx$$

.....㉠

이 때, $\int_0^1 f(x)g'(1-x) dx$ 에서 $1-x=t$ 라 하면

$$\int_0^1 f(x)g'(1-x) dx = \int_1^0 f(1-t)g'(t)(-1) dt$$

$$= \int_0^1 g'(x)f(1-x) dx$$

이므로 ㉠의 식은

$$[f(x)g(1-x)]_0^1$$

$$= \int_0^1 f'(x)g(1-x) dx - \int_0^1 g'(x)f(1-x) dx$$

$$= \int_0^1 \{f'(x)g(1-x) - g'(x)f(1-x)\} dx = k$$

$$\therefore k = [f(x)g(1-x)]_0^1 = f(1)g(0) - f(0)g(1)$$

따라서 $f(0) = f(1), g(0) = g(1)$ 이면

$$k = f(1)g(0) - f(0)g(1) = 0 \quad (\text{참})$$

㉡. $f(x) = \ln(1+x^4), g(x) = \sin \pi x$ 이면

$$f(0) = \ln 1 = 0, g(0) = \sin 0 = 0 \text{ 이므로}$$

$$k = f(1)g(0) - f(0)g(1) = 0 \quad (\text{참})$$

답 ⑤

30.

점 P가 $t=0$ 에서 $t=2\pi$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4(-\sin t + \cos t)^2 + (-2\sin 2t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16(1 - \sin 2t) + 4\sin^2 2t} dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1 - \sin 2t) + \sin^2 2t} dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - \sin 2t)^2} dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} |2 - \sin 2t| dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} (2 - \sin 2t) dt$$

$$= 2 \left[2t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{2\pi} = 2 \times 4\pi = 8\pi$$

$a=8$ 이므로 $a^2=64$ 이다.

답 64

확률과 통계

26.

x 를 제외한 8개의 자료를 크기순으로 나열하면 다음과 같다.

2, 7, 8, 10, 17, 20, 25, 28

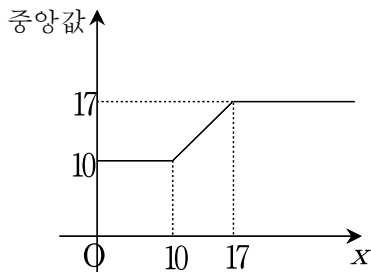
따라서

$x \leq 10$ 이면 중앙값은 10

$10 \leq x \leq 17$ 이면 중앙값은 x

$x \geq 17$ 이면 중앙값은 17

그러므로 중앙값을 나타내는 함수의 그래프는 다음과 같다.



답 ③

27.

한 모둠에서 2명을 택할 때 2명 모두 남학생

일 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$ 이므로

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{3}{10}\right)$ 을 따른다.

따라서 X 의 평균 $E(X)$ 는

$$E(X) = 10 \times \frac{3}{10} = 3$$

답 ④

28.

A, B, C 세 코스에서 받은 쿠폰의 수를 순서쌍으로 나타내면

(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)

각 경우의 확률은 각각

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}, \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}$$

이므로 구하려는 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}}{\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}\right)} \\ &= \frac{8}{\frac{1}{9} + \frac{8}{27} + \frac{2}{27}} = \frac{8}{23} \end{aligned}$$

답 ②

29.

확률변수 X 를 동물 A이 이 부위의 길이라

하면 X 는 $N\left(10, \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$ 을 따르고,

확률변수 Y 를 동물 B이 이 부위의 길이라

하면 Y 는 $N\left(12, \left(\frac{3}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

동물 A의 화석을 동물 A의 화석으로 판단할 확률은

$$P(X < d) = P\left(Z < \frac{d-10}{\frac{2}{5}}\right)$$

이고 동물 B의 화석을 동물 B의 화석으로 판단할 확률은

$$P(Y \geq d) = P\left(Z \geq \frac{d-12}{\frac{3}{5}}\right)$$

이다. 따라서 두 확률이 같으려면

$$\frac{d-10}{\frac{2}{5}} = -\frac{d-12}{\frac{3}{5}}$$

$$3d-30 = -2d+24 \quad \text{즉, } 5d=54$$

$$\therefore d = \frac{54}{5} = 10.8$$

(홀수형)

2010학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

답 ⑤

30.

도시 A에서 고속버스를 택한 비율은

$$\hat{p} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

따라서 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\frac{1}{5} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}{100}}, \frac{1}{5} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}{100}} \right]$$

$$\therefore \frac{b-a}{2} = 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}{100}} = 1.96 \times \frac{2}{50} = \frac{1.96}{25}$$

따라서 신뢰도 95%인 신뢰구간의 최대 허용

표본 오차는 $1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}$ 이므로

$$1.96\sqrt{\frac{1}{4n}} \leq \frac{1.96}{25} \quad \text{즉, } 4n \geq 25^2 = 625$$

$$n \geq \frac{625}{4} = 156.25$$

이므로 자연수 n 의 최솟값은 157이다.

답 157

이산수학

26.

$$a_3 = 2a_2 + a_1 = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

$$a_4 = 2a_3 + a_2 = 2 \cdot 12 + 5 = 29$$

$$a_5 = 2a_4 + a_3 = 2 \cdot 29 + 12 = 70$$

답 ①

27.

같은 종류의 사탕 5개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주는 방법의 가지수는

$x+y+z=2$ (x, y, z 는 음이 아닌 정수)의 해의 개수와 같으므로

$${}_{3+2-1}C_2 = 6(\text{가지})$$

이를 순서쌍으로 나타내면

(1, 1, 3), (1, 3, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1)이다.

각 경우에서 1개의 사탕을 받은 아이에게만 초콜릿 5개를 1개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는 (1, 1, 3)의 경우 $a+b=3$ (a, b 는 음이 아닌 정수)의 해의 개수와 같으므로

$${}_{2+3-1}C_3 = 4(\text{가지})$$

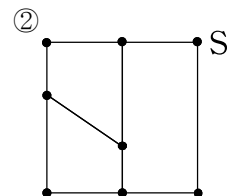
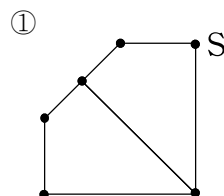
(1, 2, 2)의 경우는 1(가지)이므로

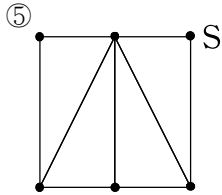
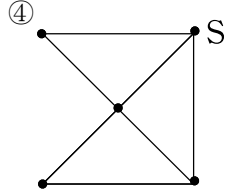
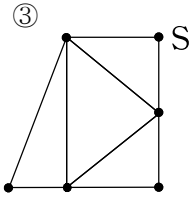
따라서 구하려는 가지수는

$$4+4+1+1+1+4=15(\text{가지})$$

답 ⑤

28.



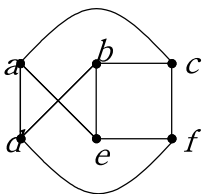


각 통로를 변으로 하고 각 통로가 만나는 점을 꼭짓점으로 하는 그래프를 그리면 위와 같다.

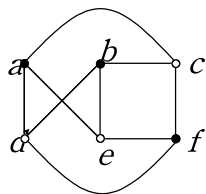
한붓그리기가 가능한 그래프는 ①, ③, ④이고 S에서 시작하여 한 번 지나간 통로는 다시 가지 않고 모든 통로를 지나서 다시 S로 돌아 올 수 있는 그래프는 S에서 시작하는 오일러 회로가 존재하는 그래프이다. 따라서 모든 꼭짓점의 차수가 짝수인 그래프를 찾으면 되므로 ③이다.

답 ③

29.



[그림1]



[그림2]

ㄱ. [그림1]에서 회로 $aefca$ 내부에 꼭짓점 b 가, 외부에 꼭짓점 d 가 있으므로 두 꼭짓점 b, d 의 위치를 바꾸거나 변 bd 를 구부리거나 늘리거나 줄여서 변이 꼭짓점에서만 만나게 평면 위에 다시 그릴 수 없으므로 평면그래프가 아니다. (거짓)

ㄴ. [그림1]에서 회로 $aefcbda$ 는 모든 꼭짓점

을 오직 한 번씩만 지나며 시작점으로 돌아오는 회로이므로 해밀턴회로이다. (참)

ㄷ. [그림2]는 주어진 그래프를 적절하게 색칠한 것이고 2가지 색이면 충분하다. (참)

답 ⑤

30.

품목	설치용량 (MB)	가치 (점)	설치용량당 가치	가치의 순위
A	40	3	$\frac{3}{40} = \frac{12}{160}$	7
B	25	4	$\frac{4}{25} = \frac{12}{75}$	3
C	25	2	$\frac{2}{25} = \frac{12}{150}$	6
D	24	3	$\frac{3}{24} = \frac{12}{96}$	4
E	20	2	$\frac{2}{20} = \frac{12}{120}$	5
F	15	3	$\frac{3}{15} = \frac{12}{60}$	2
G	5	4	$\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$	1

표에서 설치용량당 가치가 높은 것부터 차례로 설치하여 누적 가치가 15점 이상 되려면 최소한

$$5 + 15 + 25 + 24 + 20 = 89 \text{ (MB)}$$

의 용량이 필요하다.

답 89