(홀수형)

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$$9^{\frac{3}{2}}\times 27^{-\frac{2}{3}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}\times(3^3)^{-\frac{2}{3}}$$
$$=3^3\times 3^{-2}$$
$$=3^{3-2}$$
$$=3$$

답 ④

2.

$A+B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$ 이므로

$$(A+B)A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\5&3\end{pmatrix}$$

따라서, 행렬 $(A+B)A$의 모든 성분의 합은

$1+0+5+3=9$

답 ①

3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{(n^2+2n)-(n^2+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1})}{2n-1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{2-\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{2(1+1)}{2}$$
$$=2$$

답 ②

4.

$f(x)=x^2-4x+31$ 로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+27$ 에서

$f(x)$의 최솟값이 27이므로

$y=3+\log_3(x^2-4x+3)$ 의 최솟값은

$3+\log_3 27=3+3=6$

답 ③

5.

$a=r$, $b=r^2$, $c=r^3$이므로

$\log_8 c=\log_{2^3} r^3=\log_2 r$

$\log_a b=\log_r r^2=2$

따라서, $\log_8 c=\log_a b$에서

$\log_2 r=2$

$\therefore\ r=2^2=4$

답 ⑤

6.

$$b^a=(2\sqrt{2})^{\log_2 10}=10^{\log_2 2\sqrt{2}}$$
$$=10^{\frac{3}{2}}$$

$\therefore\ a\log b=\log b^a$

$$=\log 10^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ②

7.

$f(x)=a^{bx-1}$의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(2)=g(2)$

가 성립한다.

따라서, $a^{2b-1}=a^{1-2b}$에서

$2b-1=1-2b,\ 4b=2$

$\therefore\ b=\frac{1}{2}$

$f(4)=g(0),\ g(4)=f(0)$이므로

$f(4)+g(4)=g(0)+f(0)=\frac{5}{2}$

$a+a^{-1}=\frac{5}{2}$

$2a^2-5a+2=0$

$(a-2)(2a-1)=0$

$0<a<1$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

답 ①

8.

회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350, 16^2)$을 따른다.

크기 64인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=350$

$V(\overline{X})=\frac{16^2}{64}=2^2$이므로

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(350, 2^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\leq 346 \text{ 또는 } \overline{X}\geq 355)$

$=\mathrm{P}(\overline{X}\leq 346)+\mathrm{P}(\overline{X}\geq 355)$

$=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{346-350}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{355-350}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq -2)+\mathrm{P}(Z\geq 2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2)+\mathrm{P}(Z\geq 2.5)$

$=(0.5-0.4772)+(0.5-0.4938)$

$=0.0228+0.0062$

$=0.0290$

답 ①

9.

$\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r\cdot x^{4-r}\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)^r={}_4\mathrm{C}_r\cdot x^{4-4r}$

$\frac{1}{x^4}$의 항은 $4-4r=-4$에서

$r=2$일 때이므로

$\frac{1}{x^4}$의 계수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

답 ②

10.

(1) $n=1$일 때,

(좌변) $=\frac{1}{2}$, (우변) $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로

(*)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$

이다. $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

수열 $\{a_n\}$의 정의에 의해

$a_{m+1}=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}a_m$이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}}\,a_m$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$

$$+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot 3}a_1$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$

$$+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}$$

$$-\boxed{\frac{1}{(m+1)(m+2)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\left\{\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m+1}{m+2}$$

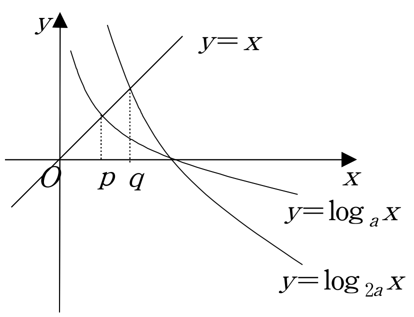
그러므로 $n=m+1$일 때에도 (*)이 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

답 ④

11.

$0<a<\frac{1}{2}$ 에서 $0<a<2a<1$ 이므로

두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_{2a} x$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=\frac{1}{2}$ 이면 $p=\log_a p$에서

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $a=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서

$p<q$ (참)

ㄷ. $p=\log_a p$, $q=\log_{2a} q$이므로

$a^p=p$, $(2a)^q=q$

즉, $a^p=p$, $a^q=\frac{q}{2^q}$

$\therefore\ a^{p+q}=a^p\cdot a^q=p\cdot\frac{q}{2^q}=\frac{pq}{2^q}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12.

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 2\end{pmatrix}$이면

$\log_4 2=\log_9 3=\frac{1}{2}$ 이므로

$A\in S$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$이면 $A\in U$이고,

$2\cdot 5-3\cdot 4=-2\neq 0$이므로

행렬 A의 역행렬이 존재한다. 그러나

$\log_2 5>2$, $\log_3 4<2$ 에서

$\log_2 5\neq\log_3 4$이므로 $A\notin S$ (거짓)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in S$이면

$\log_a d=\log_b c$이므로 $d=a^{\log_b c}$

$$\begin{aligned}ad-bc&=a\cdot a^{\log_b c}-bc\\&=a^{1+\log_b c}-bc\\&=a^{\log_b bc}-bc\\&=(bc)^{\log_b a}-bc\end{aligned}$$

$\neq 0$ ($\because$ $\log_b a \neq 1$)

이므로 행렬 A는 역행렬을 갖는다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

13.

직선 P_0P_1의 기울기가 1이므로

직선 P_1P_2의 기울기는 -1이다.

점 $P_1(1,1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y-1=-(x-1)$ 즉, $y=-x+2$이므로

점 P_2의 좌표를 구하면

$x^2=-x+2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x<0$ 이므로 $x=-2$

$\therefore$ $P_2(-2,4)$

점 $P_2(-2,4)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y-4=x+2$ 즉, $y=x+6$이므로

점 P_3의 좌표를 구하면

$x^2=x+6$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$x>0$ 이므로 $x=3$

$\therefore$ $P_3(3,9)$

점 $P_3(3,9)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y-9=-(x-3)$ 즉, $y=-x+12$이므로

점 P_4의 좌표를 구하면

$x^2=-x+12$에서 $x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

$x<0$ 이므로 $x=-4$

$\therefore$ $P_4(-4,16)$

이와 같은 방법으로 P_n의 좌표를 구하면

$P_{2m-1}(2m-1, 4m^2-4m+1)$

$P_{2m}(-2m, 4m^2)$

$n=2m$일 때,

$l_n=l_{2m}=\overline{P_{2m-1}P_{2m}}$

$=\overline{P_{2m-1}P_{2m}}$

$=\sqrt{(4m-1)^2+(4m-1)^2}$

$=\sqrt{2}(4m-1)$

$=\sqrt{2}(2n-1)$

$n=2m+1$일 때,

$l_n=l_{2m+1}=\overline{P_{2m}P_{2m+1}}$

$=\sqrt{(4m+1)^2+(4m+1)^2}$

$=\sqrt{2}(4m+1)$

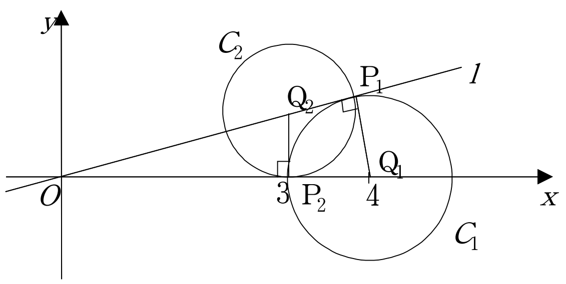
$=\sqrt{2}(2n-1)$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}$

$=2\sqrt{2}$

답 ②

14.



원 C_1, C_2의 중심을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\triangle OP_1Q_1$에서 $\overline{OP_1}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

이고, $\triangle OP_1Q_1$□□$\triangle OP_2Q_2$이므로

$\overline{OP_1}:\overline{P_1Q_1}=\overline{OP_2}:\overline{P_2Q_2}$

$\sqrt{15}:1=3:\overline{P_2Q_2}$

$\therefore$ $\overline{P_2Q_2}=\frac{3}{\sqrt{15}}$

따라서, $\triangle OP_1Q_1$과 $\triangle OP_2Q_2$의 닮음비는

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

$\overline{P_1Q_1} : \overline{P_2Q_2} = 1 : \frac{3}{\sqrt{15}}$

이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{9}{15} = 1 : \frac{3}{5}$ 이다.

원 C_1의 넓이는 $S_1 = \pi$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$$

$$= S_1 + \frac{3}{5}S_1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_1 + \cdots$$

$$= \frac{S_1}{1-\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{5}{2}S_1$$

$$= \frac{5}{2}\pi$$

답 ③

15.

다섯 번의 프로그램에 참여하여 시간 합계가 8시간이 되도록 하는 방법은 다음과 같다.

$8 = 1+1+1+1+4$

$\;\;= 1+1+1+2+3$

$\;\;= 1+1+2+2+2$

(1) $8 = 1+1+1+1+4$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는

A, A, A, A, D

를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{4!} = 5$(가지)

(2) $8 = 1+1+1+2+3$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는

A, A, A, B, C

를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!} = 20$(가지)

(3) $8 = 1+1+2+2+2$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는

A, A, B, B, B

를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\,3!} = 10$(가지)

따라서 구하는 가짓수는

$5 + 20 + 10 = 35$(가지)

답 ⑤

16.

철수가 주머니 A에서 어느 한 숫자를 선택하고 영희가 주머니 B에서 그와 다른 숫자를 선택할 확률은

${}_5C_1 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

철수는 두 사람이 꺼낸 첫 번째 숫자 2개를 제외한 나머지 3개의 숫자 중에서 한 개를 선택하고, 영희는 그와 같은 숫자를 선택해야 하므로 그 확률은

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{5} \times \frac{3}{16} = \frac{3}{20}$

답 ①

17.

ㄱ. $\mathrm{P}(E) = \frac{1}{2}$ 이므로

$I(E) = -\log_2 \mathrm{P}(E)$

$\quad = -\log_2 \frac{1}{2}$

$\quad = 1$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ I(A \cap B) = -\log_2 \mathrm{P}(A \cap B)$

$=-\log_2 P(A)P(B)$

$=-\{\log_2 P(A)+\log_2 P(B)\}$

$=-\log_2 P(A)-\log_2 P(B)$

$=I(A)+I(B)$ (참)

ㄷ. $2I(A\cup B)=-2\log_2 P(A\cup B)$

$=-\log_2\{P(A\cup B)\}^2$

$I(A)+I(B)=-\log_2 P(A)-\log_2 P(B)$

$=-\log_2 P(A)P(B)$

$P(A\cup B)\ge P(A)>0$, $P(A\cup B)\ge P(B)>0$ 이므로

$\{P(A\cup B)\}^2\ge P(A)P(B)$

$\therefore\ \log_2\{P(A\cup B)\}^2\ge\log_2 P(A)P(B)$

$-\log_2\{P(A\cup B)\}^2\le-\log_2 P(A)P(B)$

$\therefore\ 2I(A\cup B)\le I(A)+I(B)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

18.

$y=5^{x-1}$의 그래프가 점 $(a, 5)$를 지나므로

$5=5^{a-1}$에서 $a-1=1$

$\therefore\ a=2$

$y=5^{x-1}$의 그래프가 점 $(3, b)$를 지나므로

$b=5^{3-1}$에서 $b=25$

$\therefore\ a+b=2+25=27$

답 27

19.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_1+a_5+a_9$

$=a_1+(a_1+4\cdot 2)+(a_1+8\cdot 2)$

$=3a_1+24$

$=45$

따라서 $3a_1=21$에서 $a_1=7$이므로

$a_1+a_{10}=a_1+(a_1+9\cdot 2)$

$=2a_1+18$

$=2\cdot 7+18$

$=32$

답 32

다른 풀이

$\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1+a_9=2a_5$

$\therefore\ a_1+a_9=\frac{2}{3}\times 45=30$

$\therefore\ a_1+a_{10}=a_1+(a_9+2)$

$=(a_1+a_9)+2=32$

20.

두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a_1}{1-r}=8$ …㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{b_1}{1-r}=6$ …㉡

㉠-㉡에서

$\frac{a_1-b_1}{1-r}=2$

$a_1-b_1=1$이므로 $\frac{1}{1-r}=2$, $1-r=\frac{1}{2}$

$\therefore\ r=\frac{1}{2}$

㉠에서

$a_1=8(1-r)=8\cdot\frac{1}{2}=4$

㉡에서

$b_1=6(1-r)=6\cdot\frac{1}{2}=3$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이

$a_1b_1=4\cdot3=12$이고, 공비가 $r^2=\frac{1}{4}$인 등비 수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{12}{1-\frac{1}{4}}=\frac{12}{\frac{3}{4}}=16$$

답 16

21.

$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}=k$로 놓으면

$3a=k\log_a b,\ \ b=2k\log_b a,\ \ 3a+b=3k$

$\therefore\ \ k\log_a b+2k\log_b a=3k$

$\log_a b+2\log_b a=3$

$\log_a b=t$로 놓으면 $\log_b a=\frac{1}{t}$ 이므로

$t+\frac{2}{t}=3,\ \ t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

$t\neq1$ 이므로 $t=2$

$\therefore\ \ 10\log_a b=10\cdot2=20$

답 20

[다른 풀이]

$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}$ 에서

$6a\log_b a=b\log_a b,\ \ \frac{6a}{\log_a b}=b\log_a b$

$\frac{6a}{b}=(\log_a b)^2\ \ \cdots$㉠

$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}$ 이므로

$\left(\frac{3a+b}{3}\right)^2=\frac{3a}{\log_a b}\times\frac{b}{2\log_b a}$

$=\frac{3ab}{2}\ \ (\because\ \ \log_a b\times\log_b a=1)$

$\frac{9a^2+6ab+b^2}{9}=\frac{3ab}{2}$ 에서

$18a^2+12ab+2b^2=27ab$

$18a^2-15ab+2b^2=0$

$b\neq0$ 이므로 양변을 b^2으로 나누면

$18\left(\frac{a}{b}\right)^2-15\cdot\frac{a}{b}+2=0$

$\frac{a}{b}=t$로 놓으면

$18t^2-15t+2=0$

$(3t-2)(6t-1)=0$

$t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=\frac{1}{6}$

$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ 이면 ㉠에서 $(\log_a b)^2=4$

$\log_a b>1$ 이므로 $\log_a b=2$

$\frac{a}{b}=\frac{1}{6}$ 이면 ㉠에서 $(\log_a b)^2=1$

$\log_a b>1$ 이므로 모순

따라서 $\log_a b=2$이므로

$10\log_a b=20$

22.

$i^m\cdot(-i)^n=(-1)^n\cdot i^{m+n}$이므로

$i^m\cdot(-1)^n$의 값이 1이 되는 경우는

n이 짝수이고 $m+n=4,8,12$

또는 n이 홀수이고 $m+n=2,6,10$이다.

(1) n이 짝수이고 $m+n=4,8,12$인 경우는

$(2,2),(2,6),(4,4),(6,2),(6,6)$

의 5가지

(2) n이 홀수이고 $m+n=2,6,10$인 경우는

$(1,1),(1,5),(3,3),(5,1),(5,5)$

의 5가지 따라서, 구하는 확률은 $\frac{5+5}{36}=\frac{5}{18}$

이므로 $p+q=18+5=23$

답 23

23.

n으로 나누었을 때 몫과 나머지가 같아지는 자연수는

$n+1,\ 2n+2,\ 3n+3,\ 4n+4,\ \cdots,\ (n-1)n+(n-1)$

의 $n-1$개다.

$$\therefore\ a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(kn+k)$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=(n+1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$a_n>500$ 에서

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}>500$$

$(n-1)n(n+1)>1000$

$9\cdot10\cdot11=990<1000$

$10\cdot11\cdot12=1320>1000$

이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

답 11

24.

$A^2+A^3=-3A-3E$이므로

$$A^4+A^5=A^2(A^2+A^3)$$

$$=A^2(-3A-3E)$$

$$=-3A^3-3A^2$$

$$=-3(A^2+A^3)$$

$$=-3(-3A-3E)$$

$$=9A+9E$$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 놓으면 $a+b+c+d=0$ 이므로

행렬 $9A+9E$의 모든 성분의 합은

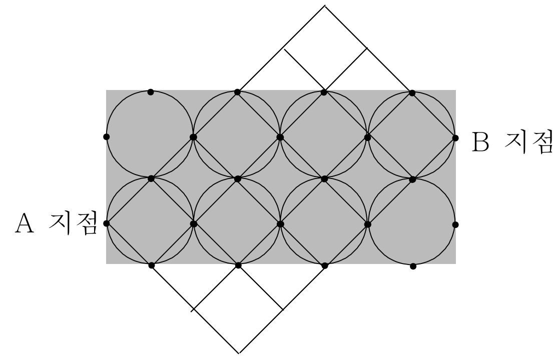
$9(a+b+c+d)+9(1+0+0+1)$

$=9\cdot0+9\cdot2$

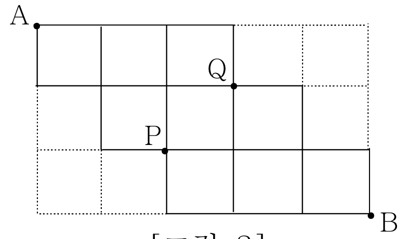
$=18$

답 18

25.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수는 [그림 2]에서 A 지점에서 출발하여 실선을 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수와 같다.

(1) A → P → B의 경우

$$\left(\frac{4!}{2!\,2!}-1\right)\times\frac{4!}{3!}=5\times4=20\text{(가지)}$$

(2) A → Q → B의 경우

$$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{4!}{2!\,2!}-1\right)=4\times5=20\text{(가지)}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$20+20=40$(가지)

답 40

26.

$$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^c)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{6}$ 에서

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

$P(A\cap B)+P(A^c\cap B)=P(B)$ 이므로

$P(A^c\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ P(A^c|B)=\frac{P(A^c\cap B)}{P(B)}$

$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$

답 ④

27.

$1\le n\le 9$ 일 때, $\log n$의 지표는 0이므로 가수 $f(n)$의 값은

$\log 1, \log 2, \log 3, \cdots, \log 9 \quad \cdots㉠$

의 9개이고, 이들은 서로 다른 값이다.

$10\le n\le 99$ 일 때, $\log n$의 지표는 1이므로 가수 $f(n)$의 값은

$\log\frac{10}{10}, \log\frac{11}{10}, \log\frac{12}{10}, \cdots, \log\frac{99}{10} \quad \cdots㉡$

의 90개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log\frac{10}{10}, \log\frac{20}{10}, \log\frac{30}{10}, \cdots, \log\frac{90}{10}$

의 9개는 ㉠의 값과 중복된다.

$100\le n\le 150$ 일 때, $\log n$의 지표는 2이므로 가수 $f(n)$의 값은

$\log\frac{100}{100}, \log\frac{101}{100}, \log\frac{102}{100}, \cdots, \log\frac{150}{100}$

의 51개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중 $\log\frac{100}{100}, \log\frac{110}{100}, \log\frac{120}{100}, \cdots, \log\frac{150}{100}$

의 6개는 ㉠,㉡의 값과 중복된다.

따라서 집합 A의 원소의 개수는

$9+(90-9)+(51-6)=135$(개)

이다.

답 ③

28.

$BAB=E$에서

$B^{-1}=AB=BA$

$ABA=A^{-1}$에서

양변에 A를 곱하면

$AABA=E$

$AB=BA$이므로

$AAAB=E$

$\therefore\ B^{-1}=A^3$

$B^{-1}=AB=A^3$이므로

$B=A^2$

$\therefore\ BB^{-1}=A^2\cdot A^3=E$

$\therefore\ A^5=E$

한편, A, A^{-1}, B, B^{-1}은 단위행렬이 아니고,

$A^2=B,\ A^3=B^{-1}$,

$A^4=A^2A^2=A^2B=ABA=A^{-1}$

이므로 $A^n=E$를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

답 ③

29.

$E(\overline{X})=E(X)=18$ 이므로

$E(X)=10\cdot\frac{1}{2}+20a+30\left(\frac{1}{2}-a\right)$

$=20-10a$

$=18$

$\therefore\ a=\frac{1}{5}$

크기가 2인 표본을 복원추출할 때,

$\overline{X}=20$인 경우는

10과 30, 20과 20, 30과 10
을 추출하는 경우이므로

$$\begin{aligned}P(\overline{X}=20) &= P(X=10)\cdot P(X=30) \\ &\quad + P(X=20)\cdot P(X=20) \\ &\quad + P(X=30)\cdot P(X=10) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{20}+\frac{1}{25}+\frac{3}{20} \\ &= \frac{17}{50}\end{aligned}$$

답 ④

30.
사건 E가 일어나는 경우의 수는
$m=1$일 때, $n^2 \le 24$에서
$n=1,2,3,4$의 4가지
$m=2$일 때, $n^2 \le 21$에서
$n=1,2,3,4$의 4가지
$m=3$일 때, $n^2 \le 16$에서
$n=1,2,3,4$의 4가지
$m=4$일 때, $n^2 \le 9$에서
$n=1,2,3$의 3가지

$$\therefore\ P(E)=\frac{4+4+4+3}{36}=\frac{5}{12}$$

따라서, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(12, \frac{5}{12}\right)$를 따르므로

$$V(X)=12\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$$

$$\therefore\ p+q=12+35=47$$

답 47