2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

$9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (3^3)^{-\frac{2}{3}}$

$= 3^3 \times 3^{-2}$

$= 3^{3-2}$

$= 3$

답 ④

2.

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$(A+B)A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

따라서, 행렬 $(A+B)A$의 모든 성분의 합은

$1+0+5+3=9$

답 ①

3.

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (6x^2+2ax)dx$

$=[2x^3+ax^2]_0^1$

$=2+a$

이고

$f(1)=6+2a$

이므로

$2+a=6+2a$

$\therefore\ a=-4$

답 ①

4.

$\sqrt{x^2-2x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{t^2+1}$이므로 주어진 방정식은

$\sqrt{t^2+1}=t+\frac{1}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4(t^2+1)=4t^2+4t+1$

$\therefore\ t=\frac{3}{4}$

이때 $\sqrt{x^2-2x}=\frac{3}{4}$이므로 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x-\frac{9}{16}=0$

위의 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 두 실근의 합은 2이다.

답 ④

5.

$\frac{1}{f(x)+1}-\frac{1}{f(x)-1}=\frac{2}{x^2}$

의 좌변을 통분하여 정리하면

$\frac{-2}{\{f(x)\}^2-1}=\frac{2}{x^2}$

$\therefore\ \{f(x)\}^2=1-x^2$

$\therefore\ f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$

따라서 구하는 방정식의 실근은

두 곡선 $y=f(x)$, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$가 만나는 점의 x좌표 중에서 $f(x)\neq\pm1$, $x\neq0$인 x좌표와 같다.

그런데 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 원 $x^2+y^2=1$과 같으므로 주어진 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$는 서로 다른 네 점에서 만난다.

그런데, $x\neq0$, $f(x)\neq-1$이므로 점 (0, -1)은 제외해야 한다.

따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.

답 ②

6.

$f(x)=(x-2)^2+a-4$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 연속함수이다.

한편, $g(x)$를 간단히 하면 다음과 같다.

(i) $|x-b|>1$일 때 $g(x)=2$

(ii) $|x-b|=1$일 때 $g(x)=\frac{3}{2}$

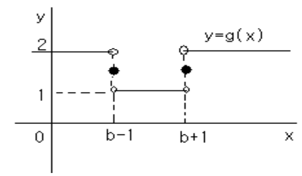
(iii) $|x-b|<1$일 때 $g(x)=1$

이때

$|x-b|=1$

$\Leftrightarrow\ x=b-1$ 또는 $x=b+1$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)$는 $x=b-1$, $x=b+1$일 때 불연속이므로 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 모든 실수 x에 연속이 되려면

$f(b-1)=f(b+1)=0$

이어야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 대칭축의 방정식은

$x=2=b\ \cdots$ ㉠

이고,

$f(3)=9-12+a=0\ \cdots$ ㉡

이어야 한다.

㉠, ㉡에서

$a=3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=5$

답 ③

7.

$f(x)=a^{bx-1}$의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(2)=g(2)$

가 성립한다.

따라서, $a^{2b-1}=a^{1-2b}$에서

$2b-1=1-2b,\ 4b=2$

$\therefore\ b=\frac{1}{2}$

$f(4)=g(0)$, $g(4)=f(0)$이므로

$f(4)+g(4)=g(0)+f(0)=\frac{5}{2}$

$a+a^{-1}=\frac{5}{2}$

$2a^2-5a+2=0$

$(a-2)(2a-1)=0$

$0<a<1$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

답 ①

8.

회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 16^2)$을 따른다.

크기 64인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$E(\overline{X})=350$

$V(\overline{X})=\frac{16^2}{64}=2^2$이므로

$\overline{X}$는 정규분포 $N(350, 2^2)$을 따른다.

$\therefore\ P(\overline{X}\le 346 \text{ 또는 } \overline{X}\ge 355)$

$=P(\overline{X}\le 346)+P(\overline{X}\ge 355)$

$=P\left(Z\le\frac{346-350}{2}\right)+P\left(Z\ge\frac{355-350}{2}\right)$

$=P(Z\le -2)+P(Z\ge 2.5)$

$=P(Z\ge 2)+P(Z\ge 2.5)$

$=(0.5-0.4772)+(0.5-0.4938)$

$=0.0228+0.0062$

$=0.0290$

답 ①

9.

ㄱ. $f(x)$는 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$, $(f\circ f)(x)$는 모두 폐구간 $[0,5]$에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 3-0} g(x)=\lim_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim_{x\to 3+0} g(x)=\lim_{x\to 3+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 1-0} f(t)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to 3-0} g(x)\ne\lim_{x\to 3+0} g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $f(x)$는 폐구간 $[0, 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0, 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\ne 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\ne 4$이고 $f(x)\ne 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x\to 3-0} g(x)=\lim_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\lim_{x\to 3+0} g(x)=\lim_{x\to 3+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 2-0} f(t)=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore\ \lim_{x\to 3-0} g(x)=\lim_{x\to 3+0} g(x)=g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x\to 4-0} g(x)=\lim_{x\to 4-0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to +0} f(t)=3$

$\lim_{x\to 4+0} g(x)=\lim_{x\to 4+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 1+0} f(t)=3$

$g(4)=f(f(4))=f(0)=3$

$\therefore\ \lim_{x\to 4-0} g(x)=\lim_{x\to 4+0} g(x)=g(4)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$는 폐구간 $[0, 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0, 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\ne 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\ne 4$이고 $f(x)\ne 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x\to 3-0} g(x)=\lim_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\lim_{x\to 3+0} g(x)=\lim_{x\to 3+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 2-0} f(t)=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore\ \lim_{x\to 3-0} g(x)=\lim_{x\to 3+0} g(x)=g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x\to 4-0} g(x)=\lim_{x\to 4-0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to +0} f(t)=2$

$\lim_{x\to 4+0} g(x)=\lim_{x\to 4+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim_{t\to 1+0} f(t)=3$

$\therefore\ \lim_{x\to 4-0} g(x)\ne\lim_{x\to 4+0} g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 불연속이므로 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 그래프는 ㄴ이다.

답 ②

10.

(1) $n=1$일 때,

(좌변) $=\frac{1}{2}$, (우변) $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로

(*)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$

이다. $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

수열 $[a_n]$의 정의에 의해

$a_{m+1}=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}a_m$이므로

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}}\ a_m$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$

$+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdots\cdots\frac{1^2}{2\cdot 3}a_1$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$

$+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdots\cdots\frac{1^2}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}}$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}$

$-\boxed{\frac{1}{(m+1)(m+2)}}$

$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\left\{\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}$

$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m+1}{m+2}$

그러므로 $n=m+1$일 때에도 (*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

답 ④

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

11.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^m}=1$이므로 $f(x)$의 최고차항은 x^m이다. 이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$이므로

$m=a$

이다.

한편, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=b$이므로 $f(x)$의 계수가 0이 아닌 항 중 차수가 가장 낮은 항은 bx^n이다. 이때 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$이므로

$bn=9$

이다.

ㄱ. $f(x)$의 최고차항이 x^m이고 차수가 가장 낮은 항이 bx^n이므로

$m\geq n$ (참)

ㄴ. $m=a$, $bn=9$이므로

$ab=m\times\dfrac{9}{n}\geq 9$ ($\because$ $m\geq n$) (참)

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면

$m=a=3$, $bn=9$

이므로

$am=bn$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12.

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}4&9\\3&2\end{pmatrix}$이면

$\log_4 2=\log_9 3=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$A\in S$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$이면 $A\in U$이고,

$2\cdot 5-3\cdot 4=-2\neq 0$이므로

행렬 A의 역행렬이 존재한다. 그러나

$\log_2 5>2$, $\log_3 4<2$ 에서

$\log_2 5\neq\log_3 4$이므로 $A\notin S$ (거짓)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in S$이면

$\log_a d=\log_b c$이므로 $d=a^{\log_b c}$

$ad-bc=a\cdot a^{\log_b c}-bc$

$=a^{1+\log_b c}-bc$

$=a^{\log_b bc}-bc$

$=(bc)^{\log_b a}-bc$

$\neq 0$ ($\because$ $\log_b a\neq 1$)

이므로 행렬 A는 역행렬을 갖는다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

13.

직선 P_0P_1의 기울기가 1이므로

직선 P_1P_2의 기울기는 -1이다.

점 $P_1(1,1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y-1=-(x-1)$ 즉, $y=-x+2$이므로

점 P_2의 좌표를 구하면

$x^2=-x+2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x<0$ 이므로 $x=-2$

$\therefore$ $P_2(-2,4)$

점 $P_2(-2,4)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y-4=x+2$ 즉, $y=x+6$이므로

점 P_3의 좌표를 구하면

$x^2=x+6$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$x>0$ 이므로 $x=3$

$\therefore$ $P_3(3,9)$

점 $P_3(3,9)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은 $y-9=-(x-3)$ 즉, $y=-x+12$이므로

점 P_4의 좌표를 구하면

$x^2=-x+12$에서 $x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

$x<0$ 이므로 $x=-4$

$\therefore$ $P_4(-4,16)$

이와 같은 방법으로 P_n의 좌표를 구하면

$P_{2m-1}(2m-1, 4m^2-4m+1)$

$P_{2m}(-2m, 4m^2)$

$n=2m$일 때,

$l_n=l_{2m}=\overline{P_{2m-1}P_{2m}}$

$=\overline{P_{2m-1}P_{2m}}$

$=\sqrt{(4m-1)^2+(4m-1)^2}$

$=\sqrt{2}(4m-1)$

$=\sqrt{2}(2n-1)$

$n=2m+1$일 때,

$l_n=l_{2m+1}=\overline{P_{2m}P_{2m+1}}$

$=\sqrt{(4m+1)^2+(4m+1)^2}$

$=\sqrt{2}(4m+1)$

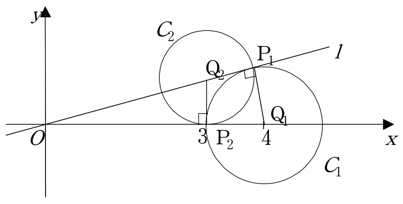
$=\sqrt{2}(2n-1)$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}$

$=2\sqrt{2}$

답 ②

14.



원 C_1, C_2의 중심을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\triangle OP_1Q_1$에서 $\overline{OP_1}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

이고, $\triangle OP_1Q_1$□□$\triangle OP_2Q_2$이므로

$\overline{OP_1}:\overline{P_1Q_1}=\overline{OP_2}:\overline{P_2Q_2}$

$\sqrt{15}:1=3:\overline{P_2Q_2}$

$\therefore$ $\overline{P_2Q_2}=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

따라서, $\triangle OP_1Q_1$과 $\triangle OP_2Q_2$의 닮음비는

$\overline{P_1Q_1}:\overline{P_2Q_2}=1:\dfrac{3}{\sqrt{15}}$

이므로 넓이의 비는 $1:\dfrac{9}{15}=1:\dfrac{3}{5}$ 이다.

원 C_1의 넓이는 $S_1=\pi$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=S_1+S_2+S_3+\cdots$

$=S_1+\dfrac{3}{5}S_1+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2S_1+\cdots$

$=\dfrac{S_1}{1-\dfrac{3}{5}}$

$=\dfrac{5}{2}S_1$

$=\dfrac{5}{2}\pi$

답 ③

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

15.

다섯 번의 프로그램에 참여하여 시간 합계가 8시간이 되도록 하는 방법은 다음과 같다.

$8=1+1+1+1+4$

$\quad=1+1+1+2+3$

$\quad=1+1+2+2+2$

(1) $8=1+1+1+1+4$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는

A, A, A, A, D

를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{4!}=5$(가지)

(2) $8=1+1+1+2+3$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는

A, A, A, B, C

를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!}=20$(가지)

(3) $8=1+1+2+2+2$의 경우

작성할 수 있는 봉사활동 계획서의 가짓수는

A, A, B, B, B

를 나열하는 방법의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\,3!}=10$(가지)

따라서 구하는 가짓수는

$5+20+10=35$(가지)

답 ⑤

16.

철수가 주머니 A에서 어느 한 숫자를 선택하고 영희가 주머니 B에서 그와 다른 숫자를 선택할 확률은

${}_5C_1\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$

철수는 두 사람이 꺼낸 첫 번째 숫자 2개를 제외한 나머지 3개의 숫자 중에서 한 개를 선택하고, 영희는 그와 같은 숫자를 선택해야 하므로 그 확률은

$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{5}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{20}$

답 ①

17.

ㄱ. $P(E)=\frac{1}{2}$ 이므로

$I(E)=-\log_2 P(E)$

$\quad=-\log_2\frac{1}{2}$

$\quad=1$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\therefore\ I(A\cap B)=-\log_2 P(A\cap B)$

$\quad=-\log_2 P(A)\,P(B)$

$\quad=-\{\log_2 P(A)+\log_2 P(B)\}$

$\quad=-\log_2 P(A)-\log_2 P(B)$

$\quad=I(A)+I(B)$ (참)

ㄷ. $2I(A\cup B)=-2\log_2 P(A\cup B)$

$\quad=-\log_2\{P(A\cup B)\}^2$

$I(A)+I(B)=-\log_2 P(A)-\log_2 P(B)$

$\quad=-\log_2 P(A)\,P(B)$

$P(A\cup B)\geq P(A)>0$,

$P(A\cup B)\geq P(B)>0$

이므로

$\{P(A\cup B)\}^2\geq P(A)\,P(B)$

$\therefore\ \log_2\{P(A\cup B)\}^2\geq\log_2 P(A)\,P(B)$

$-\log_2\{P(A\cup B)\}^2\leq-\log_2 P(A)\,P(B)$

$\therefore\ 2I(A\cup B)\leq I(A)+I(B)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

18.

$\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x+1)-8\}=0$이어야 하므로

$f(3)=8$

$x+1=t$로 놓으면

$\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3}$

$=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\times\lim_{t\to3}\frac{1}{t+1}$

$=\frac{1}{4}f'(3)=5$

$\therefore\ f'(3)=20$

$\therefore\ f(3)+f'(3)=28$

답 28

19.

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 초점의 좌표가 $(\pm b,\ 0)$이므로

$a^2-b^2=b^2$

$\therefore\ a^2=2b^2$ ⋯ ㉠

또, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 y절편이 ±1이므로

$\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}=\pm1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a^2=\frac{4}{3},\ b^2=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a^2b^2=\frac{8}{9}$

$\therefore\ p+q=17$

답 17

20.

점 H를 원점으로 하고, 반직선 HE, HG, HD를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면

A(4, 0, 8), D(0, 0, 8), E(4, 0, 0), F(4, 4, 0), G(0, 4, 0)이므로

네 점 P, Q, R, S, T의 좌표는 각각

P(4, 0, 6), Q(4, 2, 8), R(2, 0, 8) S(2, 4, 0), T(3, 1, 8)이다.

이때

$\overrightarrow{TP}=(1,-1,-2)$,

$\overrightarrow{QS}=(-2,2,-8)$

이므로

$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{QS}=(1,-1,-2)\cdot(-2,2,-8)$

$\quad=-2-2+16=12$

답 12

21.

포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$y=x+3$

이므로

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$a=3$

포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=x+3$의 접점의 x좌표를 구하면

$(x+3)^2=12x$에서

$x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2=0$

$\therefore\ x=3$

따라서 구하는 회전체의 부피는

$$\pi\int_0^3(x+3)^2dx-\pi\int_0^3 12x\,dx$$

$$=\pi\int_0^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_0^3$$

$$=9\pi$$

$\therefore\ b=9$

$\therefore\ ab=3\cdot 9=27$

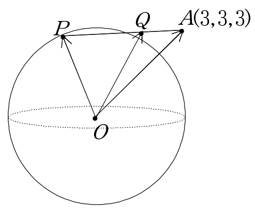
답 27

22.

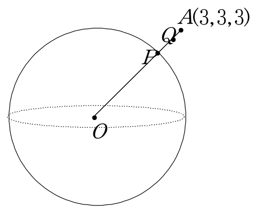
선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라고 할 때,

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$$

이다.



$|\overrightarrow{OP}|=3$, $|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{3}$ 로 일정하므로 $|\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대가 되는 것은 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$의 방향이 같을 때이다.



$$\overline{PQ}=\frac{2}{3}\overline{PA}=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-3)=2\sqrt{3}-2$$

이므로

$$|\overrightarrow{OQ}|=3+(2\sqrt{3}-2)=1+2\sqrt{3}$$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

답 30

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 (x,y,z)라 하면

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}(3,3,3)+\frac{1}{3}(x,y,z)$$

$$=\frac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)$$

이므로

$$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)\right|$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$$

$\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$는 구면 위의 점 $P(x,y,z)$와 점 $Q(-6,-6,-6)$ 사이의 거리이므로 $\overline{PQ}$의 최댓값은

$$\overline{OQ}+3=\sqrt{6^2+6^2+6^2}+3=6\sqrt{3}+3$$

이다.

따라서, $\frac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$ 의 최댓값은

$$\frac{1}{3}(6\sqrt{3}+3)=2\sqrt{3}+1$$

이므로 $a=1,\ b=2$이다.

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

23.

n으로 나누었을 때 몫과 나머지가 같아지는 자연수는

$n+1,\ 2n+2,\ 3n+3,\ 4n+4,\ \cdots,\ (n-1)n+(n-1)$의 $n-1$개다.

$$\therefore\ a_n=\sum_{k=1}^{n-1}(kn+k)$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=(n+1)\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$a_n>500$ 에서

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{2}>500$$

$(n-1)n(n+1)>1000$

$9\cdot 10\cdot 11=990<1000$

$10\cdot 11\cdot 12=1320>1000$

이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 11이다.

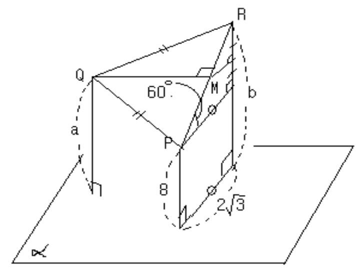
답 11

24.

세 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 모두 같으므로 삼각형 QRP가 이등변삼각형이려면 세 원기둥의 높이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루어야 하고, 이때

$$\overline{QP}=\overline{QR}$$

이다.



또 선분 PR의 중점을 M이라 하면 점 Q를 지나고 평면 α와 평행한 평면 β와 평면 QPR의 교선은 선분 QM이다.

이때 $\overline{QM}\perp\overline{PR}$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 선분 PR와 평면 α가 이루는 각의 크기와 같다.

그런데 선분 PR의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 두 원기둥의 반지름의 길이의 합과 같으므로

$$\overline{PR}\times\cos 60^\circ=2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \overline{PR}=4\sqrt{3}$$

따라서 위의 그림에서 점 P와 점 R의 평면 α로부터의 거리의 차는

$$\overline{PR}\sin 60^\circ=6$$

따라서 세 원기둥의 높이는 각각

8, 8+3, 8+6

이다.

$\therefore\ a=11,\ b=14$

$\therefore\ a+b=25$

답 25

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

25.

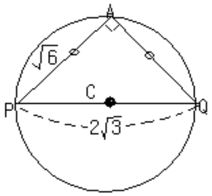
구 S의 중심 (0, 0, 0)과 평면 α 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$$

이므로 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이 r는

$$r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

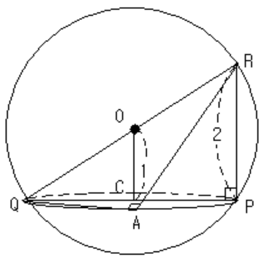
이다. 원 C위의 세 점 A, P, Q의 위치 관계는 다음과 같다.



또한, 다음 그림에서

$$\overline{PR}=2\overline{OC}=2$$

이고 선분 QR는 구 S의 지름임을 알 수 있다.



이때 점 A는 구 위의 점이므로 삼각형 ARQ는 ∠A=90° 인 직각삼각형이다.

$$\therefore\ \overline{AR}=\sqrt{\overline{QR}^2-\overline{QA}^2}$$

$$=\sqrt{16-6}=\sqrt{10}$$

$$\therefore\ s=\frac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{AR}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10}$$

$$=\sqrt{15}$$

$$\therefore\ s^2=15$$

답 15

미분과 적분

26.

$\sin 2x=2\sin x\cos x$이므로 주어진 방정식은

$$2\sin x\cos x=2\cos x-2\cos^2 x$$

$$\cos x(\sin x+\cos x-1)=0$$

$\therefore$ $\cos x=0$ 또는 $\sin x+\cos x=1$

(i) $\cos x=0$에서

$$x=\frac{\pi}{2}\ \text{또는}\ x=\frac{3}{2}\pi$$

(ii) $\sin x+\cos x=1$에서

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\ \text{또는}\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore\ x=0\ \text{또는}\ x=\frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 서로 다른 모든 x의 값의 합은

$$0+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$$

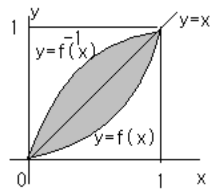
답 ⑤

27.

$f'(x)>0$, $f''(x)>0$이므로

연속함수 $f(x)$의 그래프는 구간 [0, 1]에서 아래로 볼록하게 증가한다.

또, 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그래프와 같다.



이때, $\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값은 위 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 이는 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 정적분의 정의에 의해

$$\int_0^1\{x-f(x)\}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$

이므로

$$\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{x-f(x)\}dx$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

답 ②

28.

ㄱ. $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)$의 정의역은

$$\{x\mid 0<x<10\}$$

이때,

$$f(x)=\ln x^4+\ln(10-x)=\ln x^4(10-x)$$

에서

$$g(x)=x^4(10-x)=-x^5+10x^4$$

로 놓으면

$$g'(x)=-5x^4+40x^3=-5x^3(x-8)$$

이므로 $x=8$에서 극댓값이자 최댓값

$$g(8)=8^4(10-8)=2^{13}$$

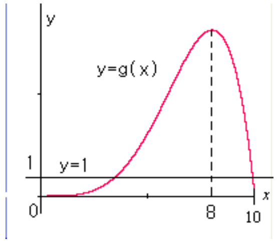
을 갖는다.

이때, $f(x)=\ln g(x)$에서 밑 e가 1보다 크므로 $f(x)$는 $x=8$일 때 최댓값

$$f(8)=\ln g(8)=\ln 2^{13}=13\ln 2$$

를 갖는다. (참)

ㄴ. 곡선 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f(x)=\ln g(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=1$이고 $y=g(x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $y=e^{f(x)}=e^{\ln g(x)}=g(x)^{\ln e}=g(x)$이다.

$g'(x)=-5x^4+40x^3$이므로

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$g''(x)=-20x^3+120x^2=-20x^2(x-6)=0$

에서 $g(x)$는 $x=6$일 때 변곡점이다.

즉, 곡선 $y=g(x)$는 $x<6$일 때 아래로 볼록이고, $x>6$일 때 위로 볼록이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

29.

$f(x)=\int_a^x\{2+\sin(t^2)\}dt$에서

$f'(x)=2+\sin x^2$이고

$f''(x)=\cos x^2(2x)=2x\cos x^2$이다.

이때 $f''(a)=2a\cos a^2=\sqrt{3}a$에서

$$\cos a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ a^2=\frac{\pi}{6}$$

한편, $f^{-1}(0)=b$로 놓으면

$$f(b)=\int_a^b\{2+\sin(t^2)\}dt=0$$

에서 $b=a$이다. 이때

$$f'(b)=f'(a)=2+\sin a^2$$

$$=2+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5}{2}$$

이므로

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{2}{5}$$

답 ④

30.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

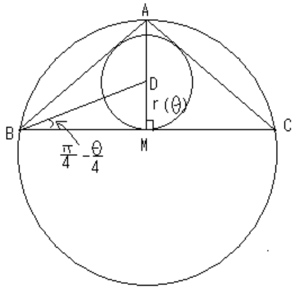
$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2\cdot 1$$

$$\therefore\ \overline{BC}=2\sin\theta$$

따라서 선분 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{BM}=\sin\theta$$

이다.



또, 내접원의 중심을 D라고 하면 위 그림의 직각삼각형 BMD에서

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\frac{r(\theta)}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ r(\theta)=\sin\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)$$

이때, $\pi-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\pi-0$일 때 $t\to+0$이고

$$\sin\theta=\sin(\pi-t)=\sin t,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\tan\frac{t}{4}$$

이다.

∴ (주어진 식)

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t\times\tan\frac{t}{4}}{t^2}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to+0}\frac{\tan\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\times1\times1=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ p^2+q^2=16+1=17$$

답 17

확률과 통계

26.

주어진 줄기와 잎 그림에서 최빈값은 24이다.

한편, 10일 동안의 자유투 성공 횟수의 총합은

$9+17+19+21+24+24+26+30+31+33$
$=234$

이므로 11일 동안의 자유투 성공 횟수에 대한 평균은

$$\frac{234+n}{11}$$

이다. 이때, $\frac{234+n}{11}=24$이어야 하므로

$$234+n=264$$

$$\therefore\ n=30$$

답 ④

27.

(i) (앞, 뒤, 앞) 또는 (뒤, 앞, 뒤)가 나올 확률은

$$P(X=0)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(ii) (앞, 앞, 뒤) 또는 (앞, 뒤, 뒤) 또는 (뒤, 뒤, 앞) 또는 (뒤, 앞, 앞)이 나올 확률은

$$P(X=1)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(iii) (앞, 앞, 앞) 또는 (뒤, 뒤, 뒤)가 나올 확률은

$$P(X=3)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

이 때, $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$=\frac{11}{4}-\frac{25}{16}$$

$$=\frac{19}{16}$$

답 ②

28.

9개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

꺼낸 공에 적혀 있는 수 중 가장 큰 수를 M 가장 작은 수를 m이라 하면 $7\le M+m\le9$를 만족하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $m=1$, $M=6$일 때

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

2, 3, 4, 5 중에서 두 개를 택해야 하므로

$_4C_2=6$ (가지)

(ii) $m=1$, $M=7$일 때

2, 3, 4, 5, 6 중에서 두 개를 택해야 하므로

$_5C_2=10$ (가지)

(iii) $m=1$, $M=8$일 때

2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 두 개를 택해야 하므로

$_6C_2=15$ (가지)

(iv) $m=2$, $M=5$일 때

3, 4 중에서 두 개를 택해야 하므로

$_2C_2=1$ (가지)

(v) $m=2$, $M=6$일 때

3, 4, 5 중에서 두 개를 택해야 하므로

$_3C_2=3$ (가지)

(vi) $m=2$, $M=7$일 때

3, 4, 5, 6 중에서 두 개를 택해야 하므로

$_4C_2=6$ (가지)

(vii) $m=3$, $M=6$일 때

4, 5 중에서 두 개를 택해야 하므로

$_2C_2=1$ (가지)

이상에서 주어진 조건을 만족하는 경우의 수는

$6+10+15+1+3+6+1=42$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$\frac{42}{126}=\frac{1}{3}$

답 ⑤

29.

$P(|X|\le a)=P\left(\left|\frac{X-0}{\sigma}\right|\le\frac{a-0}{\sigma}\right)$

$=P\left(|Z|\le\frac{a}{\sigma}\right)$

$P(|Y|\le B)=P\left(\left|\frac{Y-0}{\frac{\sigma}{2}}\right|\le\frac{b-0}{\frac{\sigma}{2}}\right)$

$=P\left(|Z|\le\frac{2b}{\sigma}\right)$

이므로 $P(|X|\le a)=P(|Y|\le b)$이면

$a=2b$

이다.

ㄱ. $a=2b$이고 $a>0$, $b>0$이므로

$a>b$ (참)

ㄴ. $P\left(Y>\frac{a}{2}\right)=P\left(\frac{Y-0}{\frac{\sigma}{2}}>\frac{b-0}{\frac{\sigma}{2}}\right)$

$=P\left(Z>\frac{2b}{\sigma}\right)$ (참)

ㄷ. $P(Y>b)=1-P(Y\le b)=0.3$이므로

$P(|Y|\le b)=1-P(|Y|>b)$

$=1-2P(Y>b)$

$=1-2\times0.3=0.4$

$\therefore$ $P(|X|\le a)=P(|Y|\le b)=0.4$ (거짓)

답 ③

30.

모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{10}-c,\ \frac{1}{10}+c\right]$이므로

$c=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{100}}=1.96\times\frac{3}{100}$

이다.

또, 모집단에서 임의로 n명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{9}-s(n),\ \frac{1}{9}+s(n)\right]$이므로

$s(n)=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}}{n}}=1.96\times\frac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}$

이다.

이 때, $1.96\times\frac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}=\frac{50}{81}\times1.96\times\frac{3}{100}$이므로

$\sqrt{n}=6\sqrt{8}$

$\therefore$ $n=36\times8=288$

답 288

이산수학

26.

$\sum_{k=1}^{11}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)$

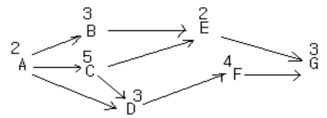
$+(a_6+a_7+a_8)+(a_9+a_{10}+a_{11})$

$=(1+2)+6+6+6=21$

답 ③

27.

작업의 순서를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 작업을 모두 끝마치는 데 필요한 최소 작업시간은

A → C → D → F → G

2 5 3 4 3

에서

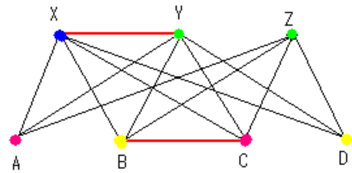
$2+5+3+4+3=17$(일)

이다.

답 ⑤

28.

주어진 그래프의 꼭짓점을 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소 색의 수가 4인 그래프를 만들려면 다음 그림과 같이 세 꼭짓점 X, Y, Z 중의 두 개를 변으로 연결하고, 네 꼭짓점 A, B, C, D 중의 두 개를 변으로 연결해야 한다.



따라서 가능한 그래프 H의 개수는

$_3C_2\times{}_4C_2=3\times6=18$ (개)

이다.

답 ④

29.

A, B, C, D, E, F를 모두 사용하여 만든 6자리의 문자열의 집합을 U라 하면

$n(U)=6!$

이다.

한편, U의 원소 중에서 A의 바로 다음 자리에 B가 오는 문자열의 집합을 X, B 바로 다음 자리에 C가 오는 문

2009학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

자열의 집합을 Y, C 바로 다음 자리에 A가 오는 문자열의 집합을 Z라 하면 주어진 조건을 모두 만족시키는 문자열의 집합은

$$X^C \cap Y^C \cap Z^C$$

이다.
따라서 포함배제의 원리에 의해

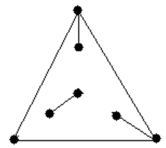
$n(X^C \cap Y^C \cap Z^C)$
$= n(U) - n(X) - n(Y) - n(Z)$
$+ n(X \cap Y) + n(Y \cap Z) + n(Z \cap X)$
$- n(X \cap Y \cap Z)$
$= 6! - 3 \times 5! + 3 \times 4! - 0$
$= 4!(6 \times 5 - 3 \times 5 + 3)$
$= 24 \times 18$
$= 432$

답 ②

30.
주어진 그래프의 꼭짓점의 개수가 7이므로 생성수형도의 변의 개수는 6이어야 한다.
그런데 주어진 그래프의 변의 개수는 9이므로 3개를 삭제해야 한다.
따라서 9개의 변 중 삭제할 3개의 변을 택하는 경우의 수는

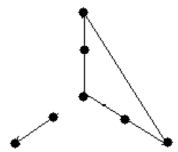
$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (개)}$$

그런데, 생성수형도에는 회로가 없어야 하므로 위의 84개의 그래프 중에서 회로가 있는 그래프를 제외해야 한다.
(i) 다음 그림과 같이 맨 바깥쪽에 회로가 생기는 경우



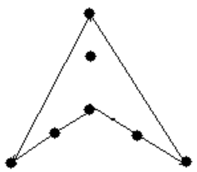
${}_6C_3 = 20$ (개)

(ii) 다음 그림과 같이 맨 바깥쪽의 변 중 한 개만 남아서 회로가 생기는 경우



$3 \times {}_4C_3 = 12$ (개)

(ii) 다음 그림과 같이 맨 바깥쪽의 변 중 두 개가 남아서 회로가 생기는 경우



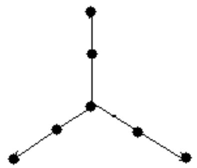
$3 \times {}_3C_3 = 3$

이상에서 구하는 생성수형도의 총 개수는

$84 - (20 + 12 + 3) = 49$(개)

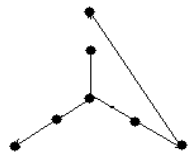
답 49

다른 풀이
다음과 같이 직접 생성수형도의 개수를 구할 수도 있다.
(i) 맨 바깥쪽의 변을 모두 삭제하는 경우



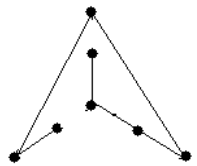
${}_3C_3 = 1$ (개)

(ii) 맨 바깥쪽의 변 중 두 개를 삭제하는 경우



${}_3C_2 \times {}_4C_1 = 12$ (개)

(iii) 맨 바깥쪽의 변 중 한 개를 삭제하는 경우



${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times 2 \times 2 = 36$ (개)

이상에서 구하는 생성수형도의 총 개수는

$1 + 12 + 36 = 49$ (개)

답 49