(홀수형)

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$8^{\frac{2}{3}}+\log_2 8$

$=(2^3)^{\frac{2}{3}}+\log_2 2^3$

$=2^2+3$

$=7$

답 ③

2.

$X=2B-A$

$=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

답 ①

3.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}$

$=\frac{1}{2+1}$

$=\frac{1}{3}$

답 ③

4.

$a=\sqrt{2}$에서 $a^2=2$

$b^3=\sqrt{3}$ 에서

$b^2=(b^3)^{\frac{2}{3}}$

$=(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$

$=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

$=3^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ (ab)^2=a^2b^2$

$=2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$

답 ①

5.

$A=\begin{pmatrix}2n & -7\\ -1 & n\end{pmatrix}$에서

$A^{-1}=\frac{1}{2n^2-7}\begin{pmatrix}n & 7\\ 1 & 2n\end{pmatrix}$

이 때, A^{-1}의 $(2,1)$ 의 성분이 $\frac{1}{2n^2-7}$

이므로 A^{-1}의 모든 성분이 자연수가 되려면

$2n^2-7=1$

$2n^2=8$, $n^2=4$

$\therefore\ n=2$ ($\because$ n 은 자연수)

답 ②

6.

$P(A^c)=1-P(A)$

$=\frac{1}{3}$

이므로

$P(A)=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{9}$$

답 ④

7.

$\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 일반항은

$${}_7C_r(2x)^{7-r}\left(\frac{1}{2x}\right)^r={}_7C_r2^{7-2r}x^{7-2r}$$

$7-2r=1$에서 $r=3$이므로

x의 계수는

$${}_7C_3\cdot 2^1=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2$$
$$=70$$

답 ⑤

8.

$6x^2-5x+1=0$에서

$(2x-1)(3x-1)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

$P(X\le 1)<P(X\le 2)$이므로

$P(X\le 1)=\frac{1}{3}$

$P(X\le 2)=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ P(1<X\le 2)=P(X\le 2)-P(X\le 1)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{6}$$

답 ②

9.

1부에서 3팀이 독창, 중창, 합창 순으로 공연하는 순서를 정하는 방법의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1=12$ (가지)

2부에서 남아있는 4팀이 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 공연하는 순서를 정하는 방법의 수는

${}_1C_1\times{}_1C_1\times{}_2P_2=2$ (가지)

따라서, 구하는 방법의 수는

$12\times 2=24$(가지)

답 ④

10.

$f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같고, 두 교점의 x좌표가 1, 3이므로 교점의 좌표는 $(1,1)$, $(3,3)$이다.

$f(1)=1$에서 $a^{1-m}=1$이므로

$1-m=0$

$\therefore\ m=1$

$f(3)=3$에서 $a^{3-m}=3$이므로

$a^2=3$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{3}$

$\therefore\ a+m=1+\sqrt{3}$

답 ③

11.

$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots$

$+(k^2+1)\cdot k!+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$

$=[\,k\cdot(k+1)!\,]+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$

$=\{k+(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$

$=([\,k^2+3k^2+2\,])\cdot(k+1)!$

$=(k+1)(k+2)(k+1)!$

$=(k+1)\cdot[\,(k+2)!\,]$

답 ②

12.

2장의 카드에 적혀있는 두 수의 합이 홀수인 사건을 E라 하고, 주머니 A, B에서 꺼낸 카드에 적혀있는 수가 짝수인 사건을 각각 A, B라 하면 구하는 확률은 $P(A|E)$이다.

$$\therefore\ P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}$$

$$=\frac{P(A\cap E)}{P(A\cap E)+P(B\cap E)}$$

$$=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}$$

$$=\frac{4}{13}$$

답 ②

13.

신입사원의 키를 확률변수 X라고 하면

X는 정규분포 $N(m, 10^2)$을 따른다.

$$P(X\geq 177)=P\left(Z\geq\frac{177-m}{10}\right)$$

$$=0.242$$

$$P\left(0\leq Z\leq\frac{177-m}{10}\right)=0.5-0.242$$

$$=0.258$$

이므로

$\frac{177-m}{10}=0.7$에서

$m=170$

$$\therefore\ P(X\geq 180)=P\left(Z\geq\frac{180-170}{10}\right)$$

$$=P(Z\geq 1)$$

$$=0.5-P(0\leq Z\leq 1)$$

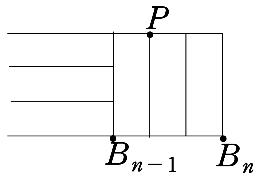
$$=0.5-0.3413$$

$$=0.1587$$

답 ①

14.

(ⅰ) n이 짝수일 때,



B_n에 이르는 최단경로는

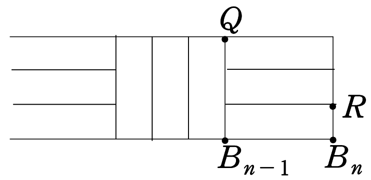
$A\rightarrow B_{n-1}\rightarrow B_n$

또는 $A\rightarrow P\rightarrow B_n$

$$\therefore\ a_n=a_{n-1}\times 1+1\times\frac{3!}{2!1!}$$

$$=a_{n-1}+3$$

(ⅱ) n이 홀수일 때,



B_n에 이르는 최단경로는

$A\rightarrow B_{n-1}\rightarrow B_n$

또는 $A\rightarrow Q\rightarrow R\rightarrow B_n$

$\therefore \; a_n = a_{n-1} \times 1 + 1 \times \dfrac{3!}{2!1!} \times 1$

$= a_{n-1} + 3$

(i),(ii)에서

$a_n = a_{n-1} + 3 \; (n = 2, 3, 4, \cdots)$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다.

$a_1 = \dfrac{4!}{3!\,1!} = 4$ 이므로

$a_3 = 4 + 2 \times 3 = 10$,

$a_7 = 4 + 6 \times 3 = 22$

$\therefore \; a_3 + a_7 = 32$

답 ④

15.

ㄱ. $a = b$이면

$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$= aE$ (E는 단위행렬)

이므로

$A \cdot \left(\dfrac{1}{a} B\right) = E$

$\therefore \; A^{-1} = \dfrac{1}{a} B$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $A^{-1} = \dfrac{1}{a} B$이므로

$A \cdot \dfrac{1}{a} B = \dfrac{1}{a} B \cdot A$

$= E$

$\therefore \; AB = BA$ (참)

ㄷ. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 이므로

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a + b & b \end{pmatrix}$

$a \neq b$이므로

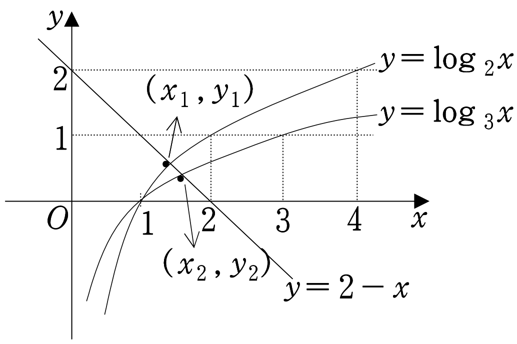
$-a + b \neq 0$

$\therefore \; AB \neq BA$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

16.



ㄱ. $x_1 > 1$, $y_2 < 1$ 이므로

$x_1 > y_2$ (참)

ㄴ. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$는 직선 $y = 2 - x$ 위의 점이므로

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$

$\therefore \; x_2 - x_1 = -(y_2 - y_1)$

$= y_1 - y_2$ (참)

ㄷ. $x_1 y_1 - x_2 y_2 = x_1(2 - x_1) - x_2(2 - x_2)$

$= (x_2^{\,2} - x_1^{\,2}) - 2(x_2 - x_1)$

$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$

$x_2 - x_1 > 0$ 이고,

$x_1 > 1, \; x_2 > 1$ 에서 $x_1 + x_2 > 2$ 이므로

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

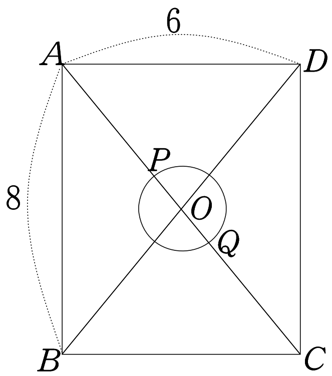
$x_1y_1 - x_2y_2 > 0$

$\therefore \ x_1y_1 > x_2y_2$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

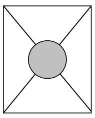
답 ⑤

17.



$\overline{AC} = 10$, $\overline{PQ} = 2$ 이므로

$\overline{AP} = \frac{1}{2}(10-2) = 4$

따라서,  모양의 닮은 도형들을 크기순으로 나열할 때, 인접하는 두 도형의 닮음비는

$10 : 4 = 5 : 2$

이고, 넓이의 비는 $25 : 4$ 이다.

R_1에 있는 원의 넓이는 π 이고, 닮은꼴의 원의 개수는 크기순으로

$1, 4, 4^2, 4^3, \cdots$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi + 4\times\frac{4}{25}\pi + 4^2\times\left(\frac{4}{25}\right)^2\pi + 4^3\times\left(\frac{4}{25}\right)^3\pi + \cdots$$

$$= \frac{\pi}{1-\frac{16}{25}}$$

$$= \frac{25}{9}\pi$$

답 ⑤

18.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2 = a + d = 3 \ \cdots$ ㉠

$a_5 = a + 4d = 24 \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = -4$, $d = 7$

$\therefore \ a_7 = a + 6d$

$= -4 + 6 \cdot 7$

$= 38$

답 38

19.

$(\log_3 x)(\log_3 3x) \le 20$ 에서

$(\log_3 x)(\log_3 3 + \log_3 x) \le 20$

$(\log_3 x)(1 + \log_3 x) \le 20$

$\log_3 x = t$로 놓으면

$t(1+t) \le 20$

$t^2 + t - 20 \le 0$

$(t+5)(t-4) \le 0$

$\therefore \ -5 \le t \le 4$

$-5 \le \log_3 x \le 4$

$3^{-5} \le x \le 3^4$

$\therefore \ \frac{1}{243} \le x \le 81$

따라서, 자연수 x의 최대값은 81 이다.

답 81

20.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

…

따라서, $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$ ($n\geq 2$ 의 자연수)을 추론할 수 있다.

$\therefore\ A^8=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 24 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=24$

답 24

21.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4^{n+1}-3^{n-1}}{4^{n-1}+3^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+4-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{\frac{1}{4}+3\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

$=\frac{0+4-0}{\frac{1}{4}+0}$

$=16$

답 16

22.

$M=4$ 일 때, $N=64$ 이므로

$\log 64=a-0.9\times 4$

$\therefore\ a=3.6+\log 64$

$=3.6+6\log 2$

$=3.6+6\times 0.3$

$=5.4$

$M=x$ 일 때, $N=1$ 이므로

$\log 1=a-0.9x$에서

$0.9x=a=5.4$

$\therefore\ 9x=54$

답 54

23.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

$\therefore\ V(X)=20\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$

$=\frac{25}{9}$

한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore\ V(Y)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{n}{4}$

$V(Y)>V(X)$ 이므로

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

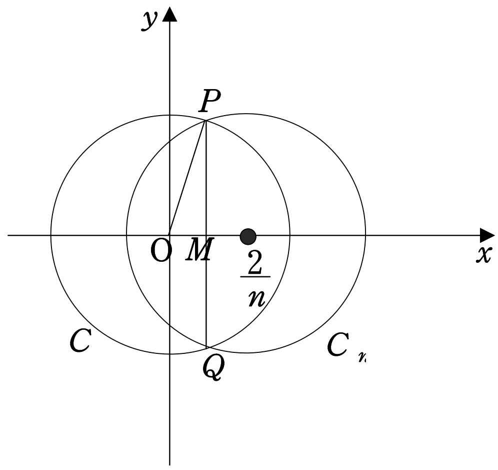
$\dfrac{n}{4} > \dfrac{25}{9}$ 에서

$n > \dfrac{100}{9} = 11.1\times\times\times$

따라서, 자연수 n의 최소값은 12이다.

답 12

24.



삼각형 POM은 직각삼각형이고

$\overline{OP} = 1$, $\overline{OM} = \dfrac{1}{n}$

이므로 $\overline{PM} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}$

$\therefore\ l_n = 2\overline{PM}$

$= 2\sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}$

$(n\,l_n)^2 = n^2 l_n^2$

$= n^2 \cdot 4 \cdot \dfrac{n^2-1}{n^2}$

$= 4(n^2-1)$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n\,l_n)^2}$

$= \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4(n^2-1)}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4(k^2-1)}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$

$\displaystyle\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$= \dfrac{3}{16}$

$\therefore\ p+q = 16+3 = 19$

답 19

25.

체험 프로그램을 1, 2, 3, 4, 5라 하자.

A, B가 함께 1을 선택하는 경우

2, 3, 4, 5 중 각각 1개씩을 선택하는 경우의 수는

${}_4P_2 = 12$(가지)

A, B가 함께 2, 3, 4, 5를 선택하는 경우도 마찬가지이므로 구하는 경우의 수는

$5\times {}_4P_2 = 60$(가지)

답 60

26.

점 $A(1, f(1))$을 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동한 점 A의 좌표는 $(1+m,\ f(1)+n)$이므로

$1+m = 3$에서 $m = 2$

따라서, $f(x) = 2^x$의 그래프를 x축 방향으로 2만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동

한 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=2^{x-2}+n$$

이고, $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$g(0)=2^{-2}+n=1$$ 에서

$$n=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ m+n=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$$

답 ①

27.

6명을 2명, 2명, 2명으로 조를 편성하는 방법의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}$$
$$=15\text{(가지)}$$

A, B가 같은 조에 편성되고 C, D가 서로 다른 조에 편성하려면 E, F를 각각 C, D와 짝을 이루도록 해야하므로 그 방법의 수는

$$2!=2\text{(가지)}$$

따라서, 구하는 확률은

$$\frac{2}{15}$$

답 ③

28.

y좌표가 같은 점끼리 군으로 묶으면

$((0,0)), ((0,3),(1,3),(2,3)),$

$((0,5),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5)), \cdots$

제 n군까지의 항수는

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

이므로 100번째 항은 제10군의 마지막 항이다. 제10군은

$(0,19),(1,19),(2,19),\cdots,(18,19)$

이므로 100번째 항은 $(18, 19)$ 이다.

$$\therefore\ p+q=18+19=37$$

답 ④

29.

ㄱ. $P(|Z|\le c)=1-0.06=0.94$ 이므로

$$P(0\le Z\le c)=\frac{1}{2}P(|Z|\le c)$$
$$=0.47$$

$P(Z>a)=0.05$ 이면

$P(0\le Z\le a)=0.45$

따라서, $P(0\le Z\le a)<P(0\le Z\le c)$ 이므로

$a<c$ (참)

ㄴ. 모평균 $m=75$, 모표준편차 $\sigma=5$,

표본의 크기 $n=25$ 이므로

$$E(\overline{X})=m=75$$

$$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$
$$=\frac{25}{25}=1$$

따라서, 확률변수 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N(75, 1)$ 을 따르므로

$$P(\overline{X}\le c+75)=P(Z\le c)$$
$$=0.5+P(0\le Z\le c)$$
$$=0.5+0.47=0.97 \text{ (참)}$$

ㄷ. $P(\overline{X}>b)=P(Z>b-75)=0.01$ 이므로

$P(0\le Z\le b-75)=0.49$

$P(0\le Z\le c)<P(0\le Z\le b-75)$ 이므로

$c<b-75$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

30.

$\log N$의 지표가 1이므로

$\log N = 1 + \alpha$

$$\frac{1}{2} + \log N = \alpha + \log_4 \frac{N}{8}$$
$$= \alpha + \log_4 N - \log_4 8$$
$$= \alpha + \frac{\log N}{\log 4} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} + 1 + \alpha = \alpha + \frac{1+\alpha}{\log 4} - \frac{3}{2}$$

$3\log 4 = 1 + \alpha$

$\therefore\ \log N = 1 + \alpha = 3\log 4 = \log 64$

$\therefore\ N = 64$

답 64