제 2 교시

# 수리 영역

나 형

성명 | 수험 번호 | —

홀수형

○ 자신이 선택한 유형( '가' 형/ '나' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

**1.** $8^{\frac{2}{3}}+\log_2 8$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

**2.** 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 $A=2B-X$를 만족시키는 행렬 $X$는? [2점]

① $\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & -2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}3 & -2\\1 & 2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}-1 & -2\\3 & 2\end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix}-2 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}-3 & 1\\-2 & 2\end{pmatrix}$

**3.** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

**4.** $a=\sqrt{2}$, $b^3=\sqrt{3}$일 때, $(ab)^2$의 값은? (단, $b$는 실수이다.) [3점]

① $2\cdot 3^{\frac{1}{3}}$ ② $2\cdot 3^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}$

④ $3\cdot 2^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$

**5.** 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2n & -7 \\ -1 & n \end{pmatrix}$의 역행렬 $A^{-1}$의 성분이 모두 자연수가 되는 자연수 $n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

**6.** 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (단, $A^C$는 $A$의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

**7.** $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^7$의 전개식에서 $x$의 계수는? [3점]

① 14 ② 28 ③ 42 ④ 56 ⑤ 70

**8.** 연속확률변수 $X$가 갖는 값의 범위는 $0\leqq X\leqq 3$이고, 확률 $\mathrm{P}(X\leqq 1)$과 확률 $\mathrm{P}(X\leqq 2)$의 값이 이차방정식 $6x^2-5x+1=0$의 두 근일 때, 확률 $\mathrm{P}(1<X\leqq 2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

**9.** 1부와 2부로 나누어 진행하는 어느 음악회에서 독창 2팀, 중창 2팀, 합창 3팀이 모두 공연할 때, 다음 두 조건에 따라 7팀의 공연 순서를 정하려고 한다.

> (가) 1부에는 독창, 중창, 합창 순으로 3팀이 공연한다.
> (나) 2부에는 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 4팀이 공연한다.

이 음악회의 공연 순서를 정하는 방법의 수는? [3점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

**10.** 지수함수 $f(x)=a^{x-m}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 $x$좌표가 1과 3일 때, $a+m$의 값은? [3점]

① $2-\sqrt{3}$ ② $2$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $3$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

**11.** 다음은 모든 자연수 $n$에 대하여

$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(n^2+1)\cdot n!=n\cdot(n+1)!$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> <증명>
> (1) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=2$이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (2) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면
> $$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!=k\cdot(k+1)!$$
> 이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
> $$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$$
> $$=\boxed{\text{(가)}}+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$$
> $$=\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\cdot(k+1)!$$
> $$=(k+1)\cdot\boxed{\text{(다)}}$$
> 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
> 따라서 모든 자연수 $n$에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | $k\cdot(k+1)!$ | $k^2+2k+1$ | $(k+1)!$ |
| ② | $k\cdot(k+1)!$ | $k^2+3k+2$ | $(k+2)!$ |
| ③ | $k\cdot(k+1)!$ | $k^2+3k+2$ | $(k+1)!$ |
| ④ | $(k+1)\cdot(k+1)!$ | $k^2+3k+2$ | $(k+2)!$ |
| ⑤ | $(k+1)\cdot(k+1)!$ | $k^2+2k+1$ | $(k+1)!$ |

**12.** 주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 6, 7, 8, 9, 10의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼냈다. 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수일 때, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 짝수일 확률은? [3점]

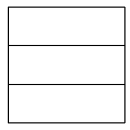
① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{4}{13}$ ③ $\frac{3}{13}$ ④ $\frac{2}{13}$ ⑤ $\frac{1}{13}$

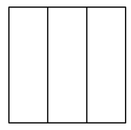
**13.** 어느 회사의 전체 신입 사원 1000명을 대상으로 신체검사를 한 결과, 키는 평균 $m$, 표준편차 10인 정규분포를 따른다고 한다. 전체 신입 사원 중에서 키가 177 이상인 사원이 242명이었다. 전체 신입 사원 중에서 임의로 선택한 한 명의 키가 180 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 키의 단위는 cm이다.) [4점]

| $z$ | $P(0 \leq Z \leq z)$ |
|---|---|
| 0.7 | 0.2580 |
| 0.8 | 0.2881 |
| 0.9 | 0.3159 |
| 1.0 | 0.3413 |

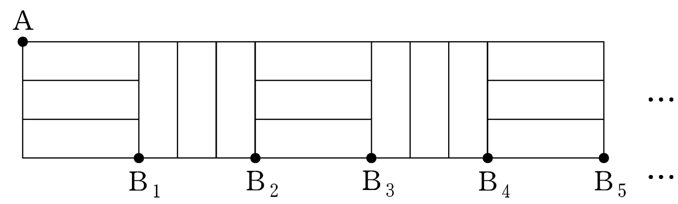
① 0.1587 ② 0.1841 ③ 0.2119 ④ 0.2267 ⑤ 0.2420

**14.** 다음과 같이 정사각형을 가로 방향으로 3등분하여 [도형 1]을 만들고, 세로 방향으로 3등분하여 [도형 2]를 만든다.


[도형 1]


[도형 2]

[도형 1]과 [도형 2]를 번갈아 가며 계속 붙여 아래와 같은 도형을 만든다. 그림과 같이 첫 번째 붙여진 [도형 1]의 왼쪽 맨 위 꼭지점을 A라 하고, [도형 1]의 개수와 [도형 2]의 개수를 합하여 $n$개 붙여 만든 도형의 오른쪽 맨 아래 꼭지점을 $B_n$이라 하자.




꼭지점 A에서 꼭지점 $B_n$까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 $a_n$이라 할 때, $a_3 + a_7$의 값은? [4점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

**15.** 0이 아닌 두 실수 $a$, $b$에 대하여 두 이차정사각행렬 $A$, $B$가 $AB=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a=b$이면 $A$의 역행렬 $A^{-1}$이 존재한다.
ㄴ. $a=b$이면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $a\neq b$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

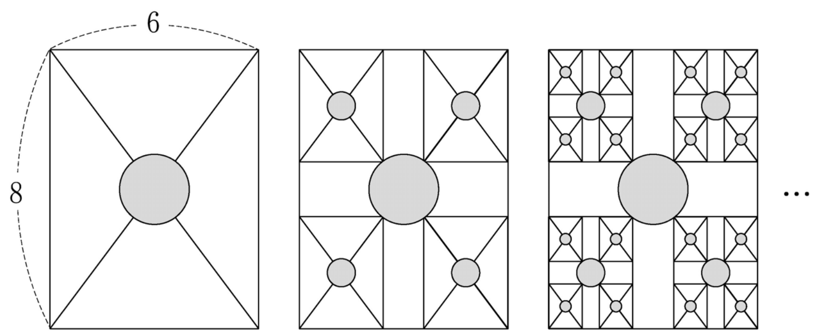
**16.** 직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_1 > y_2$
ㄴ. $x_2-x_1=y_1-y_2$
ㄷ. $x_1y_1 > x_2y_2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**17.** 아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 $R_1$이라 하자.
그림 $R_1$에서 직사각형의 각 꼭지점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 $R_2$라 하자.
그림 $R_2$에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭지점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 $R_3$이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 $n$번째 얻은 그림 $R_n$에 있는 모든 원의 넓이의 합을 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.) [4점]




$R_1$ $R_2$ $R_3$

① $\frac{37}{9}\pi$ ② $\frac{34}{9}\pi$ ③ $\frac{31}{9}\pi$
④ $\frac{28}{9}\pi$ ⑤ $\frac{25}{9}\pi$

**단답형**

**18.** 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2=3$, $a_5=24$일 때, $a_7$의 값을 구하시오. [3점]

**19.** 부등식 $(\log_3 x)(\log_3 3x) \leqq 20$을 만족시키는 자연수 $x$의 최대값을 구하시오. [3점]

**20.** 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^8=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$일 때, $a$의 값을 구하시오. [3점]

**21.** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^n}=2$일 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+4^{n+1}-3^{n-1}}{4^{n-1}+3^{n+1}}$의 값을 구하시오. [3점]

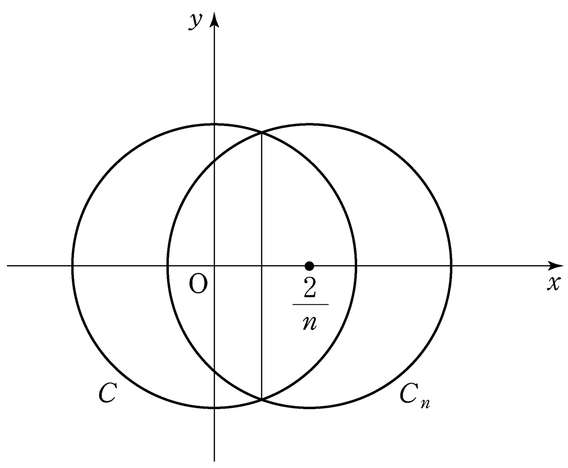
**22.** 어느 지역에서 1년 동안 발생하는 규모 $M$ 이상인 지진의 평균 발생 횟수 $N$은 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$\log N = a-0.9M$ (단, $a$는 양의 상수)

이 지역에서 규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생할 때, 규모 $x$ 이상인 지진은 1년에 평균 한 번 발생한다. $9x$의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.) [4점]

**23.** 한 개의 주사위를 20번 던질 때 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 $X$라 하고, 한 개의 동전을 $n$번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 $Y$라 하자. $Y$의 분산이 $X$의 분산보다 크게 되도록 하는 $n$의 최소값을 구하시오. [4점]

**24.** $n \geq 2$인 자연수 $n$에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 $C$를 $x$축 방향으로 $\frac{2}{n}$만큼 평행이동시킨 원을 $C_n$이라 하자. 원 $C$와 원 $C_n$의 공통현의 길이를 $l_n$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n\,l_n)^2} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]




**25.** 서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 운영하는 어느 수련원이 있다. 이 수련원의 프로그램에 참가한 A와 B가 각각 5종류의 체험 프로그램 중에서 2종류를 선택하려고 한다. A와 B가 선택하는 2종류의 체험 프로그램 중에서 한 종류만 같은 경우의 수를 구하시오. [4점]

**5지선다형**

**26.** 함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 $x$축 방향으로 $m$만큼, $y$축 방향으로 $n$만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$이 점 $\mathrm{A}'(3,\ g(3))$으로 이동된다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{4}$ ② $3$ ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

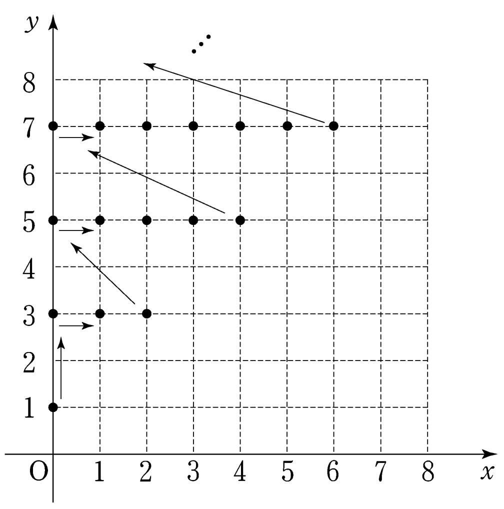
**27.** 6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 임의로 2명씩 짝을 지어 3개의 조로 편성하려고 한다. A와 B는 같은 조에 편성되고, C와 D는 서로 다른 조에 편성될 확률은? [4점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

**28.** 좌표평면 위에 다음 [단계]와 같은 순서로 점을 찍는다.

> [단계 1] $(0,\ 1)$에 점을 찍는다.
> [단계 2] $(0,\ 3)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$에 이 순서대로 3개의 점을 찍는다.
> ⋮
> [단계 $k$] $(0,\ 2k-1)$, $(1,\ 2k-1)$, $(2,\ 2k-1)$, $\cdots$, $(2k-2,\ 2k-1)$에 이 순서대로 $(2k-1)$개의 점을 찍는다. (단, $k$는 자연수이다.)
> ⋮

이와 같은 과정으로 [단계 1]부터 시작하여 점을 찍어 나갈 때, 100번째 찍히는 점의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p+q$의 값은? [4점]




① 46　② 43　③ 40　④ 37　⑤ 34

**29.** 모평균 75, 모표준편차 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 표준정규분포를 따르는 확률변수 $Z$에 대하여 양의 상수 $c$가

$$P(|Z|>c)=0.06$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

> <보 기>
> ㄱ. $P(Z>a)=0.05$인 상수 $a$에 대하여 $c>a$이다.
> ㄴ. $P(\overline{X}\leq c+75)=0.97$
> ㄷ. $P(\overline{X}>b)=0.01$인 상수 $b$에 대하여 $c<b-75$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**단답형**

**30.** 두 자리의 자연수 $N$에 대하여 $\log N$의 가수가 $\alpha$일 때,

$$\frac{1}{2}+\log N=\alpha+\log_4 \frac{N}{8}$$

을 만족시키는 $N$의 값을 구하시오. [4점]

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.