

(홀수형)

2007학년도 대학수학능력시험 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$$(\log_3 27) \times 8^{\frac{1}{3}} = \log_3 3^3 \times (2^3)^{\frac{1}{3}} = 3 \times 2 = 6$$

답 ④

2.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$(A + B)^{-1} = \frac{1}{4-3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$4 - 1 - 3 + 1 = 1$$

답 ①

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

답 ②

4.

$f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최대값 $M=4^3=64$ 를 갖고,

$g(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최소값

$$m = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ 을 갖는다.}$$

$$\therefore Mm = 8$$

답 ①

5.

$A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$ 이므로

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$

답 ③

6.

$a, 0, b$ 가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$a + b = 2 \cdot 0$$

$$\therefore a + b = 0 \dots \text{㉠}$$

$2b, a, -7$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = -7 \times 2b$$

$$\therefore a^2 = -14b \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하면 $a^2 = 14a$

$$\therefore a = 14 (\because a \neq 0)$$

답 ③

7.

$(x-a)^5$ 의 전개식에서 x 항은

$${}_5C_1 x^1 (-a)^4 = 5a^4 x$$

$(x-a)^5$ 의 전개식에서 상수항은

$${}_5C_0 x^0 (-a)^5 = -a^5$$

이 때, $5a^4 - a^5 = a^4(5-a) = 0$ 이므로

$$a = 5 (\because a \neq 0)$$

답 ⑤

8.

$$\log_a c : \log_b c = 2:1 \quad \text{이} \quad \text{르}$$

$$\log_a c = 2 \log_b c$$

이 때, $\frac{1}{\log_c a} = \frac{2}{\log_c b}$ 이므로

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b = 2$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

답 ④

9.

세차시간 X 는 정규분포 $N(30, 2^2)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X \geq 33) = P\left(\frac{X-30}{2} \geq \frac{33-30}{2}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.5)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

답 ②

10.

표본의 크기 100이 충분이 크므로 모표준편차 σ 는 표본표준편차로 대신할 수 있다.

즉, $\sigma = 20$, $n = 100$ 이고 표본평균이 $\bar{X} = 245$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \text{에}$$

서

$$\left[245 - 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}, 245 + 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} \right]$$

$$\therefore [241.08, 248.92]$$

따라서 이 신뢰구간에 속하는 정수는 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248의 7개다.

답 ③

11.

$I(t) = 10 + 990 \times a^{-5t}$ 에 $I(t) = 21$ 을 대입하면

$$21 = 10 + 990 \times a^{-5t} \text{이므로 } a^{-5t} = \frac{11}{990}$$

$$\therefore a^{5t} = \frac{990}{11} = 90$$

$$\therefore 5t = \log_a 90 = \frac{\log 9 \times 10}{\log a} = \frac{2 \log 3 + 1}{\log a}$$

$$\therefore t = s = \frac{1 + 2 \log 3}{5 \log a}$$

답 ①

12.

ㄱ. $B^2 = B$ 의 양변에 B^{-1} 을 곱하면 $B^{-1}B^2 = B^{-1}B$

$$\therefore B = E \text{ (참)}$$

ㄴ. $(E-A)^2 = E - 2A + A^2$

$$= E - 2A + E = 2(E-A)$$

$$(E-A)^3 = (E-A)^2(E-A) = \{2(E-A)\}(E-A)$$

$$= 2(E-A)^2 = 2^2(E-A)$$

...

$$\therefore (E-A)^5 = 2^4(E-A) \text{ (참)}$$

ㄷ. $(E-ABA)^2 = E - 2ABA + (ABA)^2$

이 때,

$$(ABA)^2 = (ABA)(ABA) = ABA^2BA$$

$$= ABEBA = AB^2A = ABA \text{ 이므로}$$

$$(E-ABA)^2 = E - 2ABA + ABA = E - ABA$$

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13.

$$A(n) = \{x \mid 0 < x \leq 2^n\},$$

$$B(n) = \{x \mid 0 < x \leq 4^n\} \text{이다.}$$

ㄱ. $2^1 = 2$ 이므로

$$A(1) = \{x \mid 0 < x \leq 2\} \text{ (거짓)}$$

ㄴ. $2^4 = 4^2$ 이므로

$$A(4) = B(2) = \{x \mid 0 < x \leq 16\} \text{ (참)}$$

ㄷ. $A(n) \subset B(n)$ 이면 $0 < 2^n \leq 4^n$ 이므로 $2^{-n} \geq 4^{-n} > 0$ 이다.

$$\therefore B(-n) \subset A(-n) \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14.

3개의 상자 A, B, C에 서로 다른 5개의 공을 임의로 넣는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

이 때, 상자에 있는 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 상자는 많아야 1개이므로 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 경우가 존재하려면 세 상자 중 어느 한 상자에는 3, 4, 5가 적힌 공은 반드시 들어가고 또한, 이 상자에 1, 2가 적힌 공 중 적어도 하나가 들어가야 한다.

따라서 이 경우의 수는

$${}_3C_1 \times ({}_3\Pi_2 - {}_2\Pi_2) = 3(9 - 4) = 15$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$243 - 15 = 228$$

답 ②

다른 풀이

3개의 상자 A, B, C에 서로 다른 5개의 공을 임의로 넣는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

이 때, 상자에 있는 공에 적힌 숫자의 합이 13 이상인 상자가 존재하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 세 상자 중 어느 한 상자에 1, 3, 4, 5가 들어가고 2는 나머지 두 상자 중 어느 하나에 들어가는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6 \text{ (가지)}$$

(ii) 세 상자 중 어느 한 상자에 2, 3, 4, 5가 들어가고 1은 나머지 두 상자 중 어느 하나에 들어가는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6 \text{ (가지)}$$

(iii) 세 상자 중 어느 한 상자에 1, 2, 3, 4, 5가 들어가는 경우의 수는

$$3 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$243 - (6 + 6 + 3) = 228$$

15.

$3n$ 장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}C_2$ 이다.

$a = k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n-1$)이면 $3a < b$ 를 만족시키는 b 는 $3k+1, 3k+2, \dots, 3n$ 중의 하나이어야 하므로 b 의 경우의 수는 $3n - 3k = 3(n - k)$ 이다.

$$\therefore P_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3(n-k)}{{}_{3n}C_2}$$

이 때,

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3(n-k)$$

$$= 3n(n-1) - \frac{3}{2}n(n-1) = \frac{3}{2}n(n-1) \text{ 이므로}$$

$$P_n = \frac{\frac{3}{2}n(n-1)}{{}_{3n}C_2}$$

이 때, ${}_{3n}C_2 = \frac{3n(3n-1)}{2}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2-3n}{2}}{\frac{9n^2-3n}{2}} = \frac{1}{3}$$

이상에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은

$$3(n-k), \frac{3}{2}n(n-1), \frac{1}{3}$$

이다.

답 ①

16.

함수 $y=k\sqrt{x}$ 의 그래프가 정사각형 A_n 과 만날 필요충분조건은 두 점

$(4n^2, n^2), (n^2, 4n^2)$ 을 양 끝점으로 하는 선분과 만날 때이다.

함수 $y=k\sqrt{x}$ 의 그래프가 점 $(4n^2, n^2)$ 을 지날 조건은

$$n^2 = k\sqrt{4n^2} \quad \therefore k = \frac{n}{2}$$

함수 $y=k\sqrt{x}$ 의 그래프가 점 $(n^2, 4n^2)$ 을 지날 조건은

$$4n^2 = k\sqrt{n^2} \quad \therefore k = 4n$$

따라서 a_n 은 부등식 $\frac{n}{2} \leq k \leq 4n$ 을 만족하는 자연수 k 의 개수이다.

(i) n 이 홀수일 때

$$a_n = 4n - \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}$$

(ii) n 이 짝수일 때

$$a_n = 4n - \frac{n}{2} + 1 = \frac{7}{2}n + 1$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} \frac{7}{2}n + \frac{1}{2} & (n \text{이 홀수}) \\ \frac{7}{2}n + 1 & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\neg. a_5 = \frac{7}{2} \times 5 + \frac{1}{2} = 18 \text{ (거짓)}$$

ㄴ

$$a_{n+2} = \begin{cases} \frac{7}{2}(n+2) + \frac{1}{2} = a_n + 7 & (n \text{이 홀수}) \\ \frac{7}{2}(n+2) + 1 = a_n + 7 & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore a_{n+2} - a_n = 7 \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \square. \sum_{k=1}^{10} a_k &= (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_9 + a_{10}) \\ &= 12 + (12 + 14) + (12 + 2 \times 14) + \dots + (12 + 4 \times 14) \\ &= \frac{5}{2} \{12 + (12 + 56)\} = 200 \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

17.

R_1 의 정사각형의 한 변의 길이를 a 라 하면 빗변의 길이는 $3a$ 이므로 $3a = \sqrt{2}$ 에서

$$a = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore S_1 = a^2 = \frac{2}{9}$$

R_1 에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의

한 등변의 길이는 $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로 R_1 에서

새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \text{ 이다.}$$

따라서 R_1 에서 새로 색칠한 2개의 정사각

형의 넓이의 합은 $2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^2$ 이다.

$$\therefore S_2 = S_1 + 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{9}$$

R_2 에서 합동인 2^2 개의 직각이등변삼각형의 한 등변의 길이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ 이므로 R_2 에서 새로 색칠된 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{9}$ 이다.

따라서 R_2 에서 새로 색칠한 2^2 개의 정사각형의 넓이의 합은

$$2^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{9}\right)^2 = 4 \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^2 \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_3 &= S_2 + \frac{2}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

이와 같은 방법으로 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같음을 추론할 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

답 ⑤

18.

수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열일 때, a_3, a_6, a_9 도 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(a_6)^2 = a_3 \times a_9$$

$$\therefore a_9 = \frac{16^2}{2} = 128$$

답 128

다른 풀이

공비를 r 라 하면 $\frac{a^6}{a^3} = \frac{16}{2} = r^3$ 이므로

$$r^3 = 8 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a_9 = a^6 \times r^3 = 16 \times 8 = 128$$

19.

$$(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x = \log_2 x (\log_2 x - 4) = 0$$

에서

$$\log_2 x = 0 \text{ 또는 } \log_2 x = 4$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2^4 = 16$$

$$\therefore \alpha + \beta = 1 + 16 = 17$$

답 17

20.

등비수열의 수렴조건은 $-1 < (\text{공비}) \leq 1$ 이므로

$$-1 < \frac{2x-1}{4} \leq 1 \quad \therefore -\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$$

따라서 정수 x 의 개수는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개다.

$$\therefore k = 4$$

$$\therefore 10k = 40$$

답 40

21.

$$(A+E)^2 = A^2 + 2A + E = A \text{ 이므로}$$

$$A(A+E) = -E \text{에서 } A(-A-E) = E$$

$$\therefore A^{-1} = -A - E$$

$$\therefore A + A^{-1} = -E$$

$$\text{따라서 } (A + A^{-1}) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = -E \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore p^2 + q^2 = 9 + 49 = 58$$

답 58

22.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)라 하면

$$a_n = (n-1)d$$

$$\therefore a_{n+1} = dn$$

이 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n d(k-1) \\ &= d \sum_{k=1}^{n-1} k = d \times \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

이고,

$a_{n+1}b_n = dn \cdot b_n = \frac{dn(n-1)}{2}$ 이어야 하
므로

$$b_n = \frac{n-1}{2} \quad (\text{단, } n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore b_{27} = \frac{27-1}{2} = 13$$

답 13

23.

어른 2명은 반드시 앞줄과 뒷줄에 한 명씩
앉아야 하므로 어른을 앉히는 방법의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2P_1 \times {}_3P_1 = 12$$

어린이 3명을 나머지 3개의 자리에 앉히는
방법의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는 $12 \times 6 = 72$

답 72

다른 풀이

5명을 5개의 자리에 앉히는 경우의 수는

$$5! = 120$$

어른 2명은 모두 앞줄에 앉고, 어린이 3명
은 모두 뒷줄에 앉는 경우의 수는

$$2! \times 3! = 12$$

어른 2명은 모두 뒷줄에 앉고, 어린이 3명
은 나머지 3개의 자리에 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 \times 3! = 36$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 - (12 + 36) = 72$$

24.

$0 \leq X \leq a$ 에서 확률밀도함수의 그래프와 x
축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하
므로

$$\frac{1}{2} \times ab = 1 \quad \therefore ab = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{b}{2} < P(0 \leq X \leq 2) = b$$

므로 $\frac{a}{2} < 2$ 이다.

이 때,

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \left(\frac{b}{2} \times \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{8}$$

$$\text{이므로 } \frac{a}{8} = \frac{b}{2} \quad \therefore a = 4b$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a^2 = 8, \quad b^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a^2 + 4b^2 = 8 + 2 = 10$$

답 10

25.

점 P의 x좌표를 a라 하면

$$k \cdot 3^a = 3^{-a}$$

따라서 $k \cdot 3^a = \frac{1}{3^a}$ 이므로 양변에 3^a 을 곱하여 정리하면

$$(3^a)^2 = 3^{2a} = \frac{1}{k}$$

이 때, 점 Q의 x좌표는 $2a$ 이므로

$$k \cdot 3^{2a} = -4 \cdot 3^{2a} + 8$$

이 때, $3^{2a} = \frac{1}{k}$ 이므로

$$k \cdot \frac{1}{k} = -4 \cdot \frac{1}{k} + 8$$

$k > 0$ 이므로 $1 = -\frac{4}{k} + 8$

$$\therefore k = \frac{4}{7}$$

$$\therefore 35k = 20$$

답 20

26.

$a_1 = 2$ 이므로 $a_{n+1} = 2a_n + 2$ 에

$n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하면

$$a_2 = 2 \times 2 + 2 = 6,$$

$$a_3 = 2 \times 6 + 2 = 14,$$

$$a_4 = 2 \times 14 + 2 = 30,$$

$$a_5 = 2 \times 30 + 2 = 62,$$

$$a_6 = 2 \times 62 + 2 = 126,$$

$$a_7 = 2 \times 126 + 2 = 254,$$

$$a_8 = 2 \times 254 + 2 = 510,$$

$$a_9 = 2 \times 510 + 2 = 1022,$$

$$a_{10} = 2 \times 1022 + 2 = 2046$$

답 ④

27.

$0 < x < 1$ 일 때, $1 < 10^x < 10$ 이므로

3으로 나눈 나머지가 2인 자연수 10^x 는

$$10^x = 2, 5, 8$$

$\therefore x = \log 2, \log 5, \log 8$

따라서 구하는 모든 x 의 값의 합은

$$\log 2 + \log 5 + \log 8 = \log 2 \times 5 + 3 \log 2 = 1 + 3 \log 2$$

답 ③

28.

ㄱ. 세 개의 동전을 던질 때 앞면의 수가 1이하일 확률은

$$P(A) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \quad (\text{참})$$

ㄴ. 3개 모두 같은 면이 나오는 동시에 앞면의 수가 1이하일 확률은

$$P(A \cap B) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad (\text{참})$$

ㄷ. 3개 모두 같은 면이 나올 확률은

$$P(B) = 2 \times {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 독립이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

29.

두 버튼을 누를 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 이고, 여섯 번 중에서 채널증가 버튼과 채널감소 버튼을 각각 3번씩 눌러야 하므로 구하는 확률은

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}$$

다른 풀이

↑, ↓ 중 중복을 허락하여 6개를 임의로 나열하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_6 = 2^6$$

↑ 3개, ↓ 3개를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5 \cdot 4}{2^6} = \frac{5}{16}$$

30.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix} \text{ 이므로 } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & p^2 \end{pmatrix},$$

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5p \end{pmatrix} \text{ 이다.}$$

$$\therefore D(A^2) = p^2, D(5A) = 25p$$

따라서 $p^2 = 25p$ 이므로

$$p = 0 \text{ 또는 } p = 25$$

따라서 모든 상수 p 의 값의 합은 25이다.