제 2 교시 수학 영역

5지선다형

1. $\log_2 \frac{8}{9} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} 18$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$일 때, $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+1}{f(x)+x}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_6 = 21S_2,\ a_6 - a_2 = 15$$

일 때, a_3의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

4. 함수 $f(x) = x^3 + ax + b$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h} = 5$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

5. $\sin\theta < 0$이고 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{5}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{21}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{21}}{2}$

6. 모든 실수 t에 대하여 다항함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 $-6t^2 + 2t$이다. 곡선 $y = f(x)$가 점 $(1,\ 1)$을 지날 때, $f(-1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 다음 조건을 만족시키는 모든 유리수 r의 값의 합은? [3점]

> (가) $1 < r < 9$
> (나) r를 기약분수로 나타낼 때, 분모는 7이고 분자는 홀수이다.

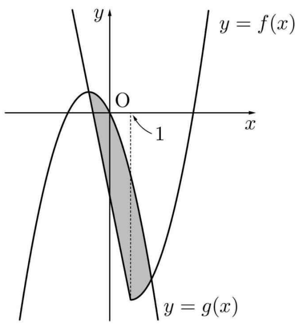
① 102 ② 108 ③ 114
④ 120 ⑤ 126

8. 두 함수

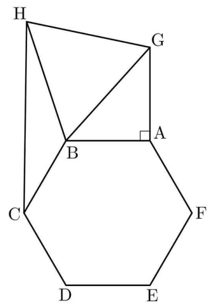
$$f(x)=\begin{cases} -5x-4 & (x<1) \\ x^2-2x-8 & (x \geq 1) \end{cases}, \quad g(x)=-x^2-2x$$

에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{34}{3}$ ② 11 ③ $\frac{32}{3}$
④ $\frac{31}{3}$ ⑤ 10



9. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에 대하여 점 G를 $\overline{AG}=\sqrt{5}$, $\angle BAG=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 점 H를 삼각형 BGH가 정삼각형이 되도록 잡는다. 선분 CH의 길이는? (단, 점 G는 정육각형의 외부에 있고, 두 선분 AF, BH는 만나지 않는다.) [4점]



① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{21}$ ③ $\sqrt{22}$
④ $\sqrt{23}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

10. 함수

$$f(x)=\int_a^x (3t^2+bt-5)dt \quad (a>0)$$

이 $x=-1$에서 극값 0을 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

11. 함수 $f(x)=-2^{|x-a|}+a$의 그래프가 x축과 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이다. 함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최댓값 q를 가질 때, $p+q$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

12. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ a-f(-x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-4$
> (나) 함수 $g(x)$의 극솟값은 0이다.

$g(-a)$의 값은? [4점]

① -40 ② -36 ③ -32
④ -28 ⑤ -24

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = -3$, $a_{20} = 1$이고, 3 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n-1}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

14. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - kx$$

라 하고, 실수 a와 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < a \text{ 또는 } x > a+1) \\ -f(x) & (a \le x \le a+1) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 실수 k, a의 값에 관계없이 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $k=4$일 때, 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 불연속인 실수 p의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 3이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (k, a)의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

15. 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\log_4(-x) & (x<0)\\ 2-\log_2 x & (x>0)\end{cases}$$

이 있다. 직선 $y=a$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하고, 직선 $y=b$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 두 점 C, D의 x좌표를 각각 x_3, x_4 $(x_3<x_4)$라 하자. $\left|\frac{x_2}{x_1}\right|=\frac{1}{2}$이고 두 직선 AC와 BD가 서로 평행할 때, $\left|\frac{x_4}{x_3}\right|$의 값은? (단, a, b는 $a\neq b$인 상수이다.) [4점]

① $3+3\sqrt{3}$ ② $5+2\sqrt{3}$ ③ $4+3\sqrt{3}$
④ $6+2\sqrt{3}$ ⑤ $5+3\sqrt{3}$

단답형

16. $a^4-8a^2+1=0$일 때, a^4+a^{-4}의 값을 구하시오. [3점]

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left(x^3-2x\right)f(x)$$

라 하자. $f(2)=-3$, $f'(2)=4$일 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 y절편을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=50,\ \sum_{k=1}^{7}(a_k+2)^2=300$$

일 때, $\sum_{k=1}^{7}{a_k}^2$의 값을 구하시오. [3점]

19. x에 대한 방정식

$$x^3-\frac{3n}{2}x^2+7=0$$

의 1보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 가속도 $a(t)$가

$$a(t)=3t^2-8t+3$$

이다. 점 P가 시각 $t=1$과 시각 $t=\alpha\ (\alpha>1)$에서 운동 방향을 바꿀 때, 시각 $t=1$에서 $t=\alpha$까지 점 P가 움직인 거리는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

21. 두 양수 a, b에 대하여 두 함수

$$y=3a\tan bx,\ y=2a\cos bx$$

의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 0보다 크고 $\frac{5\pi}{2b}$보다 작은 세 점을 x좌표가 작은 점부터 x좌표의 크기순으로 A_1, A_2, A_3이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$을 지름으로 하는 원이 점 A_2를 지나고 이 원의 넓이가 π일 때, $\left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=x|f(x)|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 극한 $\lim_{h\to0+}\left\{\frac{g(t+h)}{h}\times\frac{g(t-h)}{h}\right\}$가 양의 실수로 수렴하는 실수 t의 개수는 1이다.
(나) x에 대한 방정식 $\{g(x)\}^2+4g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$g(3)$의 값을 구하시오. [4점]

제 2 교시 수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	a	b	1

$\mathrm{E}(X)=5$일 때, $b-a$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

24. 한 개의 주사위와 한 개의 동전이 있다. 이 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수만큼 반복하여 이 동전을 던질 때, 동전의 앞면이 나오는 횟수가 5일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{48}$ ② $\frac{1}{24}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{5}{48}$

25. 다항식 $(ax+1)^7$의 전개식에서 x^5의 계수와 x^3의 계수가 서로 같을 때, x^2의 계수는? (단, a는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 28 ② 35 ③ 42
④ 49 ⑤ 56

26. 육군사관학교 모자 3개, 해군사관학교 모자 2개, 공군사관학교 모자 3개가 있다. 이 8개의 모자를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝에는 서로 다른 사관학교의 모자가 놓이도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 사관학교의 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

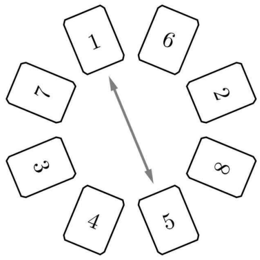
① 360 ② 380 ③ 400
④ 420 ⑤ 440

27. 7개의 문자 a, b, c, d, e, f, g를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 임의로 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

> (가) a와 b는 이웃하고, a와 c는 이웃하지 않는다.
> (나) c는 a보다 왼쪽에 있다.

① $\frac{1}{42}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{14}$
④ $\frac{2}{21}$ ⑤ $\frac{5}{42}$

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 한 장의 카드와 이 카드로부터 시계 방향으로 네 번째 위치에 놓여 있는 카드는 서로 마주 보는 위치에 있다고 하자. 서로 마주 보는 위치에 있는 카드는 4쌍이 있다. 예를 들어, 그림에서 숫자 1, 5가 적혀 있는 두 장의 카드는 서로 마주 보는 위치에 있고, 숫자 1, 4가 적혀 있는 두 장의 카드는 서로 마주 보는 위치에 있지 않다.



이 8장의 카드를 일정한 간격을 두고 원형으로 임의로 배열하는 시행을 한다. 이 시행에서 서로 마주 보는 위치에 있는 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차가 모두 같을 때, 숫자 1이 적혀 있는 카드와 숫자 2가 적혀 있는 카드가 서로 이웃할 확률은?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

단답형

29. 어느 공장에서 생산하는 과자 1개의 무게는 평균이 150g, 표준편차가 9g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 과자 중에서 임의로 n개를 택해 하나의 세트 상품을 만들 때, 세트 상품 1개에 속한 n개의 과자의 무게의 평균이 145g 이하인 경우 그 세트 상품은 불량품으로 처리한다. 이 공장에서 생산하는 세트 상품 중에서 임의로 택한 세트 상품 1개가 불량품일 확률이 0.07 이하가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) = 0.43$으로 계산한다.) [4점]

30. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 연필 5자루와 같은 종류의 공책 5권을 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있고, 공책을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 학생 A가 받는 연필의 개수는 4 이상이다.
(나) 공책보다 연필을 더 많이 받는 학생은 1명뿐이다.

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=4^{n+1}-3n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^{n-1}}$의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

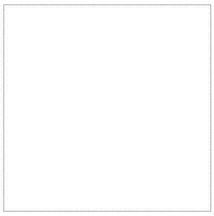
24. 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x^2}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{n+k}{n}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}+\ln 2$ ③ $1+\frac{1}{2}\ln 2$ ④ $1+\ln 2$ ⑤ $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$

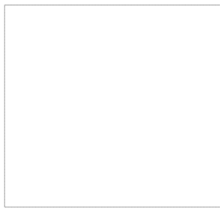
25. 곡선 $\pi\cos y + y\sin x = 3x$가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 이 곡선 위의 점 A에서의 접선의 기울기는? [3점]

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

26. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. 호 $\mathrm{A_1B_1}$의 삼등분점 중 점 $\mathrm{A_1}$에 가까운 점을 $\mathrm{C_1}$, 점 $\mathrm{B_1}$에 가까운 점을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 사각형 $\mathrm{A_1C_1D_1B_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 중심이 O이고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 접하는 원이 선분 $\mathrm{OA_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_2}}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$를 잡고, 사각형 $\mathrm{A_2C_2D_2B_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1



R_2

$\cdots$

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

27. 그림과 같이 곡선

$$y=(1+\cos x)\sqrt{\sin x}\ \left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

와 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

① $\frac{5}{12}$　② $\frac{13}{24}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{19}{24}$　⑤ $\frac{11}{12}$

28. 양의 실수 t와 상수 k $(k>0)$에 대하여 곡선 $y=(ax+b)e^{x-k}$이 직선 $y=tx$와 점 $(t,\ t^2)$에서 접하도록 하는 두 실수 a, b의 값을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. $f(k)=-6$일 때, $g'(k)$의 값은? [4점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

단답형

29. $0 < t < \frac{\pi}{6}$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \sin 2x$ 위의 점 $(t,\ \sin 2t)$를 P라 하자. 원점 O를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원이 곡선 $y = \sin 2x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 이 원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 R라 하자. 곡선 $y = \sin 2x$와 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} \frac{S(t)}{t^2} = k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

30. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x) = \frac{\ln x + k}{x}$이다.
>
> (나) 곡선 $y = f(x)$는 x축과 두 점 $\left(\frac{1}{e^2},\ 0\right)$, $(1,\ 0)$에서 만난다.

$t > -\frac{1}{2}$인 실수 t에 대하여 직선 $y = t$가 곡선 $y = f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표 중 작은 값을 $g(t)$라 하자. 곡선 $y = g(x)$와 x축, y축 및 직선 $x = \frac{3}{2}$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{ae + b}{e^3}$이다. $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이고, a, b는 유리수이다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{B}(-2,\ 3,\ 1)$과 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$일 때, 점 P의 x좌표는? [2점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

24. 두 쌍곡선

$$x^2-9y^2-2x-18y-9=0,$$
$$x^2-9y^2-2x-18y-7=0$$

중 어느 것과도 만나지 않는 직선의 개수는 2이다. 이 두 직선의 방정식을 각각 $y=ax+b$, $y=cx+d$라 할 때, $ac+bd$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{5}{9}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{7}{9}$

25. 좌표평면의 점 A(0, 2)와 원점 O에 대하여 제1사분면의 점 B를 삼각형 AOB가 정삼각형이 되도록 잡는다. 점 C$(-\sqrt{3},\ 0)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$의 값은? [3점]

① $\sqrt{13}$ ② $\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{15}$
④ 4 ⑤ $\sqrt{17}$

26. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{AE}}=3$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 선분 CG를 2 : 1로 내분하는 점 I에 대하여 평면 BID와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{7}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

27. 두 점 $\mathrm{F}(2, 0)$, $\mathrm{F}'(-2, 0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 12인 타원과 점 F를 초점으로 하고 직선 $x=-2$를 준선으로 하는 포물선이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 APF의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P는 직선 AF 위의 점이 아니다.) [3점]

① $\sqrt{6}+3\sqrt{14}$ ② $2\sqrt{6}+3\sqrt{14}$ ③ $2\sqrt{6}+4\sqrt{14}$
④ $2\sqrt{6}+5\sqrt{14}$ ⑤ $3\sqrt{6}+5\sqrt{14}$

28. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{2}{5}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$

점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 직선과 직선 AC가 만나는 점을 D라 하자. $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}| = \sqrt{42}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① $\frac{\sqrt{14}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{14}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{14}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{14}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{14}}{2}$

단답형

29. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$ $(p>0)$이 점 $(-p, 0)$을 지나는 직선과 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{FA}} : \overline{\mathrm{FB}} = 1 : 3$이다. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 BFH의 넓이는 $46\sqrt{3}$이다. p^2의 값을 구하시오. [4점]

30. 좌표공간에 두 개의 구

$$C_1 : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 1,$$

$$C_2 : (x-3)^2 + (y-8)^2 + (z-5)^2 = 4$$

가 있다. 구 C_1 위의 점 P와 구 C_2 위의 점 Q, zx평면 위의 점 R, yz평면 위의 점 S에 대하여 $\overline{\mathrm{PR}} + \overline{\mathrm{RS}} + \overline{\mathrm{SQ}}$의 값이 최소가 되도록 하는 네 점 P, Q, R, S를 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{S_1}$이라 하자. 선분 $\mathrm{R_1S_1}$ 위의 점 X에 대하여

$$\overline{\mathrm{P_1R_1}} + \overline{\mathrm{R_1X}} = \overline{\mathrm{XS_1}} + \overline{\mathrm{S_1Q_1}}$$

일 때, 점 X의 x좌표는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2024학년도 사관학교 해설

1	④	2	②	3	⑤	4	③	5	①
6	⑤	7	④	8	③	9	②	10	①
11	②	12	④	13	⑤	14	①	15	⑤
16	62	17	16	18	184	19	12	20	11
21	29	22	54						
[확률과 통계]				23	③	24	①	25	②
26	④	27	⑤	28	④	29	8	30	166
[미적분]				23	⑤	24	②	25	③
26	①	27	④	28	③	29	20	30	13
[기하]				23	④	24	⑤	25	①
26	②	27	③	28	⑤	29	23	30	17

1) ④

$\log_2\frac{8}{9}+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}18=\log_2\frac{8}{9}+\log_2 18$

$=\log_2\left(\frac{8}{9}\times 18\right)$

$=\log_2 2^4=4$

2) ②

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{f(x)+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{f(x)}{x}+1}=\frac{3}{2+1}=1$$

3) ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r>0)$라 하면

$S_6=21S_2$에서

$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=21\times a(1+r)$ (단, $r\neq 1$)

$(r^2-1)(r^4+r^2+1)=21(r^2-1)$

$r^4+r^2+1=21$, $(r^2-4)(r^2+5)=0$

$r^2=4$

$\therefore\ r=2$

$a_6-a_2=15$에서 $ar^5-ar=15$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a_3=\frac{1}{2}\times 2^2=2$

4) ③

함수 $f(x)=x^3+ax+b$에 대하여

$f'(x)=3x^2+a$

또한 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=5$에서 $h\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=0$이므로 $f(1)=0$ …… ㉠

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1+a+b=0$, $3+a=5$

이 두 식을 연립하면 $a=2$, $b=-3$

$\therefore\ ab=-6$

5) ①

$\sin\theta<0$이고 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{5}$이므로

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{2}{5}$, $\cos\theta=\frac{2}{5}$

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{21}}{2}$

6) ⑤

$f'(t)=-6t^2+2t$이므로

$f(t)=\int(-6t^2+2t)dt$

$=-2t^3+t^2+C$ (C는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $f(1)=1$

$1=-2+1+C$, $C=2$

$\therefore\ f(x)=-2x^3+x^2+2$

$\therefore\ f(-1)=5$

7) ④

1과 9 사이에 있는 유리수 r를 기약분수로 나타낼 때, 분자는 홀수이고 7을 분모로 하는 모든 유리수 r의 값의 합은

$\left(\frac{9}{7}+\frac{11}{7}+\frac{13}{7}+\cdots+\frac{59}{7}+\frac{61}{7}\right)-\left(\frac{21}{7}+\frac{35}{7}+\frac{49}{7}\right)$

$=\frac{1}{7}\times\frac{27(9+61)}{2}-(3+5+7)=120$

8) ③

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

(i) $x<1$일 때

$-5x-4=-x^2-2x$에서 $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=-1$

(ii) $x\geq 1$일 때

$x^2-2x-8=-x^2-2x$에서 $2x^2-8=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=2$

(i), (ii)에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-1}^{1}\{-x^2-2x-(-5x-4)\}dx$

$\quad+\int_{1}^{2}\{-x^2-2x-(x^2-2x-8)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}(-x^2+3x+4)dx+\int_{1}^{2}(-2x^2+8)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^1+\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_1^2$

$=\frac{32}{3}$

9) ②

$\overline{AG}=\sqrt{5}$, $\overline{AB}=2$이므로 직각삼각형 GBA에서 $\overline{BG}=3$이고

삼각형 BGH는 정삼각형이므로 $\overline{BH}=3$

$\angle GBA=\theta$라 하면

$\cos\theta = \dfrac{2}{3}$, $\angle \mathrm{CBH} = 2\pi - \left(\dfrac{\pi}{3}\times 3 + \theta\right) = \pi - \theta$

삼각형 CBH에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CH}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{BH}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BH}}\times\cos(\angle \mathrm{CBH})$

$= \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{BH}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BH}}\times\cos(\pi-\theta)$

$= 2^2 + 3^2 + 2\times 2\times 3\times\dfrac{2}{3}$

$= 21$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CH}} = \sqrt{21}$

10) ①

$f(x) = \displaystyle\int_a^x (3t^2 + bt - 5)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = 3x^2 + bx - 5$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지므로

$f(-1)=0$, $f'(-1)=0$

$f'(-1)=0$에서 $3-b-5=0$

$\therefore\ b=-2$

이때

$f(-1) = \displaystyle\int_a^{-1}(3t^2-2t-5)dt$

$= \left[t^3 - t^2 - 5t\right]_a^{-1}$

$= -a^3 + a^2 + 5a + 3$

$= 0$

에서

$a^3 - a^2 - 5a - 3 = 0$, $(a+1)^2(a-3) = 0$

$\therefore\ a=3$ ($\because\ a>0$)

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$a+b=1$

11) ②

함수 $f(x) = -2^{|x-a|} + a$의 그래프는 함수 $y=-2^{|x|}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 것이며 x축과 두 점 A, B에서 만나므로 $a>0$이다. 그림에서와 같이 함수 $y=-2^{|x|}$ 위의 점 P$(0,\ -1)$은 함수 $f(x)$ 위의 점 P$'(a,\ -1+a)$으로 이동하며 함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최댓값 $-1+a$를 갖는다.

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이므로 A$(a-3,\ 0)$, B$(a+3,\ 0)$

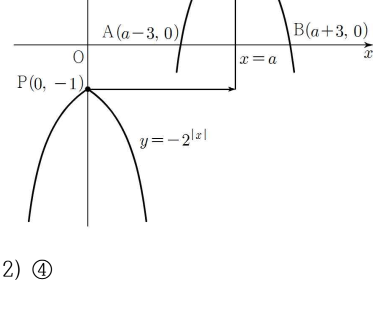
$f(a+3)=0$이므로

$0 = -2^3 + a \therefore a=8$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 최댓값 7을 가지므로

$p=8$, $q=7$

$\therefore\ p+q=15$



12) ④

최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 조건 (가)에서 $g'(0)=-4$이므로

$f'(0)=-4$ …… ㉠

또 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

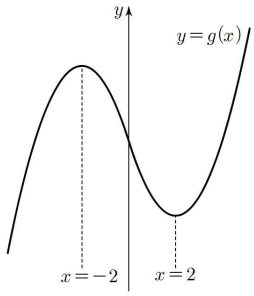
$\displaystyle\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x)$, $f(0) = a - f(0)$

$\therefore\ f(0) = \dfrac{1}{2}a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x) = -x^2 - 4x + \dfrac{1}{2}a$로 놓으면

$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x<0) \\ a - f(-x) & (x\geq 0)\end{cases}$

$= \begin{cases} -x^2 - 4x + \dfrac{1}{2}a & (x<0) \\ x^2 - 4x + \dfrac{1}{2}a & (x\geq 0)\end{cases}$



조건 (나)에서 함수 $g(x)$의 극솟값은 0이므로

$g(2)=0$, $4-8+\dfrac{1}{2}a = 0 \therefore a=8$

$\therefore\ g(-8) = -(-8)^2 - 4(-8) + \dfrac{1}{2}\times 8 = -28$

13) ⑤

3 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n-1}$ …… ㉠

이므로 $n=3$을 대입하면

$a_1 + a_2 + a_3 = a_2$, $a_1 + a_3 = 0$

이때 $a_1 = -3$이므로 $a_3 = 3$

또한 ㉠에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_n$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$a_{n+1} = a_n - a_{n-1}\,(n\geq 3)$

$a_2 = k$로 놓고 n에 3, 4, 5, ⋯ 를 차례대로 대입하면

$a_4 = a_3 - a_2 = 3-k$

$a_5 = a_4 - a_3 = 3-k-3 = -k$

$a_6 = a_5 - a_4 = -k-(3-k) = -3$

$a_7 = a_6 - a_5 = -3+k$

$a_8 = a_7 - a_6 = -3+k+3 = k$

$a_9 = a_8 - a_7 = k+3-k = 3$

⋮

따라서 $a_n = a_{n+6}\,(n\geq 2)$

$a_{20} = 1$이므로

$1 = -3 + \{k+3+(3-k)-k-3+(-3+k)\}\times 3 + k$

$\therefore\ k=1$

$\therefore \sum_{n=1}^{50} a_n = a_1 + (a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)\times 8 + a_2$

$= -3+k$

$= -3+1 = -2$

14) ①

함수 $f(x)=x^3-kx$(k는 실수)에 대하여 함수 $g(x)$의 그래프는 실수 a의 값에 따라 함수 $f(x)$의 그래프 중 일부를 구간 $[a,\ a+1]$에서만 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다.

ㄱ. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)=x^3-kx$에 대하여 $f(0)=0$이므로

(ⅰ) $a=0$일 때

$\lim_{x\to0-} g(x) = \lim_{x\to0-} f(x) = f(0)=0$

$\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0+} \{-f(x)\} = -f(0)=0$

$g(0)=-f(0)=0$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $a+1=0$일 때

$\lim_{x\to0-} g(x) = \lim_{x\to0-} \{-f(x)\} = -f(0)=0$

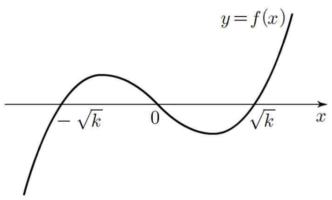
$\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0+} f(x) = f(0)=0$

$g(0)=-f(0)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $g(x)$는 두 실수 k, a의 값에 관계없이 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $k=4$일 때 $f(x)=x(x-2)(x+2)$이므로 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 불연속인 실수 p의 개수가 1이 되려면 a 또는 $a+1$의 값이 -2 또는 0 또는 2이면 되므로, 가능한 모든 실수 a의 개수는 -2, 0, 2, -3, -1, 1의 6이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면



(ⅰ) $a=-\sqrt{k}$이고 $a+1=0$일 때

$\therefore\ a=-1,\ k=1$

(ⅱ) $a=0$이고 $a+1=\sqrt{k}$일 때

$\therefore\ a=0,\ k=1$

(ⅲ) $a=-\sqrt{k}$이고 $a+1=\sqrt{k}$일 때

$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ k=\frac{1}{4}$

이상에서 가능한 모든 순서쌍 $(k,\ a)$의 개수는 3이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

15) ⑤

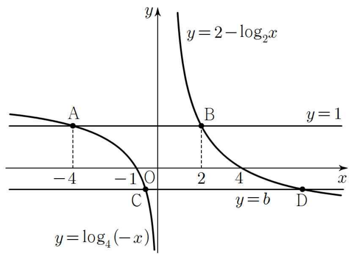
$a=\log_4(-x)$에서 $x_1=-4^a$

$a=2-\log_2 x$에서 $x_2=2^{2-a}$

$\left|\frac{x_2}{x_1}\right|=\frac{1}{2}$이므로 $2^{2-3a}=2^{-1}$,

$a=1$

$\therefore\ \mathrm{A}(-4,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$



$b=\log_4(-x)$에서 $x_3=-4^b$

$b=2-\log_2 x$에서 $x_4=2^{2-b}$

$\therefore\ \mathrm{C}(-4^b,\ b)$, $\mathrm{D}(2^{2-b},\ b)$

두 직선 AC와 BD가 서로 평행하므로

$\frac{1-b}{-4+4^b}=\frac{1-b}{2-2^{2-b}}$

$1-b\neq0$이므로

$-4+4^b=2-2^{2-b}$

양변에 2^b을 곱한 후 정리하면

$2^{3b}-6\times2^b+4=0$

$2^b=X(X>0,\ X\neq2)$로 놓으면

$X^3-6X+4=0$. $(X-2)(X^2+2X-2)=0$

$\therefore\ X=-1+\sqrt{3}$

따라서 $2^b=-1+\sqrt{3}$이므로

$\left|\frac{x_4}{x_3}\right|=\left|\frac{2^{2-b}}{-4^b}\right|=2^{2-3b}=4\left(\frac{1}{2^b}\right)^3=4\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^3$

$=5+3\sqrt{3}$

16) 62

$a^4-8a^2+1=0$에서 양변을 a^2으로 나누어 정리하면

$a^2+a^{-2}=8$

$\therefore\ a^4+a^{-4}=(a^2+a^{-2})^2-2=8^2-2=62$

17) 16

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=(x^3-2x)f(x)$ …… ㉠

라 하면

$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$ …… ㉡

이때 $f(2)=-3$, $f'(2)=4$이므로 ㉠, ㉡에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=-12$, $g'(2)=-14$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(2)=g'(2)(x-2)$

따라서 이 직선의 y절편은

$y=-2g'(2)+g(2)=16$

18) 184

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+k)=50$에서 $\sum_{k=1}^{7}a_k+\sum_{k=1}^{7}k=50$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{7}a_k=50-\sum_{k=1}^{7}k=50-\frac{7\times8}{2}=22$

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+2)^2=300$에서 $\sum_{k=1}^{7}(a_k^2+4a_k+4)=300$

$\sum_{k=1}^{7}a_k^2+4\sum_{k=1}^{7}a_k+\sum_{k=1}^{7}4=300$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{7}a_k^2=300-4\times22-7\times4=184$

19) 12

x에 대한 방정식 $x^3 - \frac{3n}{2}x^2 + 7 = 0$에서

$x^2\left(x - \frac{3n}{2}\right) = -7$ (n은 자연수) …… ㉠

이때 $f(x) = x^3 - \frac{3n}{2}x^2$라 하면

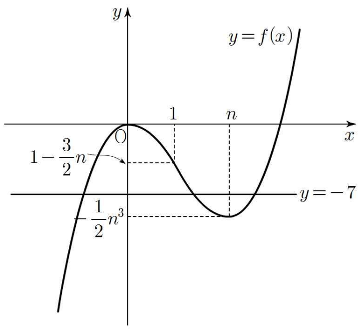
$f'(x) = 3x^2 - 3nx = 3x(x-n)$

$f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = n$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2}n^3$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x = n$일 때 극솟값 $-\frac{1}{2}n^3$을 갖는다.



방정식 ㉠의 1보다 큰 서로 다른 실근의 개수가 2가 되어야 하므로 위 그림에서와 같이 $x > 1$에서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y = -7$의 교점의 개수가 2이어야 한다.

$f(1) = 1 - \frac{3n}{2}$, $f(n) = -\frac{1}{2}n^3$

이므로

$-\frac{1}{2}n^3 < -7$에서 $n^3 > 14$

$-7 < 1 - \frac{3}{2}n$에서 $n < \frac{16}{3}$

위 두 부등식을 모두 만족하는 자연수 n의 값은 3, 4, 5이므로

$3 + 4 + 5 = 12$

20) 11

점 P의 시각 $t\,(t > 0)$에서의 속도를 $v(t)$라 할 때

$v(t) = \int a(t)dt = \int (3t^2 - 8t + 3)dt$

$= t^3 - 4t^2 + 3t + C$ (C는 적분상수)

점 P가 시각 $t = 1$과 시각 $t = \alpha\,(\alpha > 1)$에서 운동 방향을 바꾸므로

$v(1) = 0$에서 $1 - 4 + 3 + C = 0$

$\therefore\ C = 0$

$v(\alpha) = 0$에서 $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 3\alpha = 0$, $\alpha(\alpha-1)(\alpha-3) = 0$

$\therefore\ \alpha = 3$

따라서 시각 $t = 1$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^3 v(t)dt = \int_1^3 \left| t^3 - 4t^2 + 3t \right| dt$

$= -\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2\right]_1^3 = \frac{8}{3}$

$p = 3$, $q = 8$이므로

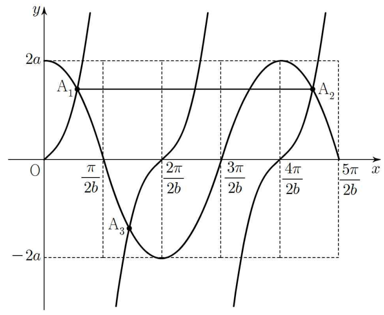
$p + q = 11$

21) 29

두 양수 a, b에 대하여 두 함수 $y = 3a\tan bx$, $y = 2a\cos bx$의 주기는 각각 $\frac{\pi}{b}$, $\frac{2\pi}{b}$이고 두 함수의 그래프가 만나는 세 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$에 대하여 선분 $\mathrm{A_1A_3}$을 지름으로 하는 원이 점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 이 원의 넓이가 π이므로

$\overline{\mathrm{A_1A_3}} = 2 = \frac{2\pi}{b}$

$\therefore\ b = \pi$



두 함수의 교점의 x좌표는

$3a\tan\pi x = 2a\cos\pi x$, $3\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x} = 2\cos\pi x$

$3\sin\pi x = 2\cos^2\pi x = 2(1 - \sin^2\pi x)$

$(2\sin\pi x - 1)(\sin\pi x + 2) = 0$

$\therefore\ \sin\pi x = \frac{1}{2}$

$\pi x = \frac{1}{6}\pi$ 또는 $\pi x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $\pi x = \frac{13}{6}\pi$이므로

$\mathrm{A_1}\left(\frac{1}{6},\ \sqrt{3}a\right)$, $\mathrm{A_2}\left(\frac{5}{6},\ -\sqrt{3}a\right)$, $\mathrm{A_3}\left(\frac{13}{6},\ \sqrt{3}a\right)$

선분 $\mathrm{A_1A_2}$와 $\mathrm{A_2A_3}$가 서로 수직이므로

$\frac{-2\sqrt{3}a}{\frac{5}{6} - \frac{1}{6}} \times \frac{2\sqrt{3}a}{\frac{13}{6} - \frac{5}{6}} = -1$

$\therefore\ a^2 = \frac{2}{27}$

$\therefore\ \left(\frac{a}{b}\pi\right)^2 = a^2 = \frac{2}{27}$

$p = 27$, $q = 2$이므로

$p + q = 29$

22) 54

조건 (나)에서 x에 대한 방정식 $\{g(x)\}^2 + 4\{g(x)\} = 0$, 즉

$g(x)\{g(x) + 4\} = 0$에서

$g(x) = 0$ 또는 $g(x) = -4$ …… ㉠

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4이다.

조건 (가)에서 주어진 극한이 실수 t에서 (분모)→0이고 양의 실수로 수렴하므로 (분자)→0이다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{g(t+h) \times g(t-h)\} = 0$이므로 $\{g(t)\}^2 = 0$

$\therefore\ g(t) = 0$

따라서

$\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{g(t+h)}{h} \times \frac{g(t-h)}{h}\right\}$

$= -\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(t+h) - g(t)}{h} \times \frac{g(t-h) - g(t)}{-h}\right\}$

$= k$ (단, k는 양의 실수)

로 놓으면 함수 $g(x)$의 $x = t$인 지점에서의 우미분계수와 좌미분계수의

부호가 서로 반대가 되게 하는 실수 t의 개수가 1이다. ⋯⋯ ㉡

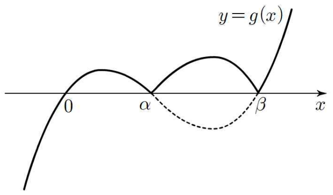
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$g(x)=x|f(x)|$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 반드시 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(ⅰ) $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$일 때

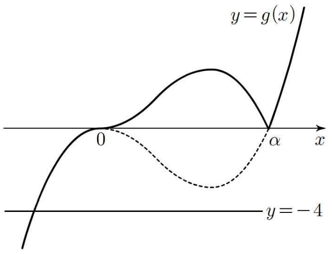
$g(x)=x|(x-\alpha)(x-\beta)|$이므로 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 함수 $g(x)$의 우미분계수와 좌미분계수의 부호가 서로 반대가 되게 하는 실수 t의 값은 α와 β이므로 조건 ㉡에 위배 된다.

(ⅱ) $f(x)=x(x-\alpha)\,(\alpha>0)$일 때

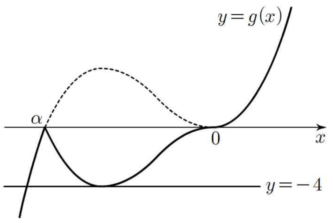
$g(x)=x|x(x-\alpha)|$이므로 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 함수 $g(x)$의 우미분계수와 좌미분계수의 부호가 서로 반대가 되게 하는 실수 t의 값은 α뿐이므로 조건 ㉡을 만족하지만, 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 위배 된다.

(ⅲ) $f(x)=x(x-\alpha)\,(\alpha<0)$일 때

$g(x)=x|x(x-\alpha)|$이므로 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 함수 $g(x)$의 우미분계수와 좌미분계수의 부호가 서로 반대가 되게 하는 실수 t의 값은 α뿐이므로 조건 ㉡을 만족하며, 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로 모든 조건을 만족한다.

이상에서 $g(x)=x|x(x-\alpha)|\,(\alpha<0)$

$g\left(\frac{2}{3}\alpha\right)=-4$이므로

$\frac{2}{3}\alpha\left|-\frac{2}{3}\alpha\times\frac{1}{3}\alpha\right|=-4$

$\frac{4}{27}\alpha^3=-4$

$\therefore\ \alpha=-3$

$g(x)=x|x(x+3)|$이므로

$g(3)=54$

23) ③

주어진 확률분포표에서 확률의 총합은 1이므로

$a+a+b=1$

$\therefore\ 2a+b=1$ ⋯⋯ ㉠

또한 $\mathrm{E}(X)=5$이므로

$2a+4a+6b=5$

$\therefore\ 6a+6b=5$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=\frac{1}{6},\ b=\frac{2}{3}$

$\therefore\ b-a=\frac{1}{2}$

24) ①

(ⅰ) 주사위를 던져 나온 눈의 수가 5이고, 동전을 5번 던져서 앞면이 나오는 횟수가 5일 확률은

$\frac{1}{6}\times{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{192}$

(ⅱ) 주사위를 던져 나온 눈의 수가 6이고, 동전을 6번 던져서 앞면이 나오는 횟수가 5일 확률은

$\frac{1}{6}\times{}_6\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하려는 확률은

$\frac{1}{192}+\frac{1}{64}=\frac{1}{48}$

25) ②

$(ax+1)^7$의 전개식에서 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r(ax)^r={}_7\mathrm{C}_r\,a^rx^r$ ⋯⋯ ㉠

$r=5$일 때 x^5의 계수는 ${}_7C_5a^5=21a^5$

$r=3$일 때 x^3의 계수는 ${}_7C_3a^3=35a^3$

이때 x^5의 계수와 x^3의 계수가 같으므로

$21a^5=35a^3$

$\therefore\ a^2=\frac{5}{3}$

㉠에서 $r=2$를 대입하면 x^2의 계수는

${}_7\mathrm{C}_2a^2=21\times\frac{5}{3}=35$

26) ④

육군사관학교 모자를 a, 해군사관학교 모자를 b, 공군사관학교 모자를 c라 하면

$a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ c,\ c,\ c$

이 8개의 모자를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{3!\times2!\times3!}=560$

(ⅰ) 양 끝에 모두 육군사관학교 모자가 놓이게 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

(ⅱ) 양 끝에 모두 해군사관학교 모자가 놓이게 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$

(ⅲ) 양 끝에 모두 공군사관학교 모자가 놓이게 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

이상에서 양 끝에 서로 같은 사관학교의 모자가 놓이도록 나열하는 경우의 수는

$60+20+60=140$

따라서 양 끝에 다른 사관학교의 모자가 놓이도록 나열하는 경우의 수는

$560-140=420$

27) ⑤

7개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 임의로 일렬로

나열하는 경우의 수는

$7! = 5040$

(ⅰ) 문자 a, b를 이 순서대로 한 묶음으로 생각할 때

4개의 문자 d, e, f, g를 일렬로 나열한 후, 나열된 문자 사이사이와 양 끝의 5곳 중 2곳을 골라 차례대로 c와 ab를 나열하면 되므로

$4! \times {}_5C_2 = 240$

(ⅱ) 문자 b, a를 이 순서대로 한 묶음으로 생각할 때

6개의 문자 d, e, f, g, c, ba를 일렬로 나열할 때 c는 반드시 ba보다 왼쪽에 있어야 하므로

$\dfrac{6!}{2!} = 360$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 조건을 만족시킬 확률은

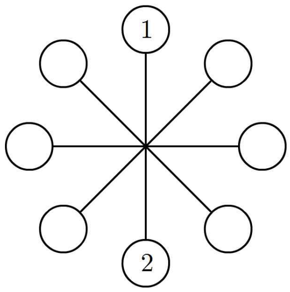
$\dfrac{240+360}{5040} = \dfrac{5}{42}$

28) ④

서로 마주 보는 위치에 있는 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차가 같은 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(ⅰ) 두 수의 차가 1로 같은 경우

$(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(5,\ 6)$, $(7,\ 8)$



이때 숫자 1과 2가 적혀 있는 카드를 배열하는 방법은 1가지, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 위치하는 방법은 6가지이고 이때 숫자 4가 적혀 있는 카드의 위치는 자동으로 정해진다. 또 숫자 5가 적혀 있는 카드가 위치하는 방법은 4가지이고 숫자 6이 적혀 있는 카드의 위치는 자동으로 정해진다. 마지막으로 숫자 7이 적혀 있는 카드가 위치하는 방법은 2가지이고 8이 적혀 있는 카드의 위치는 한 가지로 고정된다. 따라서 카드를 배열하는 경우의 수는

$1 \times 6 \times 4 \times 2 = 48$

(ⅱ) 두 수의 차가 2로 같은 경우

$(1,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(5,\ 7)$, $(6,\ 8)$

(1) 카드를 배열하는 방법은 (ⅰ)에서와 같으므로

$1 \times 6 \times 4 \times 2 = 48$

(2) 숫자 1이 적혀 있는 카드와 숫자 2가 적혀 있는 카드가 이웃하는 경우 숫자 1과 3이 적혀 있는 카드를 배열하는 방법은 1가지, 숫자 2가 적혀 있는 카드의 위치는 숫자 1이 적혀 있는 카드의 왼쪽 또는 오른쪽이면 되므로 2가지이고 숫자 4가 적혀 있는 카드의 위치는 자동으로 정해진다. 숫자 5가 적혀 있는 카드가 위치하는 방법은 4가지이고 숫자 7이 적혀 있는 카드의 위치는 자동으로 정해진다. 마지막으로 숫자 6이 적혀 있는 카드가 위치하는 방법은 2가지이고 숫자 8이 적혀 있는 카드의 위치는 한 가지로 정해진다. 따라서 숫자 1이 적혀 있는 카드와 숫자 2가 적혀 있는 카드가 이웃하도록 배열하는 경우의 수는

$1 \times 2 \times 4 \times 2 = 16$

(ⅲ) 두 수의 차가 4로 같은 경우

$(1,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$

(1) 이때 카드를 배열하는 방법은 (ⅰ)에서와 같으므로

$1 \times 6 \times 4 \times 2 = 48$

(2) 숫자 1이 적혀 있는 카드와 숫자 2가 적혀 있는 카드가 이웃하는 경우 카드를 배열하는 방법은 (ⅱ)-(2)에서와 같으므로

$1 \times 2 \times 4 \times 2 = 16$

이상에서 서로 마주 보는 위치에 있는 두 장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차가 모두 같을 때, 숫자 1이 적혀 있는 카드와 숫자 2가 적혀 있는 카드가 서로 이웃할 확률은

$\dfrac{16+16}{48+48+48} = \dfrac{2}{9}$

29) 8

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 9^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150,\ \dfrac{9^2}{n}\right)$를 따른다.

$\overline{X} \le 145$인 경우 불량품으로 처리하므로 불량품일 확률이 0.07 이하가 되려면

$\mathrm{P}(\overline{X} \le 145) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{145-150}{\dfrac{9}{\sqrt{n}}}\right)$

$= \mathrm{P}\left(Z \le -\dfrac{5}{9}\sqrt{n}\right) \le 0.07$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) = 0.43$이므로

$-\dfrac{5}{9}\sqrt{n} \le -1.5$, $\sqrt{n} \ge \dfrac{27}{10}$

$\therefore\ n \ge 7.29$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

30) 166

(ⅰ) 학생 A가 받은 연필의 개수가 5이고, 공책보다 연필을 더 많이 받는 학생이 A뿐일 때

공책 5권을 네 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수에서 학생 A가 공책 5권을 모두 가져가는 경우의 수를 빼주면 되므로

${}_4\mathrm{H}_5 - 1 = {}_8\mathrm{C}_3 - 1 = 55$

(ⅱ) 학생 A가 받은 연필의 개수가 4이고, 공책보다 연필을 더 많이 받는 학생이 A뿐일 때

나머지 연필 한 개를 학생 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 3

이때 연필 한 개를 받은 학생에게 공책을 한 개 주고, 학생 A를 포함한 네 명의 학생에게 나머지 공책 4권을 나누어 주는 경우의 수에서 학생 A가 공책 4권을 모두 가져가는 경우의 수를 빼주면 되므로

${}_4\mathrm{H}_4 - 1 = {}_7\mathrm{C}_3 - 1 = 34$

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 34 = 102$

(ⅲ) 학생 A가 받은 연필의 개수가 4이고, 공책보다 연필을 더 많이 받는 학생이 A가 아닐 때

나머지 연필 한 개를 학생 B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 3

학생 A에게 공책 4권을 준 후, 연필 한 개를 받은 학생을 제외한 3명의 학생에게 나머지 공책 1권을 나누어 주는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

이상에서 네 명의 학생에게 같은 종류의 연필 5자루와 같은 종류의 공책 5권을 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$55 + 102 + 9 = 166$

23) ⑤

$n \ge 2$일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 4^{n+1} - 3n - \left(4^n - 3(n-1)\right)$

$= 3 \times 4^n - 3$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{4^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\times 4^n - 3}{4^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \dfrac{3}{4^n}}{4^{-1}} = 12$$

24) ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{n+k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$
$$=\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_1^2\left(\frac{x+1}{x^2}\right)dx$$
$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\left[\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+\ln 2$$

25) ③

곡선 $\pi\cos y+y\sin x=3x$에 $y=0$을 대입하면

$\pi=3x$, $x=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$

$\pi\cos y+y\sin x=3x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\pi\sin y\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}\sin x+y\cos x=3$

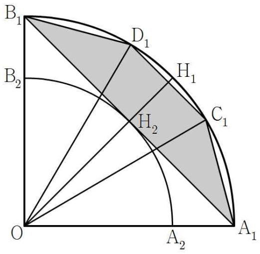
$x=\frac{\pi}{3}$, $y=0$을 대입하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{dy}{dx}=3$, $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{3}$

따라서 주어진 곡선 위의 점 A에서의 접선의 기울기는

$2\sqrt{3}$

26) ①



선분 $\mathrm{A_1B_1}$과 호 $\mathrm{A_2B_2}$의 접점을 $\mathrm{H_2}$, 직선 $\mathrm{OH_2}$와 호 $\mathrm{A_1B_1}$의 교점을 $\mathrm{H_1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{OH_1}}=1$, $\overline{\mathrm{OH_2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

닮음인 두 사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$와 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 길이의 비가

$\sqrt{2}$: 1이므로 넓이의 비는 2 : 1이고 공비는 $\frac{1}{2}$이다.

사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 넓이를 S_1이라 할 때

$S_1=\triangle\mathrm{OA_1C_1}+\triangle\mathrm{OC_1D_1}+\triangle\mathrm{OD_1B_1}-\triangle\mathrm{OA_1B_1}$

$=3\times\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

27) ④

점 $(x,\ 0)$ $\left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\{(1+\cos x)\sqrt{\sin x}\}^2=(1+\cos x)^2\sin x$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^2\sin x\,dx$$

$1+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{3}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^2\sin x\,dx=-\int_{\frac{3}{2}}^{1}t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^{\frac{3}{2}}=\frac{19}{24}$$

28) ③

양의 실수 t와 상수 $k(k>0)$에 대하여

$p(x)=(ax+b)e^{x-k}$, $q(x)=tx$라 하면

$p'(x)=ae^{x-k}+(ax+b)e^{x-k}=(ax+a+b)e^{x-k}$

$q'(x)=t$

두 곡선이 점 $(t,\ t^2)$에서 접하므로

$p(t)=q(t)$에서 $(at+b)e^{t-k}=t^2$ …… ㉠

$p'(t)=q'(t)$에서 $(at+a+b)e^{t-k}=t$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $ae^{t-k}=t-t^2$

이때 $a=f(t)$이므로

$f(t)e^{t-k}=t-t^2$

$\therefore\ f(t)=(t-t^2)e^{k-t}$

이 식에 $t=k$를 대입하면 $f(k)=-6$에서

$-6=k-k^2$, $k^2-k-6=0$

$(k-3)(k+2)=0$

$\therefore\ k=3$

$k=3$과 $b=g(t)$를 ㉠에 대입하면

$\{f(t)t+g(t)\}e^{t-3}=t^2$

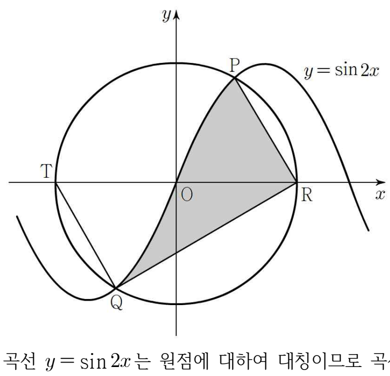
$\{(t-t^2)te^{3-t}+g(t)\}e^{t-3}=t^2$

$(t^2-t^3)+g(t)e^{t-3}=t^2$, $g(t)=t^3e^{3-t}$

$\therefore\ g'(t)=3t^2e^{3-t}-t^3e^{3-t}=t^2(3-t)e^{3-t}$

$\therefore\ g'(3)=0$

29) 20



곡선 $y=\sin 2x$는 원점에 대하여 대칭이므로 곡선과 두 선분 PR, OR로 둘러싸인 부분의 넓이는, 곡선과 두 선분 QT, OT로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서 구하는 넓이는 삼각형 QRT의 넓이와 같다.

$\overline{\mathrm{TR}}=2\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{t^2+\sin^2 2t}$

점 P의 좌표가 $(t,\ \sin 2t)$이므로 $\mathrm{Q}(-t,\ -\sin 2t)$

따라서 선분 TR을 밑변으로 하는 삼각형 QRT의 높이는 $\sin 2t$이다.

$\therefore\ S(t)=\frac{1}{2}\times\sin 2t\times2\sqrt{t^2+\sin^2 2t}=\sin 2t\sqrt{t^2+\sin^2 2t}$

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin 2t\sqrt{t^2+\sin^2 2t}}{t^2}$

$=2\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)\sqrt{1+4\left(\frac{\sin 2t}{2t}\right)^2}$

$=2\times 1\times\sqrt{1+4\times 1^2}$

$=2\sqrt{5}$

$k=2\sqrt{5}$ 이므로

$k^2=20$

30) 13

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=\frac{\ln x+k}{x}$ 이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{k}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+k\ln x+C$ (C는 적분상수)

조건 (나)에서 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=0$, $f(1)=0$이므로

$k=1$, $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x$

이때 $t>-\frac{1}{2}$인 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표 중 작은 값이 $g(t)$이므로

$\frac{1}{2}\{\ln g(t)\}^2+\ln g(t)=t$

양변에 2를 곱한 후 정리하면

$\{\ln g(t)+1\}^2=2t+1$, $\quad \ln g(t)+1=\pm\sqrt{2t+1}$

$\therefore g(t)=e^{-1-\sqrt{2t+1}}$

따라서 곡선 $y=g(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{3}{2}$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^{\frac{3}{2}}g(x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}}e^{-1-\sqrt{2x+1}}\,dx$

$\sqrt{2x+1}=p$로 놓으면

$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{dp}{dx}$

$\therefore \frac{1}{p}=\frac{dp}{dx}$

$x=0$일 때 $p=1$, $x=\frac{3}{2}$일 때 $p=2$이므로

$S=\int_0^{\frac{3}{2}}e^{-1-\sqrt{2x+1}}\,dx$

$=\int_1^2 pe^{-1-p}dp$

$=\left[-pe^{-1-p}-e^{-1-p}\right]_1^2$

$=-3e^{-3}+2e^{-2}$

$=\frac{2e-3}{e^3}$

$a=2$, $b=-3$이므로

$a^2+b^2=13$

23) ④

구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ 0,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(a-4)^2+(-2)^2+(-3)^2=a^2-8a+29$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(a+2)^2+(-3)^2+(-1)^2=a^2+4a+14$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로 $a^2-8a+29=a^2+4a+14$

$12a=15$

$\therefore a=\frac{5}{4}$

따라서 구하는 점 P의 x좌표는 $\frac{5}{4}$이다.

24) ⑤

$x^2-9y^2-2x-18y-9=0$에서

$(x-1)^2-9(y+1)^2=1$ …… ㉠

$x^2-9y^2-2x-18y-7=0$에서

$(x-1)^2-9(y+1)^2=-1$ …… ㉡

쌍곡선 ㉠은 쌍곡선 $x^2-9y^2=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이며, 쌍곡선 ㉡은 쌍곡선 $x^2-9y^2=-1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 두 쌍곡선의 점근선의 방정식은 일치하며 다음과 같다.

$y=\frac{1}{3}(x-1)-1=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$ …… ㉢

$y=-\frac{1}{3}(x-1)-1=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ …… ㉣

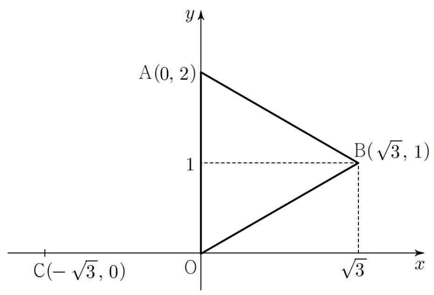
㉢, ㉣에서

$ac+bd=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{9}$

25) ①

좌표평면의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$와 원점 O에 대하여 제1사분면의 점 B를 잡을 때 삼각형 AOB가 정삼각형이므로

$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 1)$



점 $\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ 0)$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-\sqrt{3},\ 0)-(\sqrt{3},\ 1)=(-2\sqrt{3},\ -1)$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ 2)+(-2\sqrt{3},\ -1)=(-2\sqrt{3},\ 1)$

$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{13}$

26) ②

$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{AE}}=3$인 직육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여, 점 I가 선분 CG를 $2:1$로 내분하므로 $\overline{\mathrm{CI}}=2$

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{5}$이고 점 I에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HI}}\perp\overline{\mathrm{HC}}$

또한 $\overline{\mathrm{CH}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{CD}}$에서 $\overline{\mathrm{HC}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 ICH에서

$$\overline{\mathrm{HI}} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$$

평면 BID와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기는 평면 BID와 평면 ABCD가 이루는 예각의 크기와 같으므로

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{HC}}}{\overline{\mathrm{HI}}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

27) ③

타원의 중심인 원점과 초점 사이의 거리가 2이고 장축의 길이가 12이므로 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ …… ㉠

원점을 꼭짓점으로 하고 직선 $x = -2$를 준선으로 하는 포물선의 방정식은

$y^2 = 8x$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

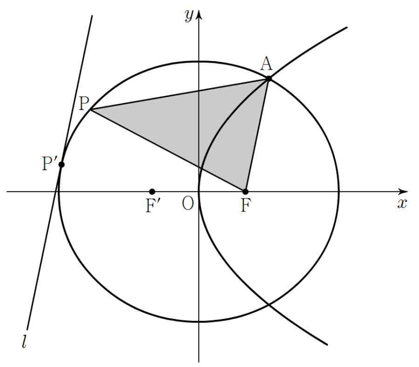
$\frac{x^2}{36} + \frac{8x}{32} = 1$, $x^2 + 9x - 36 = 0$

$(x+12)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = 3$ 또는 $x = -12$

따라서 제1사분면 위의 점 A의 x좌표는 3이므로

$\mathrm{A}(3,\ 2\sqrt{6})$, $\overline{\mathrm{AF}} = 5$



타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 APF의 넓이의 최댓값은 그림에서와 같이 점 P가 직선 AF와 평행한 직선 l이 타원과 접하게 되는 점 P′의 위치에 있을 때이다. 직선 AF의 기울기는 $\frac{2\sqrt{6}}{3-2} = 2\sqrt{6}$이므로 직선 l의 방정식은

$y = 2\sqrt{6}x + \sqrt{36 \times (2\sqrt{6})^2 + 32}$

$\therefore\ 2\sqrt{6}x - y + 8\sqrt{14} = 0$

직선 AF 위의 점 F(2, 0)와 직선 l 사이의 거리를 h라 하면

$$h = \frac{|4\sqrt{6} + 8\sqrt{14}|}{\sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (-1)^2}} = \frac{4\sqrt{6} + 8\sqrt{14}}{5}$$

$\therefore \triangle \mathrm{AP'F} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AF}} \times h$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{4\sqrt{6} + 8\sqrt{14}}{5}$

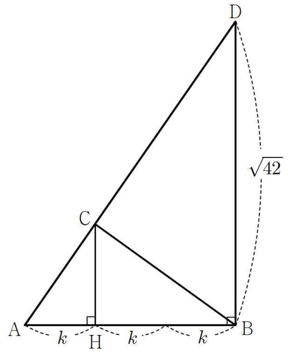
$= 2\sqrt{6} + 4\sqrt{14}$

28) ⑤

삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = 3k$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 3k \times k$

즉, 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이다



또 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 3k \times 2k = 6k^2$이므로

$\frac{2}{5}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = 6k^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{15}k$

$\therefore\ \overline{\mathrm{HC}} = \sqrt{15k^2 - k^2} = \sqrt{14}k$

닮음인 두 삼각형 AHC와 ABD의 길이의 비는 1 : 3이므로

$\overline{\mathrm{HC}} : \overline{\mathrm{BD}} = 1 : 3$, $\sqrt{14}k : \sqrt{42} = 1 : 3$

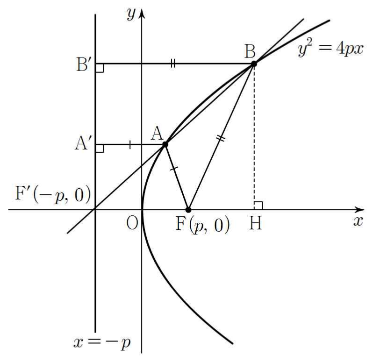
$\therefore\ k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{HC}}$

$= \frac{1}{2} \times 3k \times \sqrt{14}k$

$= \frac{3\sqrt{14}}{2}k^2 = \frac{\sqrt{14}}{2}$

29) 23



두 점 A, B를 지나는 직선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $\mathrm{F'}(-p,\ 0)$, 두 점 A, B에서 준선 $x = -p$에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면

$\overline{\mathrm{FA}} : \overline{\mathrm{FB}} = \overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{BB'}} = \overline{\mathrm{F'A'}} : \overline{\mathrm{F'B'}} = 1 : 3$

따라서 점 A의 y좌표를 k라 하면 점 B의 y좌표는 $3k$ 이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{k^2}{4p},\ k\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{9k^2}{4p},\ 3k\right)$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}\left(\frac{9k^2}{4p},\ 0\right)$라 할 때, 삼각형 BFH의 넓이가 $46\sqrt{3}$이므로

$46\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{FH}} \times \overline{\mathrm{BH}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{9k^2}{4p} - p\right) \times 3k$ …… ㉠

또한 점 F′, A, B가 일직선상에 있으므로

$$\frac{k}{\frac{k^2}{4p} + p} = \frac{3k}{\frac{9k^2}{4p} + p},\quad \frac{9k^2}{4p} + p = \frac{3k^2}{4p} + 3p$$

$k^2 = \frac{4}{3}p^2$

$\therefore\ k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p$ $\cdots\cdots$ ㉡

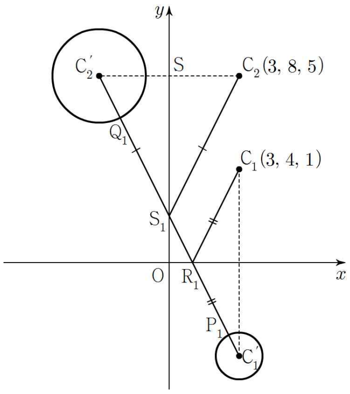
㉡을 ㉠에 대입하면

$46\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times(3p-p)\times2\sqrt{3}p=2\sqrt{3}p^2$

$\therefore\ p^2=23$

30) 17

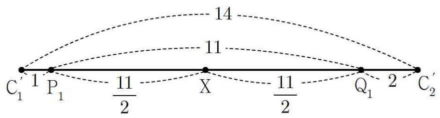
두 개의 구 C_1, C_2의 중심 좌표를 각각 $\mathrm{C}_1(3,\ 4,\ 1)$, $\mathrm{C}_2(3,\ 8,\ 5)$라 하자. 다음 그림에서 양의 z축은 xy평면에 수직인 방향이다.



두 개의 구 C_1, C_2를 각각 zx평면, yz평면에 대칭시킨 것을 $C_1{}'$, $C_2{}'$라 하면 이 두 개의 구의 중심 좌표는 각각

$\mathrm{C}_1{}'(3,\ -4,\ 1)$, $\mathrm{C}_2{}'(-3,\ 8,\ 5)$

이다. 이때 직선 $\mathrm{C}_1{}'\mathrm{C}_2{}'$이 두 개의 구 $C_1{}'$, $C_2{}'$와 만나는 점이 P_1, Q_1이고 zx 평면과 만나는 점이 R_1, yz평면과 만나는 점이 S_1이라 할 수 있으며, 선분 $\mathrm{R}_1\mathrm{S}_1$ 위의 점 X에 대하여 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{R}_1}+\overline{\mathrm{R}_1\mathrm{X}}=\overline{\mathrm{XS}_1}+\overline{\mathrm{S}_1\mathrm{Q}_1}$가 성립하므로 점 X는 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 중점이다.



선분 $\mathrm{C}_1{}'\mathrm{C}_2{}'$의 길이는 14이며 두 개의 구 $C_1{}'$, $C_2{}'$의 반지름의 길이가 각각 1, 2이므로

$\overline{\mathrm{C}_1{}'\mathrm{P}_1}=1$, $\overline{\mathrm{C}_2{}'\mathrm{Q}_1}=2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=11$

따라서 $\overline{\mathrm{C}_1{}'\mathrm{X}}=\dfrac{13}{2}$, $\overline{\mathrm{C}_2{}'\mathrm{X}}=\dfrac{15}{2}$이고 점 X는 선분 $\mathrm{C}_1{}'\mathrm{C}_2{}'$를 13 : 15로 내분하므로 점 X의 x좌표는

$\dfrac{13\times(-3)+15\times3}{13+15}=\dfrac{3}{14}$

$p=14$, $q=3$이므로

$p+q=17$