

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\frac{4}{3^{-2}+3^{-3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

2. 함수 $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(ax + 1)$ 에 대하여 $f'(0) = 15$ 일 때, 상수 a 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

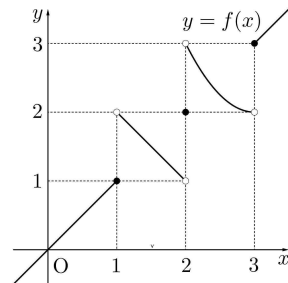
3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 4, \frac{(a_3)^2}{a_1 \times a_7} = 2$$

일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

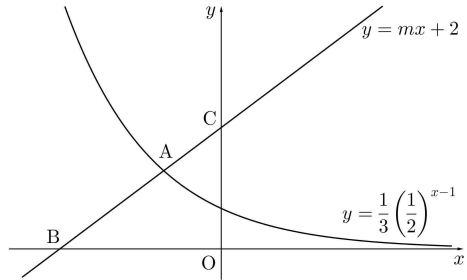
5. 이차방정식 $5x^2 - x + a = 0$ 의 두 근이 $\sin\theta, \cos\theta$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{12}{5}$ ② -2 ③ $-\frac{8}{5}$ ④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$

6. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + ax^2 + b$ 가 $x = a$ 에서 극소이고 극댓값 $a + 8$ 을 가질 때, $a + b$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

7. 그림과 같이 직선 $y = mx + 2$ ($m > 0$)이 곡선 $y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 과 만나는 점을 A , 직선 $y = mx + 2$ 가 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 하자. $\overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1$ 일 때, 상수 m 의 값은? [3점]



- ① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{17}{24}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

8. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & (x < a) \\ 2x + b & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

9. 곡선 $y = |\log_2(-x)|$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 곡선을 $y = f(x)$ 라 하자.

곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = |\log_2(-x+8)|$ 이 세 점에서 만나고 세 교점의 x 좌표의 합이 18일 때, k 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

[4점]

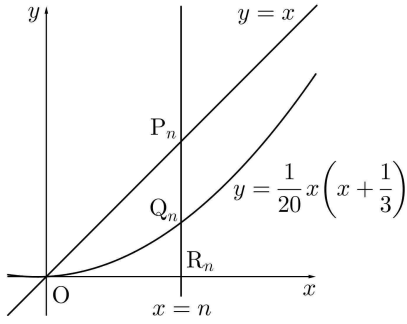
가) $f(0) = 2$ 이고 $f'(4) = -24$ 이다.

나) 부등식 $xf'(x) > 0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 범위는 $1 < x < 3$ 이다.

- ① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

11. 자연수 n 에 대하여 직선 $x=n$ 이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 P_n , 곡선 $y = \frac{1}{20}x(x + \frac{1}{3})$ 과 만나는 점을 Q_n , x 축과 만나는 점을 R_n 이라 하자. 두 선분 P_nQ_n , Q_nR_n 의 길이 중 작은 값을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{115}{6}$ ② $\frac{58}{3}$ ③ $\frac{39}{2}$ ④ $\frac{59}{3}$ ⑤ $\frac{119}{6}$



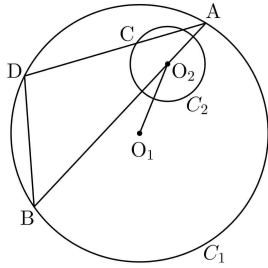
12. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & (x \leq 2) \\ ax+b & (x > 2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha) + \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = 4$ 를 만족시키는 실수 α 의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

13. 그림과 같이 중심이 O_1 이고 반지름의 길이가 r ($r > 3$)인 원 C_1 과 중심이 O_2 이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2 에 대하여 $\overline{O_1O_2} = 2$ 이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A 에 대하여 직선 AO_2 가 원 C_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 B 라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C 에 대하여 직선 AC 가 원 C_1 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 D 라 하자. 다음은 \overline{BD} 가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D 를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$ 을 r 에 관한 식으로 나타내는 과정이다.



삼각형 ADB 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = (가)$$

이므로 \overline{BD} 가 최대하려면 직선 AD 가 원 C_2 와 점 C 에서 접해야 한다.

이때 직각삼각형 ACO_2 에서 $\sin A = \frac{1}{AO_2}$ 이므로

$$\overline{BD} = \frac{1}{AO_2} \times (가)$$

이다.

그러므로 직선 AD 가 원 C_2 와 점 C 에서 접하고 $\overline{AO_2}$ 가 최소일 때, \overline{BD} 는 최대이다.

$\overline{AO_2}$ 의 최솟값은 (나)이므로

\overline{BD} 가 최대일 때, $\overline{O_1C}^2 = (다)$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r), g(r), h(r)$ 라 할 때, $f(4) \times g(5) \times h(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 216 ② 192 ③ 168 ④ 144 ⑤ 120

14. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 1) \\ 2f(1) - f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(-1+h) + g(-1-h) - 6}{h} = a$ (a 는 상수)이고 $g(1) = 1$ 이면 $g(a) = 1$ 이다.

ㄷ. $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(b+h) + g(b-h) - 6}{h} = 4$ (b 는 상수)이면 $g(4) = 1$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 함수

$$f(x) = \left| 2a \cos \frac{b}{2} x - (a-2)(b-2) \right|$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는? [4점]

- 가) 함수 $f(x)$ 는 주기가 π 인 주기함수이다.
 나) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2a-1$ 의 교점의 개수는 4이다.

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

단답형

16. $\log_3 a \times \log_3 b = 2$ 이고 $\log_a 3 + \log_b 3 = 4$ 일 때, $\log_3 ab$ 의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x) = 3x^3 - x + a$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선이 원점을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

18. 곡선 $y = x^3 + 2x$ 와 y 축 및 직선 $y = 3x + 6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

19. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{2n} = 2a_n, \quad a_{2n+1} = 3a_n$$

을 만족시킨다. $a_7 + a_8 = 73$ 인 자연수 k 의 값을 구하시오.

[3점]

20. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($t \geq 0$) 에서의 속도는

$$v(t) = |at - b| - 4 \quad (a > 0, b > 4)$$

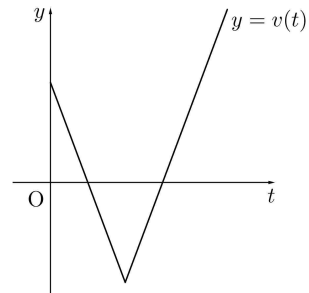
이다. 시간 $t=0$ 에서 $t=k$ 까지 점 P 가 움직인 거리를 $s(k)$, 시간 $t=0$ 에서 $t=k$ 까지 점 P 의 위치의 변화량을 $x(k)$ 라 할 때, 두 함수 $s(k), x(k)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

가) $0 \leq k < 3$ 이면 $s(k) - x(k) < 8$ 이다.

나) $k \geq 3$ 이면 $s(k) - x(k) = 8$ 이다.

시간 $t=1$ 에서 $t=6$ 까지 점 P 의 위치의 변화량을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이다.) [4점]



21. 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$\text{가) } a_6 + a_7 = -\frac{1}{2}$$

나) $a_l + a_m = 1$ 이 되도록 하는 두 자연수 l, m ($l < m$)의 모든 순서쌍 (l, m) 의 개수는 6이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제14항까지의 합을 S 라 할 때, $2S$ 의 값을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)=1, f'(1)=0$ 이다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) + |f(x) - 1|$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$ 의 개수를 구하시오. [4점]

가) 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 모든 교점의 x 좌표의 합은 3이다.

나) 모든 자연수 n 에 대하여 $n < \int_0^n g(x)dx < n+16$ 이다.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5 지 선 다 형

23. $(x+2)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는? [2점]

- ① 58 ② 60 ③ 62 ④ 64 ⑤ 66

24. 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	a	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{3}$	1

 $E(11X+2)$ 의 값은? [3점]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

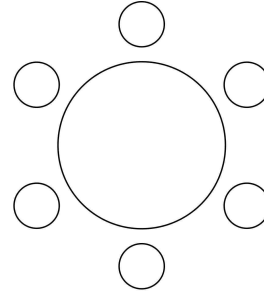
25. 어느 회사에서 근무하는 직원들의 일주일 근무 시간은 평균이 42시간, 표준편차가 4시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 근무하는 직원 중에서 임의추출한 4명의 일주일 근무 시간의 표본평균이 43시간 이상일 확률을 오른 쪽 정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
 ④ 0.3085 ⑤ 0.3413

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, A와 C는 이웃하지 않고, B와 C도 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

- ① 24 ② 30 ③ 36 ④ 42 ⑤ 48



27. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. 이차부등식 $ax^2 + 2bx + a - 3 \leq 0$ 의 해가 존재할 확률은?

[3점]

- ① $\frac{7}{9}$ ② $\frac{29}{36}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{31}{36}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 8$$

을 만족시키는 함수 f 의 개수는? [4점]

- ① 137 ② 141 ③ 145 ④ 149 ⑤ 153

단답형

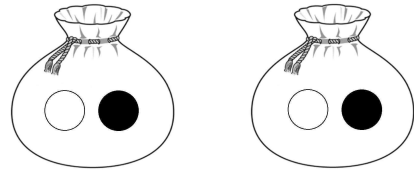
29. 서로 다른 두 자연수 a, b 에 대하여 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(a, \sigma^2), N(2b-a, \sigma^2)$ 을 따른다. 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 와 확률변수 Y 의 확률밀도함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [4점]

- (가) $P(X \leq 11) = P(Y \geq 11)$
- (나) $f(17) < g(10) < f(15)$

30. 그림과 같이 두 주머니 A와 B에 흰 공 1개, 검은 공 1개가 각각 들어 있다. 주머니 A에 들어 있는 공의 개수 또는 주머니 B에 들어 있는 공의 개수가 0이 될 때까지 다음의 시행을 반복한다.

두 주머니 A, B에서 각각 임의로 하나씩 꺼낸 두 개의 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공을 모두 주머니 A에 넣고, 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 모두 주머니 B에 넣는다.

4번째 시행의 결과 주머니 A에 들어 있는 공의 개수가 0일 때, 2번째 시행의 결과 주머니 A에 들어 있는 흰 공의 개수가 1이상일 확률은 p 이다. $36p$ 의 값을 구하시오. [4점]



A

B

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5 지선 다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{an^2 + bn} - \sqrt{n^2 - 1}} = 4$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

24. 함수 $f(x) = x^3 + 3x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

함수 $h(x) = e^x$ 에 대하여 $(h \circ g)'(5)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e}{8}$ ② $\frac{e}{7}$ ③ $\frac{e}{6}$ ④ $\frac{e}{5}$ ⑤ $\frac{e}{4}$

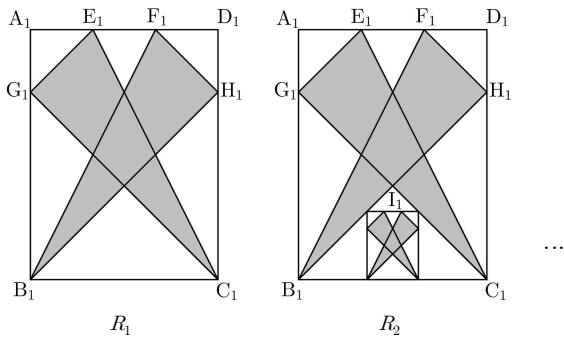
25. 함수 $f(x) = x^2 e^{x^2-1}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n+k} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① $e^3 - 1$ ② $e^3 - \frac{1}{e}$ ③ $e^4 - 1$
 ④ $e^4 - \frac{1}{e}$ ⑤ $e^5 - 1$

26. 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다. 모든 양수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{\ln t}{t^2}$ 이다. $f(1) = 0$ 일 때, $f(e)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e-2}{3e}$ ② $\frac{e-2}{2e}$ ③ $\frac{e-1}{3e}$
 ④ $\frac{e-2}{e}$ ⑤ $\frac{e-1}{e}$

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=3$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 선분 A_1D_1 을 1:2, 2:1로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1 이라 하고, 두 선분 A_1B_1, D_1C_1 을 1:3으로 내분하는 점을 각각 G_1, H_1 이라 하자. 두 삼각형 $C_1E_1G_1, B_1H_1F_1$ 로 만들어진 \bowtie 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 두 선분 B_1H_1, C_1G_1 이 만나는 점을 I_1 이라 하자. 선분 B_1I_1 위의 점 A_2 , 선분 C_1I_1 위의 점 D_2 , 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2 를 $\overline{A_2B_2} : \overline{A_2D_2} = 4:3$ 인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 가 되도록 잡는다. 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에 \bowtie 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{347}{64}$ ② $\frac{351}{64}$ ③ $\frac{355}{64}$ ④ $\frac{359}{64}$ ⑤ $\frac{363}{64}$

28. $0 < a < 1$ 인 실수 a 에 대하여 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 두 함수

$$y = \sin x, y = a \tan x$$

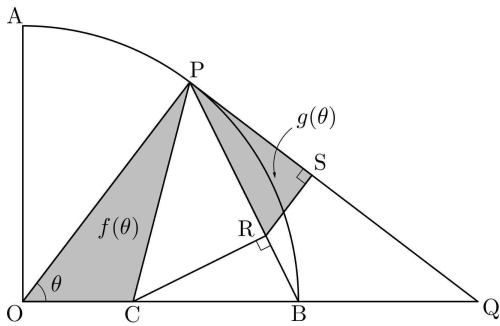
의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$ 라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 5이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 에서 선분 OB 를 2:3으로 내분하는 점을 C 라 하자. 점 P 에서 호 AB 에 접하는 직선과 직선 OB 의 교점을 Q 라 하고, 점 C 에서 선분 PB 에 내린 수선의 발을 R , 점 R 에서 선분 PQ 에 내린 수선의 발을 S 라 하자. $\angle POB = \theta$ 일 때, 삼각형 OCP 의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PRS 의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.

$80 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



30. 최고차항의 계수가 -2 인 이차함수 $f(x)$ 와 두 실수 a ($a > 0$), b 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x+1)}{x} & (x < 0) \\ f(x)e^{x-a} + b & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 2$ 이고 $g'(a) = -2$ 이다.
- (나) $s < 0 \leq t$ 이면 $\frac{g(t) - g(s)}{t - s} \leq -2$ 이다.

$a - b$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지선 다형

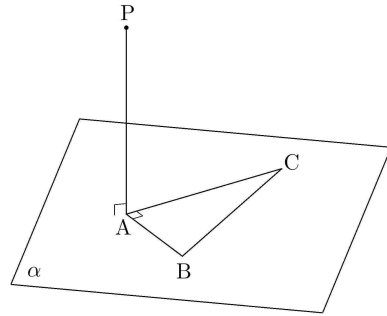
23. 좌표공간에서 점 $P(2, 1, 3)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 Q 에 대하여 선분 PQ 의 길이는? [2점]

- ① $2\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{14}$

24. 그림과 같이 평면 α 위에 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 이고

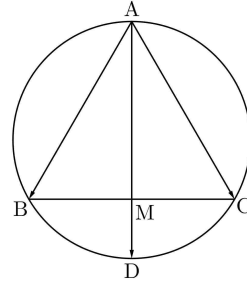
$\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = \sqrt{3}$ 인 직각삼각형 ABC 가 있다. 점 A 를 지나고 평면 α 에 수직인 직선 위의 점 P 에 대하여 $\overline{PA} = 2$ 일 때, 점 P 와 직선 BC 사이의 거리는? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{70}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{74}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{19}}{2}$



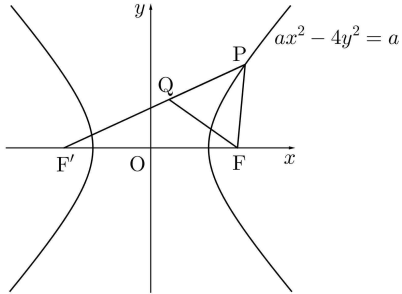
25. 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 과 두 점 $A(4, 0), B(0, -3)$ 이 있다. 이 타원 위의 점 P 에 대하여 삼각형 ABP 의 넓이가 k 가 되도록 하는 점 P 의 개수가 3 일 때, 상수 k 의 값은? [3점]
- ① $3\sqrt{2}-3$ ② $6\sqrt{2}-7$ ③ $3\sqrt{2}-2$
 ④ $6\sqrt{2}-6$ ⑤ $6\sqrt{2}-5$

26. 그림과 같이 정삼각형 ABC 에서 선분 BC 의 중점을 M 이라 하고, 직선 AM 이 정삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 D 라 하자. $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 일 때, $m+n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

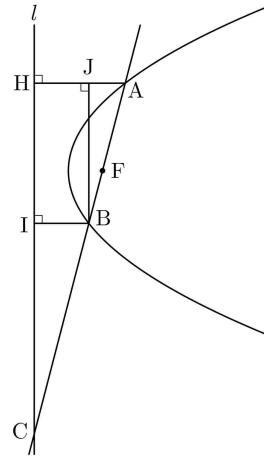
27. 그림과 같이 두 초점이 F, F' 인 쌍곡선 $ax^2 - 4y^2 = a$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P 와 선분 PF' 위의 점 Q 에 대하여 삼각형 PQF 는 한 변의 길이가 $\sqrt{6}-1$ 인 정삼각형이다. 상수 a 의 값은? (단, 점 F 의 x 좌표는 양수이다.) [3점]



- ① $\frac{9}{2}$
- ② 5
- ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6
- ⑤ $\frac{13}{2}$

28. 점 F 를 초점으로 하고 직선 l 을 준선으로 하는 포물선이 있다. 포물선 위의 두 점 A, B 와 점 F 를 지나는 직선이 직선 l 과 만나는 점을 C 라 하자. 두 점 A, B 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H, I 라 하고 점 B 에서 직선 AH 에 내린 수선의 발을 J 라 하자. $\frac{BJ}{BI} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$ 이고 $AB = 8\sqrt{5}$ 일 때, 선분 HC 의 길이는? [4점]

- ① $21\sqrt{3}$
- ② $22\sqrt{3}$
- ③ $23\sqrt{3}$
- ④ $24\sqrt{3}$
- ⑤ $25\sqrt{3}$



단답형

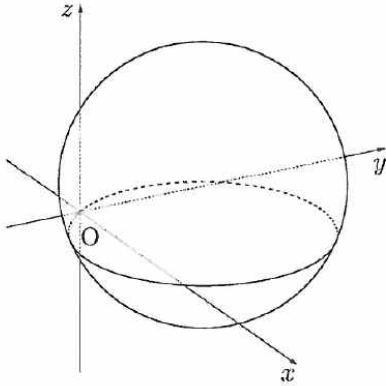
29. 좌표공간에 점 $(4, 3, 2)$ 를 중심으로 하고 원점을 지나는 구

$$S : (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 29$$

가 있다. 구 S 위의 점 $P(a, b, 7)$ 에 대하여 직선 OP 를 포함하는 평면 α 가 구 S 와 만나서 생기는 원을 C 라 하자. 평면 α 와 원 C 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 직선 OP 와 xy 평면이 이루는 각의 크기와 평면 α 와 xy 평면이 이루는 각의 크기는 같다.
- (나) 선분 OP 는 원 C 의 지름이다.

$a^2 + b^2 < 25$ 일 때, 원 C 의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이는 $k\pi$ 이다. $8k^2$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]



30. 좌표평면 위의 세 점 $A(6, 0)$, $B(2, 6)$, $C(k, -2k)$ ($k > 0$)과 삼각형 ABC 의 내부 또는 변 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $5\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
- (나) 점 P 가 나타내는 도형의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다.

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CP}$ 의 최댓값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2023학년도 사관학교 해설

1	③	2	②	3	④	4	④	5	①
6	⑤	7	③	8	②	9	④	10	②
11	⑤	12	①	13	④	14	②	15	⑤
16	8	17	6	18	10	19	64	20	14
21	35	22	11						
[확률과 통계]				23	②	24	③	25	④
26	③	27	①	28	④	29	25	30	27
[미적분]				23	②	24	③	25	①
26	④	27	⑤	28	②	29	49	30	4
[기하]				23	①	24	⑤	25	④
26	③	27	②	28	⑤	29	261	30	7

1) ③

$$\frac{4}{3^{-3}(3+1)} = 27$$

2) ②

$$3a = 15, \therefore a = 5$$

3) ④

$$\frac{a_3^2}{a_4^2} = \frac{1}{r^2} = 2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_4 = a_2 r^2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

4) ④

$$2+2=4$$

5) ①

$$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5} \\ \sin\theta \cos\theta = \frac{a}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{25} \Rightarrow \sin\theta \cos\theta = -\frac{12}{25}$$

$$\therefore a = 5\sin\theta \cos\theta = -\frac{12}{5}$$

6) ⑤

$$f'(x) = 2x^3 + 2ax = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{-a}, 0, \sqrt{-a}$$

$$f'(a) = 2a^3 + 2a^2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$f(0) = a + 8 = b \Rightarrow b = 7$$

7) ③

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$2^{1-x} = 2^2$$

$$x = -1$$

$$\therefore m = \frac{2}{3}$$

8) ②

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & (x < a) \\ 2 & (x > a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 2a = 2a + b \\ 2a - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = -4$$

9) ④

$$f(x) = |\log_2(x-k)|$$

$$\text{교점을 구하는 방정식은 } |\log_2(x-k)| = |\log_2(-x+8)|$$

$$\text{i) } x-k = -x+8 \text{ 이면 } x = \frac{k+8}{2}$$

$$\text{ii) } (x-k)(-x+8) = 1 \text{ 이면 두 근의 합은 } k+8$$

$$\text{따라서 세 실근의 합 } \frac{3}{2}(k+8) = 18 \text{ 이므로 } k = 4$$

10) ②

사차부등식 $xf'(x) > 0$ 을 만족시키는 해집합이 $1 < x < 3$ 이려면

$$f'(x) = 4ax(x-1)(x-3) \text{ 이고 } a < 0 \text{ 이어야 함}$$

$$f'(4) = 48a = -24 \text{ 이므로 } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{적분하면 } f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 3x^2 + 2$$

$$\text{따라서 } f(2) = \frac{10}{3}$$

11) ⑤

$$\overline{P_n Q_n} = -\frac{1}{20}n^2 + \frac{59}{60}n, \overline{Q_n R_n} = \frac{1}{20}n^2 + \frac{1}{60}n$$

$$\text{두 선분의 길이가 같아지는 } n = \frac{29}{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^9 \left(\frac{1}{20}n^2 + \frac{1}{60}n \right) + \left(-5 + \frac{59}{6} \right) \\ &= 10 + \frac{59}{6} = \frac{119}{6} \end{aligned}$$

12) ①

주어진 조건을 만족하려면 $f(\alpha) = 2$ 이거나 $\alpha = 2$ 이다.

$$\text{i) } \alpha = 2 \text{ 이면 } 5 + 2a + b = 4$$

$$f(\alpha) = 2 \text{ 이면 } \alpha = -1, 1 \text{ 또는 } a + b = 2 \text{ 이어야 함.}$$

이때 준식을 만족하는 α 는 4개이고 총합이 8이므로 남은 α 는 6이다.

따라서 $6a + b = 2$ 가 된다.

$$a, b \text{ 를 연립하면 } a = \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$a + b = -\frac{7}{4}$$

13) ④

$$(\text{가}) = r, (\text{나}) = r-2, (\text{다}) = \frac{r^2-4}{(r-2)^2} + 4$$

$$\therefore 8 \times 3 \times 6 = 144$$

14) ②

$$g(x) = 2f(1) - f(x) \text{ 를 정리하면 } \frac{g(x)+f(x)}{2} = f(1)$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 $y=f(1)$ 에 대하여 대칭임을 의미한다.

ㄱ. 연속인 함수의 일부를 대칭시켰고 경계점에서 연속이므로 연속이다. (참)

ㄴ. $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면

$$g(-1) = f(-1) = 3 \text{ 이고}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(-1+h) - 3 + g(-1-h) - 3}{h}$$

$= \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) - \lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) = 0$ 이므로 $a = 0$
 $g(1) = f(1) = 1$ 이므로 $f(x) = x^2 - x + 1$
 c. \perp 과 마찬가지로 $g(b) = 3$ 이고
 $\lim_{x \rightarrow b^+} g'(x) - \lim_{x \rightarrow b^-} g'(x) = 4$
 $t \neq 1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow t^+} g'(x) - \lim_{x \rightarrow t^-} g'(x) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow b^+} g'(x) - \lim_{x \rightarrow b^-} g'(x) = 4$ 일 가능성이 있는 b 는 1 뿐이다.
 그러면 $g(1) = f(1) = 3$ 이고 $-f'(1) - f'(1) = 4$ 이므로
 $f'(1) = -2$
 $f(x) = x^2 + mx + n$ 이라 하면 $m + n = 2, 2 + m = -2$ 이므로
 $m = -4, n = 6$ 이고
 $g(4) = 6 - f(4) = 6 - 6 = 0$ (거짓)
 따라서 옳은 것은 γ, \perp

15) ㉔
 주기가 π 가 되려면 $b = 4$ 또는 $b = 2$ 여야만 함.
 i) $b = 2$ 이면 $f(x) = |2a \cos 2x|$ 이므로 $y = 2a - 1$ 과 교점이 4개가
 생기려면 $2a - 1 > 0$ 이면 된다. 따라서 만족하는 자연수 a 의 개수는
 10개
 ii) $b = 4$ 이면 $f(x) = |2a \cos 2x - 2(a - 2)|$ 이므로 $y = 2a - 1$ 과
 교점이 4개 생기려면 $a \neq 2$ 이면 된다. 이를 만족하는 자연수 a 의
 개수는 9개
 따라서 모든 순서쌍의 개수는 19개

16) 8
 $\log_3 a = A, \log_3 b = B$ 라 하면

$$\begin{cases} AB = 2 \\ \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{A+B}{AB} = 4$$

 $\therefore A+B = 8$

17) 6
 $(1, a+2), (0, 0)$
 $f'(x) = 9x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 8 = a + 2$
 $\therefore a = 6$

18) 10
 $x^3 + 2x = 3x + 6$
 $x^3 - x - 6 = 0$
 $(x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$
 $\therefore S = \int_0^2 (-x^3 + x + 6) dx = 10$

19) 64

```

        graph LR
            a1[1] --- a2[2]
            a1 --- a3[3]
            a2 --- a4[4]
            a2 --- a5[6]
            a3 --- a6[6]
            a3 --- a7[9]
            a4 --- a8[8]
            a4 --- a9[12]
        
```

 $a_k = 64 \Rightarrow k = 64$

20) 14
 (가), (나)의 조건에 따르면

$s(3) - x(3) = 8$ 이고 $k = 3, \int_{t_1}^3 v(t) dt = 4$
 $\int_{t_1}^3 v(t) dt = 4 = \frac{1}{2} \cdot (3 - t_1) \cdot 4$ 이므로 $t_1 = 1$
 그러므로 $|3a - b| = 4$ 이고 $2a - b = 0$
 따라서 $a = 4, b = 8$
 $v(6) = 12$ 이므로
 $\int_1^6 v(t) dt = \int_1^3 v(t) dt + \int_3^6 v(t) dt$
 $= -4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 14$

21) 35
 (나)-(가)를 하면 $(l+m-13)d = \frac{3}{2}$

$l+m-13 = \frac{3}{2d}$ 이므로 $2d = -3, -1, 1, 3$ 이고
 $l+m = 10, 12, 14, 16$
 여기서 $a_l + a_m = 1$ 을 만족시키는 순서쌍 (l, m) 의 개수가 6이 되려면
 $l+m = 14$ 이고 $a_6 + a_8 = 1$ 이므로 $d = \frac{3}{2}$
 $\sum_{n=1}^{14} a_n = \frac{(a_1 + a_{14})}{2} \cdot 14 = 7(a_6 + a_9) = 7\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{35}{2}$
 따라서 $2S = 35$

22) 11

$$g(x) = \begin{cases} 2f(x) - 1 & (f(x) \geq 1) \\ 1 & (f(x) < 1) \end{cases}$$

 (가)에서
 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 교점은 $|f(x) - 1| = 0$ 에서 생김.
 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 합은 3이고
 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 $y = 1$ 에 접하므로
 $f(x) = a(x-1)^2(x-2) + 1$
 (나)를 만족시키려면 $a < 0$
 $\int_0^n g(x) dx$ 는 $x = 2$ 에서 가장 크므로
 $\int_0^2 g(x) dx = 2a \int_0^2 (x-1)^2(x-2) dx + 2$
 $= 2a \left\{ \int_0^2 (x-1)^3 dx - \int_0^2 (x-1)^2 dx \right\} + 2$
 $= 2 - \frac{4}{3}a$
 $2 < 2 - \frac{4}{3}a < 2 + 16$ 이므로 $a > -12$
 따라서 이를 만족하는 함수 $f(x)$ 의 개수는 11개다.

23) ㉔
 ${}_6C_4 \times 2^2 = 60$

24) ㉓
 $a + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{11}$
 $E(X) = a + a + a = \frac{18}{11}$
 $\therefore E(11X + 2) = 20$

25) ㉔

$$Z = \frac{\bar{X} - 42}{\frac{4}{\sqrt{4}}} = \frac{\bar{X} - 42}{2}$$

$$P(\bar{X} \geq 43) = P\left(Z \geq \frac{1}{2}\right) = 0.3085$$

26) ③

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(S) - n(A^c \cup B^c) \\ &= 5! - 2 \times (4! \times 2!) + 3! \times 2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

27) ①

$$\frac{D}{4} = b^2 - a^2 + 3a \geq 0$$

$$b^2 \geq a(a-3)$$

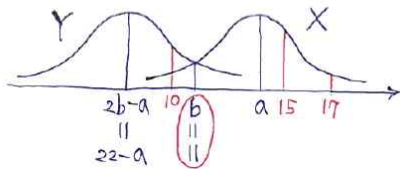
a	b
1	1 ~ 6
2	1 ~ 6
3	1 ~ 6
4	2 ~ 6
5	4 ~ 6
6	5 ~ 6

$$\therefore \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

28) ④

$${}_4H_8 - \left(4 + \frac{4!}{2!}\right) = 165 - 16 = 149$$

29) 25

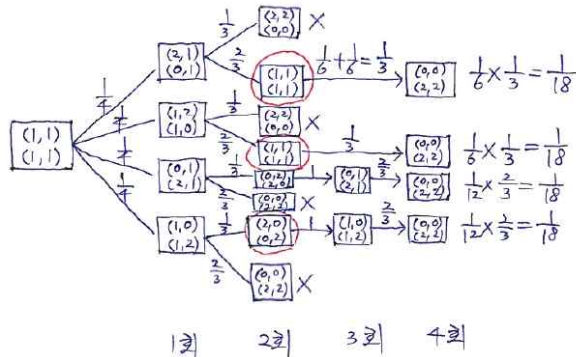


$$17 - a > a - 12 > |a - 15|$$

$$11 < a < 14.5$$

$$a = 12, 13, 14$$

30) 27



$$\therefore \frac{3}{18} = \frac{3}{4} = p \Rightarrow 36p = 27$$

23) ②

$$a = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + bn} - \sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2n}{bn+1} \Rightarrow \frac{2}{b} = 4 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

24) ③

$$f(1) = 5, f'(x) = 3x^2 + 3, h'(x) = e^x$$

$$\therefore h'(g(5))g'(5) = h'(1) \times \frac{1}{f'(1)} = \frac{e}{6}$$

25) ①

$$\frac{2}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \Rightarrow 2 \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$$

$$= \int_1^2 2xe^{x^2-1} dx = \left[e^{x^2-1}\right]_1^2 = e^3 - 1$$

26) ④

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

$$f(e) = -\frac{2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

27) ⑤

$$S_1 = 12 - \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 3\right) = \frac{21}{4}$$

$$11x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{11}$$

$$\therefore \frac{\frac{21}{4}}{1 - \frac{9}{121}} = \frac{363}{64}$$

28) ②

$$\sin x = a \tan x \Rightarrow \cos x = a \text{ 또는 } x = 0$$

$$\cos \theta = a$$

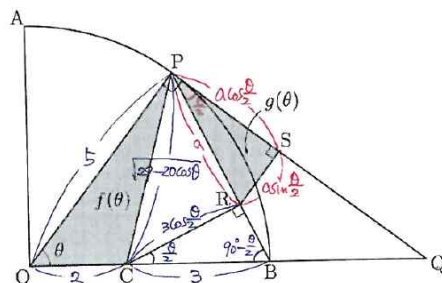
$$f(a) = \int_0^\theta (\sin x - a \tan x) dx = \left[-\cos x + a \ln |\cos x|\right]_0^\theta$$

$$= 1 - \cos \theta + a \ln |\cos \theta| = 1 - a + a \ln a$$

$$f'(a) = -1 + \ln a + 1 = \ln a$$

$$f'(e^{-2}) = -2$$

29) 49



$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 \times \sin \theta = 5 \sin \theta$$

$$PC = \sqrt{25 + 4 - 20\cos\theta} = \sqrt{29 - 20\cos\theta}$$

$$a^2 = 29 - 20\cos\theta - 9\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 20(1 - \cos\theta) + 9\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{20\sin^2\theta}{1 + \cos\theta} + 9\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2}a^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}a^2\sin\theta$$

$$= \frac{1}{4}\sin\theta \times \left(\frac{20\sin^2\theta}{1 + \cos\theta} + 9\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore 80 \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$$

$$= 80 \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}\sin\theta \times \left(\frac{20\sin^2\theta}{1 + \cos\theta} + 9\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2 \times 5\sin\theta}$$

$$= 80 \times \left(\frac{1}{4} \times \left(\frac{20}{2} + 9 \times \frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= 49$$

30) 4

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x+1)}{x} = 2$$

$$\Rightarrow f(x+1) = -2x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow f(x) = -2(x-1)^2 + 2(x-1) = -2(x-1)(x-2)$$

$$g'(a) = f(a) + f'(a)$$

$$= -2(a-1)(a-2) - 2(2a-3)$$

$$= -2(a^2 - a - 1) = -2$$

$$\Rightarrow a = 2$$

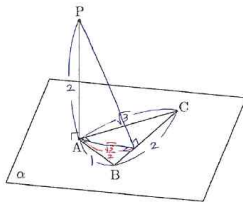
$$g(x) = \begin{cases} -2x + 2 & (x < 0) \\ -2(x-1)(x-2)e^{x-2} + b & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$b = g(2) = -2 \Rightarrow a - b = 4$$

23) ①

$$Q(2, -1, -3) \Rightarrow \overline{PQ} = 2\sqrt{10}$$

24) ⑤



$$\sqrt{4 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

25) ④

$$\text{접선} : y = \frac{3}{4}x - \sqrt{\frac{9}{16} \times 16 + 9} = \frac{3}{4}x - 3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y - 12\sqrt{2} = 0 \\ 3x - 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{12(\sqrt{2}-1)}{5} = 6(\sqrt{2}-1)$$

26) ③

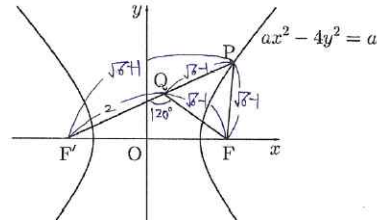
$$m = n \Rightarrow \overline{AD} = m(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{2}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\therefore m = n = \frac{2}{3}$$

[참고]

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) \Rightarrow \overline{AD} = \frac{4}{3}\overline{AM} = \frac{2}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

27) ②



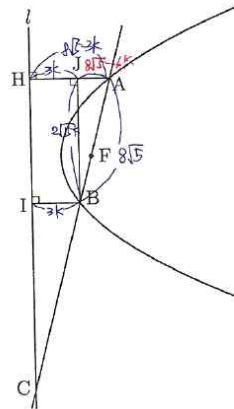
$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{\frac{a}{4}} = 1$$

$$\overline{FF'} = 4 + (7 - 2\sqrt{6}) + 2(\sqrt{6} - 1)$$

$$= 9 = 4\left(1 + \frac{a}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a = 5$$

28) ⑤



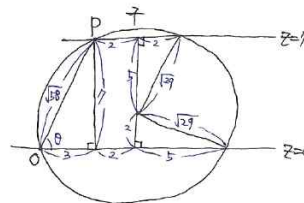
$$(8\sqrt{5})^2 - (8\sqrt{5} - 6k)^2 = 60k^2$$

$$6k(16\sqrt{5} - 6k) = 60k^2$$

$$k = \sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{HC} = 5\sqrt{5} \times \frac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = 25\sqrt{3}$$

29) 261



$$k\pi = \left(\frac{\sqrt{58}}{2}\right)^2 \pi \times \frac{3}{\sqrt{58}} = \frac{3\sqrt{58}}{4} \pi$$

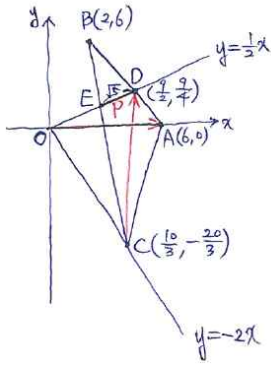
$$\therefore 8k^2 = 8 \times \frac{9 \times 58}{16} = 261$$

30) 7

$$5(4, -6) \cdot (x, y) - (2, 6) \cdot (x-6, y) = 12$$

$$20x - 30y - 2x + 12 - 6y = 12$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$



$$\text{직선 } AB : y = -\frac{3}{2}(x-6) = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow E\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\text{직선 } BE : y = -\frac{19}{2}(x-2) + 6 = -2x \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CP} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CD} = (6, 0) \cdot \left(\frac{7}{6}, \frac{107}{12}\right) = 7$$