제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + a}{x - 2} = b$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 = 1, \ \frac{a_4 + a_5}{a_2 + a_3} = 4$$

일 때, a_9의 값은? [2점]

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

3. $\sum_{k=1}^{9} k(2k+1)$의 값은? [3점]

① 600 ② 605 ③ 610 ④ 615 ⑤ 620

4. 함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + ax + 6$에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h \times f(h)} = 1$$

일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

5. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=4x^3+ax$$

이고 $f(0)=-2$, $f(1)=1$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

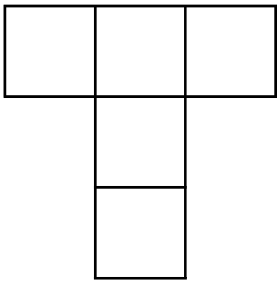
6. $\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

7. 함수 $f(x)=\cos^2 x-4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

8. 그림과 같은 5개의 칸에 5개의 수 $\log_a 2$, $\log_a 4$, $\log_a 8$, $\log_a 32$, $\log_a 128$을 한 칸에 하나씩 적는다. 가로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세 수의 합과 세로로 나열된 3개의 칸에 적힌 세수의 합이 15로 서로 같을 때, a의 값은? [3점]



① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2 ④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{3}}$

9. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

라 하자. $\dfrac{S_{10}}{T_{10}} = 6$일 때, T_{37}의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

10. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5a & (x < a) \\ -2x + 4 & (x \geq a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(-x)f(x)$가 $x = a$에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t,\ v_2(t)=2t$$

이다. 두 점 P, Q가 시각 $t=a(a>0)$에서 만날 때, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

12. 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+5 & (-1 \leq x \leq 1) \\ x^2-4x+a & (1 < x \leq 3) \end{cases}$$

의 최댓값과 최솟값의 합이 0일 때, $\lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -5 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -4 ④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ -3

13. $a>1$인 실수 a에 대하여 좌표평면에 두 곡선

$$y=a^x,\ y=\left|a^{-x-1}-1\right|$$

이 있다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 곡선 $y=\left|a^{-x-1}-1\right|$은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.
ㄴ. $a=4$이면 두 곡선의 교점의 개수는 2이다.
ㄷ. $a>4$이면 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2 보다 크다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 함수 $f(x)=x^3-x$와 상수 $a(a>-1)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(a,\ f(a))$를 지나는 직선을 $y=g(x)$라 하자.

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ g(x) & (-1\le x\le a) \\ f(x-m)+n & (x>a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 함수 $h(x)$는 일대일대응이다.

$m+n$의 값은? (단, m, n은 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

> (가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{2n}=a_3\times a_n+1,\ \ a_{2n+1}=2a_n-a_2$$
> 이다.

$a_1=m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

① -53　② -51　③ -49　④ -47　⑤ -45

단답형

16. 함수 $f(x)=(x+3)(x^3+x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

17. $0\le x<8$일 때, 방정식 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{3}{4}$의 모든 해의 합을 구하시오. [3점]

18. 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$x^3-5x^2+3x+n \geq 0$$

이 항상 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x)=\log_2 kx$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(5)$의 값을 구하시오. (단, k는 0이 아닌 상수이고, O는 원점이다.) [3점]

20. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

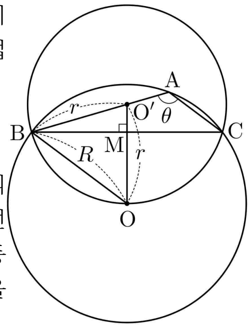
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \leq x \leq a) \\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오. [4점]

21. $\angle \mathrm{BAC}=\theta\left(\frac{2}{3}\pi \le \theta < \frac{3}{4}\pi\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB 위에 있을 때, $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$의 값은 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2R$$



세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자. 선분 OO′는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면

$$\overline{\mathrm{O'M}}=r-\overline{\mathrm{OM}}$$
$$=r-|R\cos\theta|$$

직각삼각형 O′BM에서

$R=$ (가) $\times r$

이므로

$\sin(\angle \mathrm{O'BM})=$ (나)

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=$ (다)

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

22. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)\,ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오. [4점]

> $g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

제 2 교시 수학 영역(확률과 통계)

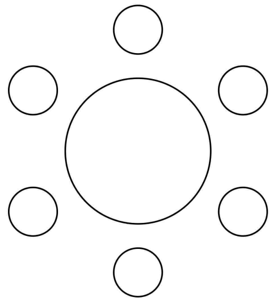
5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^6$의 전개식에서 x^2의 계수는? [2점]

① 40 ② 60 ③ 80 ④ 100 ⑤ 120

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 있다. 이 6개의 공을 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 3의 배수가 적혀 있는 두 공이 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 48 ② 54 ③ 60 ④ 66 ⑤ 72



25. 어느 학교의 컴퓨터 동아리는 남학생 21명, 여학생 18명으로 이루어져 있고, 모든 학생은 데스크톱 컴퓨터와 노트북 컴퓨터 중 한 가지만 사용한다고 한다. 이 동아리의 남학생 중에서 데스크톱 컴퓨터를 사용하는 학생은 15명이고, 여학생 중에서 노트북 컴퓨터를 사용하는 학생은 10명이다. 이 동아리 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 데스크톱 컴퓨터를 사용하는 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{21}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{15}{23}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{18}{23}$

26. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 10장의 카드 중에서 임의로 선택한 서로 다른 3장의 카드에 적혀 있는 세 수의 곱이 4의 배수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

27. 평균이 100, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(98 \le \overline{X} \le 102) = 0.9876$ 일 때, σ의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f : X \to Y$의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x) = 1$이다.

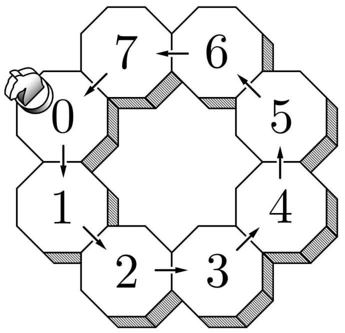
① 24 ② 27 ③ 30 ④ 33 ⑤ 36

단답형

29. 그림과 같이 8개의 칸에 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 말판이 있고, 숫자 0이 적혀 있는 칸에 말이 놓여 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수가 3 이상이면 말을 화살표 방향으로 한 칸 이동시키고, 나오는 눈의 수가 3보다 작으면 말을 화살표 반대 방향으로 한 칸 이동시킨다.

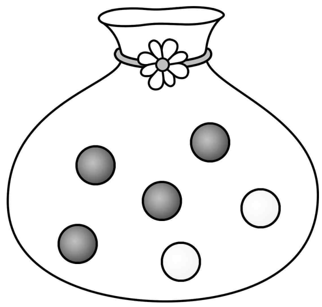
위의 시행을 4회 반복한 후 말이 도착한 칸에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(36X)$의 값을 구하시오. [4점]



30. 검은 공 4개, 흰 공 2개가 들어 있는 주머니에 대하여 다음 시행을 2회 반복한다.

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낸 후, 꺼낸 공 중에서 흰 공은 다시 주머니에 넣고 검은 공은 다시 넣지 않는다.

두 번째 시행의 결과 주머니에 흰 공만 2개 들어 있을 때, 첫 번째 시행의 결과 주머니에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



※ 확인 사항 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{2n^2+1}\right)=1$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

24. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}\ln 2$ ② $\frac{2}{3}\ln 2$ ③ $\ln 2$ ④ $\frac{4}{3}\ln 2$ ⑤ $\frac{5}{3}\ln 2$

25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

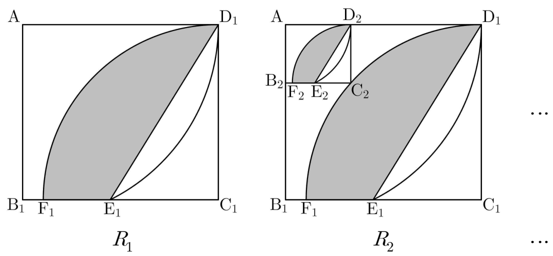
$$x=e^{t}\cos(\sqrt{3}t)-1,\ y=e^{t}\sin(\sqrt{3}t)+1\ (0\le t\le \ln 7)$$

의 길이는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

26. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB_1}}=2$, $\overline{\mathrm{AD_1}}=\sqrt{5}$인 직사각형 $\mathrm{AB_1C_1D_1}$이 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD_1}}$인 원과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점을 $\mathrm{E_1}$, 중심이 $\mathrm{C_1}$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{C_1D_1}}$인 원과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 교점을 $\mathrm{F_1}$이라 하자. 호 $\mathrm{D_1F_1}$과 두 선분 $\mathrm{D_1E_1}$, $\mathrm{F_1E_1}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 $\mathrm{AB_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{D_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{AD_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB_2}} : \overline{\mathrm{AD_2}}=2:\sqrt{5}$인 직사각형 $\mathrm{AB_2C_2D_2}$를 그린다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD_2}}$인 원과 선분 $\mathrm{B_2C_2}$의 교점을 $\mathrm{E_2}$, 중심이 $\mathrm{C_2}$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{C_2D_2}}$인 원과 선분 $\mathrm{B_2C_2}$의 교점을 $\mathrm{F_2}$라 하자. 호 $\mathrm{D_2F_2}$와 두 선분 $\mathrm{D_2E_2}$, $\mathrm{F_2E_2}$로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



① $\dfrac{8\pi+8-8\sqrt{5}}{7}$ ② $\dfrac{8\pi+8-7\sqrt{5}}{7}$

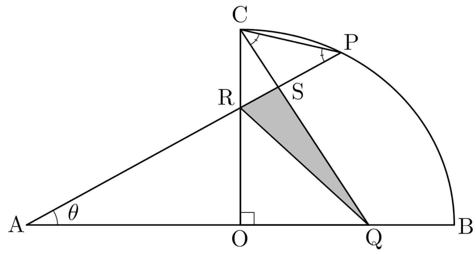
③ $\dfrac{9\pi+9-9\sqrt{5}}{8}$ ④ $\dfrac{9\pi+9-8\sqrt{5}}{8}$

⑤ $\dfrac{10\pi+10-10\sqrt{5}}{9}$

27. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(2x^2+2x+1)(x>0)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $f'(2\ln 5)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{14}$ ② $\frac{13}{7}$ ③ $\frac{27}{14}$ ④ 2 ⑤ $\frac{29}{14}$

28. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OB를 반지름으로 하는 사분원 OBC가 있다. 호 BC를 움직이는 점 P에 대하여 선분 OB 위의 점 Q가 $\angle$APC$=\angle$PCQ를 만족시킨다. 선분 AP가 두 선분 CO, CQ와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. $\angle$PAB$=\theta$일 때, 삼각형 RQS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

단답형

29. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) < 0$이다.
> (나) $\displaystyle\int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|\,dx = 2$, $\displaystyle\int_{0}^{1} |f(x)\sin x|\,dx = 3$

함수 $g(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} |f(t)\sin t|\,dt$에 대하여

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x\,dx = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 2) \\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $g(2) \neq 0$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.
> (다) $g(k) = 0$, $g'(k) = \dfrac{16}{3}$ 인 실수 k가 존재한다.

함수 $g(x)$의 극솟값이 p일 때, p^2의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 세 벡터 $\vec{a}=(x,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ y)$, $\vec{c}=(-3,\ 5)$가 $2\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$를 만족시킬 때, $x+y$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

24. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ -3)$, $\mathrm{B}(6,\ -4,\ 15)$에 대하여 선분 AB 위에 점 C가 있다. 세 점 A, B, C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C'이라 하자. $2\overline{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}=\overline{\mathrm{C}'\mathrm{B}'}$일 때, 점 C의 z좌표는? [3점]

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

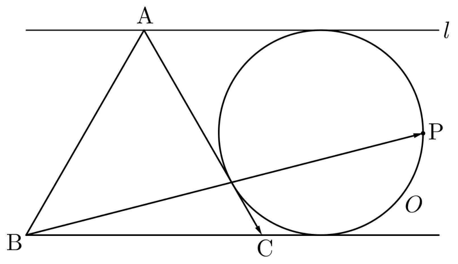
25. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선의 x절편이 $\frac{1}{3}$이다. 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F라 할 때, 선분 PF의 길이는? [3점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

26. 좌표공간에서 중심이 $\mathrm{A}(a,\ -3,\ 4)(a>0)$인 구 S가 x축과 한 점에서만 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{3}$일 때, 구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리는? (단, O는 원점이다.) [3점]

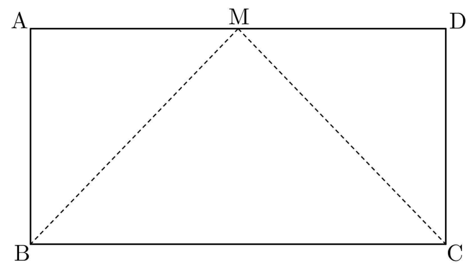
① $3\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{14}$ ③ $\sqrt{58}$ ④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $\sqrt{62}$

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에 대하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선을 l이라 할 때, 세 직선 AC, BC, l에 모두 접하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? (단, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.) [3점]

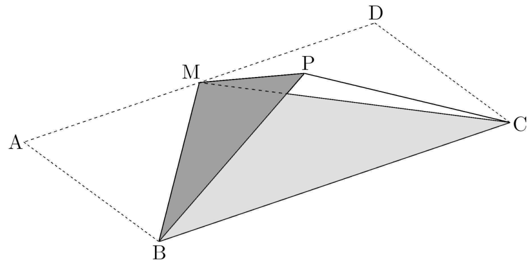


① 46 ② 47 ③ 48 ④ 49 ⑤ 50

28. [그림 1]과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{7}$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 두 선분 BM, CM을 접는 선으로 하여 [그림 2]와 같이 두 점 A, D가 한 점 P에서 만나도록 종이를 접었을 때, 평면 PBM과 평면 BCM이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



[그림 1]

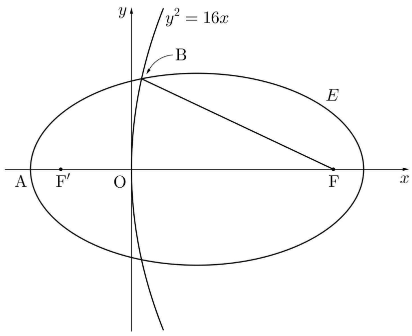


[그림 2]

① $\frac{17}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{19}{27}$ ④ $\frac{20}{27}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

단답형

29. 그림과 같이 포물선 $y^2=16x$의 초점을 F라 하자. 점 F를 한 초점으로 하고 점 A$(-2,\ 0)$을 지나며 다른 초점 F′이 선분 AF 위에 있는 타원 E가 있다. 포물선 $y^2=16x$가 타원 E와 제1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{BF}}=\dfrac{21}{5}$일 때, 타원 E의 장축의 길이는 k이다. $10k$의 값을 구하시오. [4점]



30. 좌표평면 위의 두 점 A$(6,\ 0)$, B$(6,\ 5)$와 음이 아닌 실수 k에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\le 21$이다.
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\le 21$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2022학년도 사관학교 기출해설

1	①	2	④	3	④	4	⑤	5	⑤
6	③	7	④	8	②	9	③	10	①
11	②	12	③	13	②	14	④	15	①
16	18	17	12	18	9	19	16	20	290
21	27	22	56						
[확률과 통계]				23	②	24	①	25	③
26	④	27	⑤	28	②	29	80	30	41
[미적분]				23	⑤	24	②	25	④
26	③	27	①	28	④	29	19	30	64
[기하]				23	③	24	⑤	25	①
26	②	27	④	28	⑤	29	66	30	37

1) ①

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x+a}{x-2}$ 에서 $x \to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2-x+a)=0$, $2+a=0$, $a=-2$

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x+a}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3$

$\therefore$ $a+b=(-2)+3=1$

2) ④

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$\frac{a_4+a_5}{a_2+a_3} = \frac{ar^3+ar^4}{ar+ar^2} = r^2 = 4$

$a_9 = a_3 \times r^6 = a_3 \times (r^2)^3$

$=1 \times 4^3 = 64$

3) ④

$\sum_{k=1}^{9} k(2k+1) = \sum_{k=1}^{9} 2k^2+k$

$=2\times \frac{9\times 10\times 19}{6} + \frac{9\times 10}{2}$

$=570+45=615$

4) ⑤

$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h\times f(h)}$

$=\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \times \frac{1}{f(h)}$

$=f'(2)\times \frac{1}{f(0)}=1$

$f'(2)=f(0)=6$이므로 $f'(x)=3x^2-8x+a$에서

$f'(2)=-4+a=6$

$\therefore$ $a=10$

5) ⑤

$f'(x)=4x^3+ax$에서 $f(x)=x^4+\frac{a}{2}x^2+C$

$f(0)=-2$이므로 $f(0)=C=-2$　　…… ㉠

$f(1)=1$에서 $f(1)=1+\frac{a}{2}+C=1$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $C=-2$, $a=4$

$f(2)=16+2\times 2^2-2=22$

6) ③

$\sqrt[m]{64}\times\sqrt[n]{81}=2^{\frac{6}{m}}\times 3^{\frac{4}{n}}$가 자연수가 되려면 m은 6의 약수, n은 4의 약수이어야 한다.

m, n은 2이상의 자연수이어야 하므로 m은 2, 3, 6으로 3가지

n은 2, 4로 2가지

따라서 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $3\times 2=6$

7) ④

$f(x)=\cos^2 x-4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3$

$=\cos^2 x+4\sin x+3$

$=-\sin^2 x+4\sin x+4$

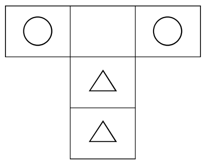
$\sin x=t$ $(-1\le t\le 1)$로 치환하면

$y=-t^2+4t+4$

이차함수의 축의 방정식이 $t=2$이므로 $t=1$일 때 최댓값

$-1+4+4=7$이다.

8) ②



그림에서 가로와 세로의 합이 모두 같아야 하므로 ○와 △끼리의 합이 동일해야 한다.

따라서 $(\log_a 2,\ \log_a 128)$, $(\log_a 8,\ \log_a 32)$로 짝지어서 ○, △에 써 넣으면 된다.

$\log_a 2+\log_a 128+\log_a 4=15$, $\log_a 2^{10}=15$

$a^{15}=2^{10}$

$\therefore$ $a=2^{\frac{2}{3}}$

9) ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5\times 2a_{\frac{11}{2}}=10a_{\frac{11}{2}}$

$T_{10}=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_9+a_{10}=5d$

$\frac{S_{10}}{T_{10}}=6$에서 $10a_{\frac{11}{2}}=6\times 5d$이므로 $a_{\frac{11}{2}}=3d$

즉, $1+\frac{9}{2}d=3d$이므로 $d=-\frac{2}{3}$

$T_{37}=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots+a_{36}-a_{37}$

$=-a_1-18d$

$=-1-18\times\left(-\frac{2}{3}\right)=11$

10) ①

$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x\ge a)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to a+} f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(-2a+4)$

$\lim\limits_{x \to a-} f(-x)f(x) = \{(-a)^2 - 5a\} \times (a^2 - 5a)$

따라서 $a^2 - 5a = 0$이거나 $-2a + 4 = a^2 - 5a$이므로

$a = 4$ 또는 $a = 5$ ($\because$ $a > 0$)

따라서 모든 a의 값의 합은 9

11) ②

$\begin{cases} x_1(t) = t^3 - 3t^2 \\ x_2(t) = t^2 \end{cases}$ 이므로 $a^3 - 3a^2 = a^2$

$\therefore$ $a = 4$ ($\because$ $a > 0$)

또한, $\{x_1(t)\}' = 3t^2 - 6t$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |\,3t^2 - 6t\,|dt = \int_0^2 (-3t^2 + 6t)dt + \int_2^4 (3t^2 - 6t)dt$$

$$= \frac{3 \times (2-0)^3}{6} + x_1(4) - x_1(2)$$

$$= 4 + 20 = 24$$

따라서 움직인 거리는 24이다.

12) ③

$y = x^3 - 6x^2 + 5$의 양변을 미분하면

$y' = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

즉, $y' = 0$에서 $x = 0$, $x = 4$이므로

$x = 0$에서 극대, $x = 4$에서 극소를 갖는다.

주어진 범위가 $-1 \le x \le 1$이므로 $x = 0$일 때, 최댓값 5, $x = -1$에서 최솟값 -2를 갖는다.

즉, $y = x^2 - 4x + a$ $(1 < x \le 3)$은 $x = 2$에서 대칭이고 최솟값을 갖는다.

즉, 최댓값이 5이므로 최솟값은 -5이어야 한다.

따라서 $a - 4 = -5$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = a - 3 = -4$

13) ②

ㄱ. $x = -1$을 대입하면 $|a^0 - 1| = 0$ (참)

ㄴ. $x < -1$인 곳에서는 교점이 반드시 생긴다.

$x > 0$인 곳에서 교점을 조사해 보면,

$a^x = 1 - a^{x-1}$, $a^x + a^{-x-1} = 1$

이때 산술 기하 평균에서 $a^x + a^{-x-1} \ge 2\sqrt{a^{-1}}$이므로 $a = 4$일 때 등호 성립조건에 부합한다.

따라서 $4^x = 4^{-x-1}$ 즉, $x = -\dfrac{1}{2}$에서 접한다.

그러므로 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $x < -1$에서의 교점은 -2보다 크고 -1보다 작다.

$x > -1$에서의 교점은 $a^x = 1 - a^{x-1}$을 풀어보면

$t = 1 - \dfrac{1}{at}$ ($\because$ $a^x = t$로 치환) 즉, $at^2 - at + 1 = 0$

이때 $a^\alpha \times a^\beta = \dfrac{1}{a} = a^{-1}$이므로 두 근의 합은 -1이다.

따라서 모든 교점의 합은 -3과 -2사이이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14) ④

(가)에 의하여 $(a,\ f(a))$는 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 $y = f(x)$의 교점이다.

$x = 0$에서 변곡점이므로 $1 : 2$ 비율관계에 의해 $a = 2$가 성립한다.

계속 증가해야 하므로 $(-1,\ 0)$을 변곡점에 대해 대칭시키면 $(1,\ 0)$이므로 (나)를 만족한다.

따라서 $(1,\ 0)$에서 $(2,\ 6)$으로 이동하므로 $m = 1$, $n = 6$이다.

15) ①

$\begin{cases} a_2 = a_1 a_3 + 1 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ a_3 = 2a_1 - 2a_2 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a_2 = a_1(2a_1 - a_2) + 1$

$\therefore$ $a_2 = \dfrac{2{a_1}^2 + 1}{a_1 + 1} = 2(a_1 - 1) + \dfrac{3}{a_1 + 1}$

이때 $a_1 + 1$이 3의 약수가 되어야 하므로

$\therefore$ $a_1 + 1 = -3,\ -1,\ 1,\ 3$

따라서 a_1의 최솟값 m은 $m = -4$

따라서 $a_2 = -11$, $a_3 = 3$이므로

$a_9 = 2a_4 - a_2$

$= 2(a_2 a_3 + 1) - a_2$

$= 2\{(-11) \times 3 + 1\} + 11$

$= -53$

16) 18

$f(x) = (x+3)(x^3 + x)$의 양변을 미분하면

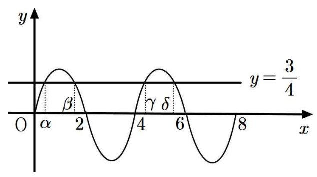
$f'(x) = 1 \cdot (x^3 + x) + (x+3)(3x^2 + 1)$

따라서 $f'(1) = 2 + 4 \cdot 4 = 18$

17) 12

$y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$이므로 주기는 4이다.

$0 \le x \le 8$일 때 $\sin\dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{3}{4}$을 만족시키는 해는 아래 그래프와 같이 α, β, γ, δ라 하자.



(i) $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y = \dfrac{3}{4}$의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 두 값의 평균은 1이므로 $\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 1$에서 $\alpha + \beta = 2$이다.

(ii) $y = \sin\dfrac{\pi x}{2}$의 그래프와 $y = \dfrac{3}{4}$의 교점의 x좌표를 γ, δ라 하면 두 값의 평균은 5이므로 $\dfrac{\gamma + \delta}{2} = 5$에서 $\gamma + \delta = 10$이다.

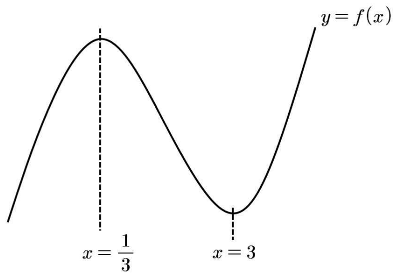
따라서 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 + 10 = 12$

18) 9

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + n$이라 하자.

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 0$에서 $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$, $f'(3) = 0$

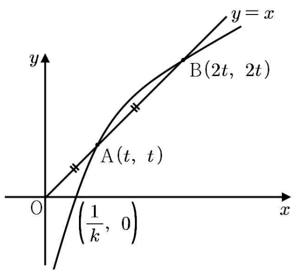
즉, 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



이때 $f(0)=n$, $f(3)=n-9$이므로 양의 실수 x에 대하여 $y=f(x)$의 최솟값은 $n-9$

따라서 $n-9 \geq 0$이므로 자연수 n의 최솟값은 9

19) 16



그림과 같이 $\overline{OA}=\overline{OB}$이고, 두 점 A, B가 $y=x$위의 점이므로 두 점 A, B의 좌표는 A$(t,\ t)$, B$(2t,\ 2t)$이다.

$y=\log_2 kt$에 점 $(t,\ t)$, $(2t,\ 2t)$를 대입하면

$t=\log_2 kt$ …… ㉠

$2t=\log_2 2kt$ …… ㉡

㉠$\times 2$를 하면 $2t=2\log_2 kt$

$\therefore\ 2t=\log_2 (kt)^2$ …… ㉢

㉡과 ㉢를 연립하면 $\log_2 2kt=\log_2 (kt)^2$,

$(kt)^2=2kt$, $kt=2$ ($\because\ kt>0$)

㉠에서 $kt=2$이므로 $t=\log_2 2=1$

$\therefore\ k=2$

$\therefore\ f(x)=\log_2 2x$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(5)=a$로 놓으면 $f(a)=5$이므로

$\log_2 2a=5$, $2a=2^5$

$\therefore\ a=16$

따라서 $g(5)=16$

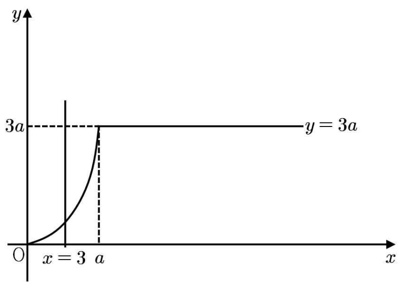
20) 290

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{a}x^2 & (-a \leq x \leq a) \\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a) \end{cases}$$

의 그래프는 y축 대칭함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 8이면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 4이다.

$x \geq 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

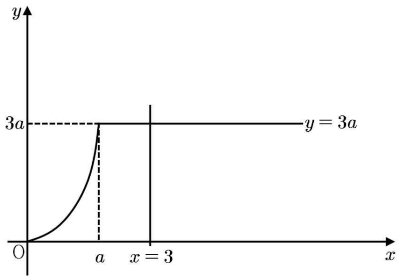
(ⅰ) $a \geq 3$일 때



$$\int_0^3 \frac{3}{a}x^2 dx=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^3=\frac{27}{a}=4$$

$\therefore\ a=\dfrac{27}{4}$

(ⅱ) $0<a<3$일 때



$$\int_0^a \frac{3}{a}x^2 dx+(3-a)\times 3a$$

$$=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^a+9a-3a^2$$

$=-2a^2+9a$

$=4$

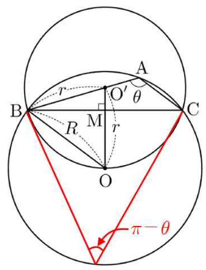
$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$ ($\because\ 0<a<3$)

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 만족하는 a는 $\dfrac{27}{4}$, $\dfrac{1}{2}$이므로 모든 a값의 합 S는

$S=\dfrac{29}{4}$

$\therefore\ 40S=40\times\dfrac{29}{4}=290$

21) 27



□BACQ는 원 위에 내접하는 사각형이므로 $\angle$BQC $=\pi-\theta$

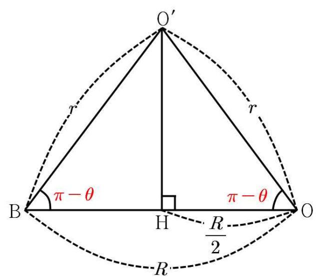
$\angle$BQC는 $\overset{\frown}{BC}$ 의 원주각이고 $\angle$BOC는 $\overset{\frown}{BC}$ 의 중심각이므로

$\angle$BOC $=2\pi-2\theta$

$\triangle$BOM $\equiv$ $\triangle$COM이므로 $\angle$O′OB $=\pi-\theta$이고

$\angle$BO′O $=2\theta-\pi$이다.

(ⅰ)



$\triangle$O′BO는 이등변삼각형이므로

$\angle$O′BO $=$ $\angle$O′OB $=\pi-\theta$

점 O′에서 $\overline{BO}$에 수선을 긋고, 수선의 발을 H라고 하면

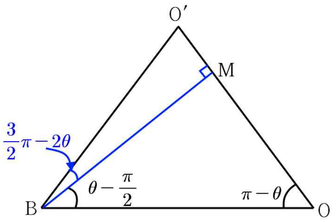
$\triangle$O′OH에서

$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{\frac{R}{2}}{r}$, $-\cos\theta=\dfrac{\frac{R}{2}}{r}$, $\dfrac{R}{2}=-r\cos\theta$

$\therefore\ R=-2\cos\theta r$

따라서 (가)는 $-2\cos\theta$ ...... ㉠

(ⅱ)



$\triangle BO'M$에서

$\angle O'BM+\angle BMO'+\angle MO'B=\pi$

$\angle O'BM+\frac{\pi}{2}+2\theta-\pi=\pi$

$\angle O'BM=\frac{3}{2}\pi-2\theta$

$\triangle O'BM$에서

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\theta\right)=-\cos 2\theta$

따라서 (나)는 $-\cos 2\theta$ ...... ㉡

(ⅲ) $\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle O'BM)}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$

따라서 (다)는 $\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$ ...... ㉢

즉, ㉠, ㉡, ㉢에서

$f(\theta)=-2\cos\theta$, $g(\theta)=-\cos 2\theta$, $h(\theta)=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$

그런데, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2$

$=\frac{6}{5}+1-2\times\frac{2}{5}+3$

$=\frac{22}{5}$

따라서 $\frac{q}{p}=\frac{22}{5}$에서 $p=5$, $q=22$이므로

$p+q=2+5=27$

22) 56

함수 $f(x)$는 일차함수이므로 함수 $g(x)=\int_0^x (x-2)f(s)ds$는 삼차함수이다.

$g(x)=(x-2)\int_0^x f(s)ds=0$에서 $g(2)=g(0)=0$이므로 $g(x)=0$의 세 근을 $x=0,\ 2,\ \alpha$라 하자.

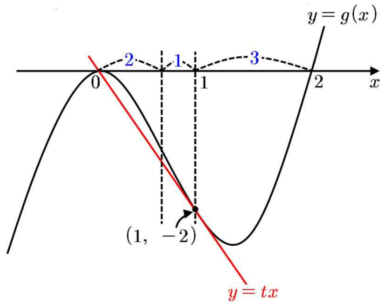
이때 $y=tx$는 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이므로 함수 $h(t)$가 $t=0$에서 불연속이기 위해서는 $y=g(x)$는 x축에 접해야 한다.

따라서 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=2$이다.

(ⅰ) $g(x)=mx^2(x-2)$일 때

m이 양수일 때와 음수일 때를 나누어 $y=g(x)$와 $y=tx$를 그려보면 다음과 같다.

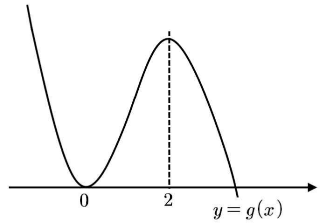
$m>0$일 때



이때의 t의 값은 -2가 되어야 하고 $y=g(x)$와 $y=tx$의 교점은 $(1,\ -2)$이다.

$\therefore\ g(x)=2x^2(x-2)$, $g(4)=64$

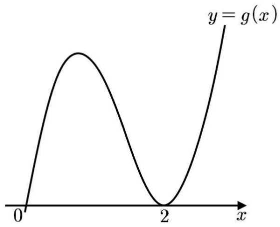
$m<0$일 때



$g(x)$가 $x=0$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.

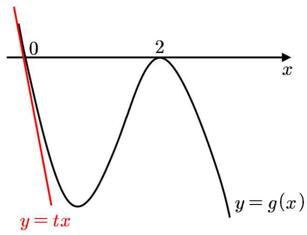
(ⅱ) $y=mx(x-2)^2$일 때

$m>0$일 때



$g(x)$가 $x=2$에서 x축에 접하므로 $t=-2$일 때 불연속이 될 수 없다.

$m<0$일 때



마찬가지로 이때의 t의 값은 -2이므로

$g'(x)=m(x-2)^2+2mx(x-2)$

$g'(0)=4m=-2$, $m=-\frac{1}{2}$이므로

$g(4)=-8$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $g(4)$의 값의 합은 $64-8=56$

23) ②

x^2의 계수는 ${}_6C_2\cdot 2^2=60$

24) ①

3, 6이 이웃하므로 한 덩어리로 묶어 원탁에 나열하면 $4!$

3, 6이 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 $2!$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는

$4!\times 2!=48$

25) ③

학생들이 사용하는 컴퓨터의 종류를 표로 나타내면 다음과 같다.

	데스크탑	노트북
남	15	6
녀	8	10

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{15}{15+8}=\dfrac{15}{23}$ 이다.

26) ④

전체 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$

구하고자 하는 경우의 수를 여사건을 이용하면

세 수의 곱이 4의 배수가 아닐 경우이고 이를 분류하면

(ⅰ) 2의 배수이고, 4의 배수가 아닌 경우

2, 6, 10중 1개를 뽑고 1, 3, 5, 7, 9에서 2개를 뽑으므로

$\therefore\ {}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2=30$

(ⅱ) 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9에서 3개를 뽑으므로

$\therefore\ {}_5\mathrm{C}_3=10$

따라서 구하고자 하는 확률은

$\therefore\ 1-\dfrac{30+10}{120}=\dfrac{2}{3}$

27) ⑤

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ \sigma^2)$을 따른다.

표본평균 $\overline{X}$는 크기가 25이므로 $\overline{X}\sim\mathrm{N}\left(100,\ \left(\dfrac{\sigma}{5}\right)^2\right)$

따라서

$\mathrm{P}(98\le\overline{X}\le 102)=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{10}{\sigma}\right)=0.9876$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{10}{\sigma}\right)=0.4938$

표준정규분포표에서 $\dfrac{10}{\sigma}=\dfrac{5}{2}$이므로 $\sigma=4$

28) ②

구하고자 하는 함수의 개수를 치역에 따라 분류하면

(ⅰ) 치역이 $\{1\}$인 경우

조건을 성립하며 경우의 수는 1가지이다.

(ⅱ) 치역이 $\{1,\ 2\}$인 경우

(가)조건에 의해 $f(1)=1$이고

(1) $f(2)=1$일 때

$x=2$인 경우

$f(f(f(2)))=f(f(1))=f(1)=1$ 이고

$x\ge 3$인 경우도

$f(f(f(x)))$는 $f(f(1))=1$ 또는 $f(f(2))=1$ 이므로 주어진 조건을 만족한다.

3이상의 정의역이 1, 2에 대응하는 개수를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면

$x_1+x_2=6$ ($x_1\ge 0,\ x_2\ge 1$인 정수)

이므로 ${}_2\mathrm{H}_{6-1}={}_6\mathrm{C}_5=6$가지이다.

(2) $f(2)=2$일 때

$f(f(f(2)))=2$이므로 모순

(ⅲ) 치역이 $\{1,\ 3\}$인 경우

(1) $f(2)=1,\ f(3)=1$인 경우

$f(f(f(x)))$는 $f(f(1))=1$ 또는 $f(f(3))=1$이므로 성립

4이상의 정의역이 1, 3에 대응하는 개수를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면

$x_1+x_2=5$ ($x_1\ge 0,\ x_2\ge 1$인 정수)

이므로 ${}_2\mathrm{H}_{5-1}={}_5\mathrm{C}_4=5$가지이다.

(2) $f(2)=1,\ f(3)=3$인 경우

$f(f(f(3)))=3$이므로 모순

(3) $f(2)=3$인 경우

(가)에 의해 $f(3)\ge f(2)=3$ 즉, $f(3)=3$이므로 $f(f(f(2)))=3$이므로 모순

(ⅳ) 치역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우

3이상의 정의역이 1, 2, 3에 각각 대응하는 개수를 $x_1,\ x_2,\ x_3$라 하면

$x_1+x_2+x_3=6$ ($x_1\ge 0,\ x_2\ge 1,\ x_3\ge 1$인 정수)

이므로 ${}_3\mathrm{H}_{6-2}={}_6\mathrm{C}_4=15$가지이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 조건을 만족시키는 모든 함수 $f:X\to Y$의 개수는 $1+6+5+15=27$가지

29) 80

3이상의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 3보다 작은 경우는 $4-x$번이다.

x에 따른 확률변수 X값은 다음 표와 같다.

x	0	1	2	3	4
X	4	6	0	2	4

이때 $x=k$일 때의 확률은 ${}_4\mathrm{C}_k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4-k}={}_4\mathrm{C}_k\cdot\dfrac{2^k}{3^4}$이므로

확률변수 X에 대한 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{24}{81}$	$\dfrac{32}{81}$	$\dfrac{17}{81}$	$\dfrac{8}{81}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(36X)=\dfrac{36}{81}(64+68+48)=\dfrac{4}{9}\times 180=80$

30) 41

두 번 시행 후 주머니에 흰 공만 2개가 들어 있는 확률은 다음과 같이 분류할 수 있다.

(ⅰ) 첫 번째 시행에 검은 공 3개, 두 번째 시행에 검은 공 1개, 흰색 공 2개를 뽑는 경우

첫 번째 시행 후 남아 있는 공은 검은 공 1개, 흰색 공 2개다.

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}\cdot\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{5}$

(ⅱ) 첫 번째 시행에 검은 공 2개, 흰색 공 1개를 뽑고 두 번째 시행에 검은 공 2개, 흰색 공 1개를 뽑는 경우

첫 번째 시행 후 남아 있는 공은 검은 공 2개, 흰색 공 2개다.

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}\cdot\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{10}$

(ⅲ) 첫 번째 시행에 검은 공 1개, 흰색 공 2개를 뽑고, 두 번째 시행에 검은 공 3개를 뽑는 경우

첫 번째 시행 후 남아 있는 공은 검은 공 3개, 흰색 공 2개다.

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}\cdot\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{50}$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\dfrac{\dfrac{3}{10}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{50}}=\dfrac{30}{20+30+2}=\dfrac{15}{26}$$

따라서 $p=26,\ q=15$이므로 $p+q=41$

23) ⑤

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{2n^2+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{(a-2)n^2+bn-1}{\sqrt{an^2+bn}+\sqrt{2n^2+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{(a-2)n+b-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{a+\dfrac{b}{n}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}}$

이때 극한값이 존재하므로 $a=2$

따라서

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{b}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \dfrac{b}{2\sqrt{2}} = 1$

$\therefore\ b = 2\sqrt{2}$

24) ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{3k}{n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{3k}{n}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}\Big[\ln x\Big]_1^4 = \frac{2}{3}\ln 2$$

25) ④

$x = e^t\cos(\sqrt{3}t)-1,\ y = e^t\sin(\sqrt{3}t)+1\ (0 \le t \le \ln 7)$에서

양변을 시간에 대하여 미분하면

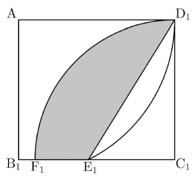
$\dfrac{dx}{dt} = e^t\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}e^t\sin\sqrt{3}t$

$\dfrac{dy}{dt} = e^t\sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}e^t\cos\sqrt{3}t$

$\displaystyle\int_0^{\ln 7}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \int_0^{\ln 7}\sqrt{(1+3)e^{2t}}\,dx$

$= \Big[2e^t\Big]_0^{\ln 7} = 12$

26) ③



R_1

$\overline{AB_1} = 2$, $\overline{AD_1} = \sqrt{5}$ 이고 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 E_1이기 때문에 $\overline{AE_1} = \sqrt{5}$ 이다.

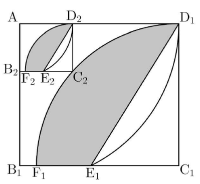
이때 $\triangle AB_1E_1$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해서 $\overline{B_1E_1} = 1$이고 $\overline{E_1C_1} = \sqrt{5}-1$이다.

색칠된 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1C_1D_1$의 넓이에서 삼각형 $E_1C_1D_1$의 넓이를 뺀 것이므로

$S_1 = \dfrac{1}{4}\cdot 2^2 \cdot \pi - \dfrac{1}{2}\cdot 2 \cdot (\sqrt{5}-1)$

$\quad = \pi - \sqrt{5} - 1$

한편,



R_2

$\overline{AB_2} = 2k$, $\overline{AD_2} = \sqrt{5}k$라 두면 $\overline{AC_2} = 3k$이다.

이때 $\square AB_2C_2D_2 \backsim \square AB_1C_1D_1$이므로 점 A와 점 C_2와 점 C_1는 일직선상에 있다.

$\overline{AC_1} = \overline{AC_2} + \overline{C_2C_1}$

$3 = 3k + 2$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{3}$

따라서 $\square AB_2C_2D_2$와 $\square AB_1C_1D_1$의 닮음비는 1 : 3이고 넓이의 비는 1 : 9이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\pi-\sqrt{5}-1}{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{9\pi-9\sqrt{5}+9}{8}$

27) ①

$g(x) = \ln(2x^2+2x+1)\ (x>0)$라 두자

$g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = \dfrac{4x+2}{2x^2+2x+1}$

$g(x)$와 $y=t$가 만나는 x좌표를 $f(t)$이면 $g(f(t)) = t$이다.

$g(f(2\ln 5)) = 2\ln 5 = \ln 25$

$f(2\ln 5) = k$라 치환하면 $g(k) = \ln 25$

$\ln(2k^2+2k+1) = \ln 5,\ 2k^2+2k+1 = 5$

$k^2+k-12 = 0\ (k>0)$

$\therefore\ k = 3$

$g(f(t)) = t$를 t에 대해 미분하면 $g'(f(t))\cdot f'(t) = 1$

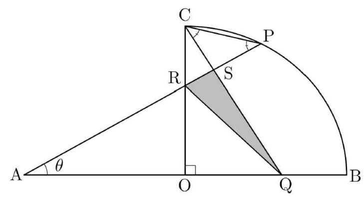
$\therefore\ f'(2\ln 5) = \dfrac{1}{g'(f(2\ln 5))}$

$= \dfrac{1}{g'(3)}$

$= \dfrac{18+6+1}{14}$

$= \dfrac{25}{14}$

28) ④



$\triangle OAP$는 이등변삼각형이므로 $\angle OPA = \theta$이고 $\angle POQ = 2\theta$이다.

$\triangle OAP$에 한 점O에서 마주보는 변CP에 수선의 발을 점 M이라 두자.

$\angle COQ = \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle COP = \dfrac{\pi}{2} - 2\theta$이다.

이등변삼각형의 꼭짓각은 밑변을 수직이등분하므로 $\angle MOP = \dfrac{\pi}{4} - \theta$

($\angle MOP = \angle COM = \angle ROS$ …… ㉠)이고 $\triangle OPS$의 한 외각인 $\angle PSM = \dfrac{\pi}{4}$이다.

이때 $\angle CSP$는 $\angle PSM$의 2배이므로 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\overline{AO} = 2$이므로 $\overline{RO} = 2\tan\theta$

$\overline{CO}$의 길이는 $\overline{CO} - \overline{RO} = 2 - 2\tan\theta$

$\triangle AOR$과 $\triangle CSR$은

$\angle ORA = \angle SRC$ ($\because$ 맞꼭짓각)

$\angle \mathrm{AOR} = \angle \mathrm{CSR} = 90^{\circ}$
이므로 AA닮음이다.
따라서 $\angle \mathrm{RAO} = \angle \mathrm{RCS} = \theta$이므로 $\overline{\mathrm{RS}} = (2 - 2\tan\theta)\sin\theta$
□SOQR의 마주보고 있는 두 각인 $\angle \mathrm{ROQ}$와 $\angle \mathrm{RSQ}$의 합이 π이므로
□SOQR은 원에 내접하는 사각형이다. 따라서 $\angle \mathrm{ROS}$와 $\angle \mathrm{RQS}$는
원주각으로 같고 $\frac{\pi}{4} - \theta$ ($\because$ ㉠)이다.

$\therefore\ S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot (1 - \tan\theta)^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$

$\therefore\ \lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{2^2 \cdot (1 - \tan\theta)^2 \cdot \sin^2\theta}{2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cdot \theta^2} = 2$

29) 19

$-1 \le x \le 0$일 때, $|f(x)\sin x| = f(x)\sin x$
$0 \le x \le 1$일 때, $|f(x)\sin x| = -f(x)\sin x$

$\therefore\ \int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|\,dx = 2,\ \int_{0}^{1} |f(x)\sin x|\,dx = 3$

$g(x)$에 $x = 0$을 대입하면

$g(0) = \int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|\,dx = 2$

$\therefore\ g(0) = 2$

$g(x)$에 $x = 1$을 대입하면

$g(1) = \int_{-1}^{1} |f(t)\sin t|\,dt$

$= \int_{-1}^{0} |f(x)\sin x|\,dx + \int_{0}^{1} |f(x)\sin x|\,dx = 2 + 3$

$\therefore\ g(1) = 2 + 3 = 5$

$g(x)$에 $x = -1$을 대입하면

$g(-1) = \int_{-1}^{-1} |f(x)\sin x|\,dx = 0$

$\therefore\ g(-1) = 0$

이때 $g'(x) = |f(x)\sin x|$가
$-1 \le x \le 0$일 때, $|f(x)\sin x| = f(x)\sin x$
$0 \le x \le 1$일 때, $|f(x)\sin x| = -f(x)\sin x$이므로

$\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x\,dx$에서 $-x = t$로 치환하면

$dx = -dt,\ -1 \le t \le 1$

$\therefore\ \int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x\,dx$

$= \int_{1}^{-1} f(t)g(t)\sin(-t)(-1)\,dt$

$= -\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\sin t\,dt$

$= -\int_{-1}^{0} g'(t)g(t)\,dt + \int_{0}^{1} g'(t)g(t)\,dt$

$= -\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{0}^{1}$

$= \frac{1}{2}[\{g(1)\}^2 - \{g(0)\}^2] - \frac{1}{2}[\{g(0)\}^2 - \{g(-1)\}^2]$

$= \frac{1}{2}(5^2 - 2^2) - \frac{1}{2}(2^2 - 0^2)$

$= \frac{17}{2}$

30) 64

조건(가)에서 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $x = 0,\ x = 2$에서
극한값과 함숫값이 같아야 되고 $g(0) \ne 0$이면 $f(0) \ne 0$이어야 된다.
$x = 0$일 때 $\lim_{x \to 0+} g(x) = -f(0)$이고 $g(0) = f(0)$이므로
$-f(0) = f(0)$
$\therefore\ f(0) = 0$ …… ㉠
$x = 2$일 때 $\lim_{x \to 2-} g(x) = f(2)$이고 $g(2) = f(2)$이므로
$f(2) = f(2)$
$x = 2$에서 항상 연속이다.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x \le 2) \\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (0 \le x \le 2) \\ \dfrac{f'(x)(x-1) - f(x)}{(x-1)^2} & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \end{cases}$$

$x = 0$일 때 $\lim_{x \to 0+} g'(x) = f'(0)$이고,
$\lim_{x \to 0-} g'(x) = -f'(0) - f(0) = -f'(0)$ ($\because\ f(0) \ne 0$)
$x = 2$일 때 $\lim_{x \to 2+} g'(x) = f'(2) - f(2)$이고
$\lim_{x \to 2-} g'(x) = f'(2)$
$f'(2) - f(2) \ne f'(2)$ ($\because\ f(2) \ne 0$)
따라서 $x = 2$에서 미분불가능하다.
조건(나)에서 $x = a$에 미분불가능한 x값이 1개이므로 $x = 0$에서
미분불가능해야 된다.
$\therefore\ f'(0) = -f'(0)$
$\therefore\ f'(0) = 0$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의해 $f(x) = x^2(x - \alpha)$ $(\alpha \ne 0)$
조건 (다)에 따라 $g(k) = 0$이면 $f(k) = 0$이다.
이때 $k = 0$ 또는 $k = \alpha$인데 $g'(0) = 0$이므로 $k = \alpha$이어야 한다.
(ⅰ) $0 \le \alpha \le 2$일 때, $f'(\alpha) = \frac{16}{3}$, $\alpha^2 = \frac{16}{3}$,

$\therefore\ \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\alpha > 2$이므로 모순
(ⅱ) $\alpha < 0,\ 2 < \alpha$일 때

$\frac{(\alpha-1)f'(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{16}{3}$

$\therefore\ 3\alpha^2 - 16\alpha + 16 = 0$
$\therefore\ \alpha = 4$
$\therefore\ f(x) = x^2(x - 4)$
$\lim_{x \to 2-} g'(x) < 0,\ \lim_{x \to 2+} g'(x) > 0$이므로 $x = 2$에서 극솟값을 갖는다.
$\therefore\ g(2) = -8,\ p = -8$
$\therefore\ p^2 = 64$

23) ③

$2\vec{a} = (2x,\ 6),\ \vec{b} - \vec{c} = (4,\ y - 5)$이므로 $2x = 4$
$\therefore\ x = 2$
$6 = y - 6$ $\quad\therefore\ y = 11$
$\therefore\ x + y = 13$

24) ⑤

$2\overline{\mathrm{A'C'}} = \overline{\mathrm{C'B'}}$이므로 점 $\mathrm{C'}$은 선분$\mathrm{A'B'}$의 1 : 2내분점이다.
즉, 점 C는 선분AB의 1 : 2 내분점이므로 점 C z의 좌표는
$\frac{(-3) \times 2 + 15 \times 1}{1 + 2} = 3$

25) ①

접점 P를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$x_1x-\dfrac{y_1y}{3}=1$이므로 x절편이 $\dfrac{1}{3}$이므로 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$를 지난다.

$\dfrac{1}{3}x_1=1$, 즉, $x_1=3$이므로 점 $\mathrm{P}(3,\ 2\sqrt{6})$ $(\because\ y_1>0)$

초점의 좌표중 양수인 좌표는 $\mathrm{F}(2,\ 0)$ $(\because\ c^2=a^2+b^2)$

그러므로 선분 PF의 길이는

$\sqrt{(3-2)^2+(2\sqrt{6}-0)^2}=\sqrt{1+24}=5$

26) ②

구가 x축과 만나는 한 점의 좌표를 H라 하면 점 $\mathrm{H}(a,\ 0,\ 0)$이다. 이때 선분 AH의 길이가 반지름이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{0+(-3)^2+4^2}=5$

$\overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+3^2+4^2}=\sqrt{a^2+25}=\sqrt{27}$

$\therefore\ a=\sqrt{2}$ $(\because\ a>0)$

z축에 수선의 발을 내린 점을 G라 하면 $\mathrm{G}(0,\ 0,\ 4)$이고

$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-3)^2+0}=\sqrt{11}$

z축에서 만나는 두 점을 Q, Q′라 하면 $\overline{\mathrm{QQ'}}=2\overline{\mathrm{GQ}}$이고

$\overline{\mathrm{GQ}}^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2-\overline{\mathrm{AG}}^2=25-11=14$이므로

$\overline{\mathrm{GQ}}=\sqrt{14}$

따라서 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{14}$

27) ④

원의 중심을 O라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

이고 점 B를 원점으로 설정하면 점 $\mathrm{A}(2,\ 2\sqrt{3})$, 점 $\mathrm{C}(4,\ 0)$, 점 $\mathrm{O}(5,\ \sqrt{3})$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이다.

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=(2,\ -2\sqrt{3})+(5,\ \sqrt{3})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=(7,\ -\sqrt{3})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

최댓값은 중심을 지나고 일직선에서 반지름의 길이를 더한 값이고,

최솟값은 중심을 지나는 일직선에서 반지름의 길이를 뺀 값이다.

$\overline{\mathrm{BO}}=\sqrt{7^2+(-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{13}$

그러므로 최댓값은 $2\sqrt{13}+\sqrt{3}$, 최솟값은 $2\sqrt{13}-\sqrt{3}$

$\therefore\ Mm=(2\sqrt{13}+\sqrt{3})(2\sqrt{13}-\sqrt{3})=52-3=49$

28) ⑤

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{7}$이고, 점 M에서 BC에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 $\overline{\mathrm{BM}}$에 내린 수선의 발을 X라 하면 직선 AX와 $\overline{\mathrm{BH}}$의 교점이 생긴다. 이때 이 점을 Y라 하자.

$\triangle\mathrm{AXM}$과 $\triangle\mathrm{MXY}$, $\triangle\mathrm{BXA}$가 닮음이므로

$\overline{\mathrm{MY}}=\dfrac{7}{3}$

$\overline{\mathrm{AX}}=\overline{\mathrm{XP}}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{XY}}}{\overline{\mathrm{XP}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{XY}}}{\overline{\mathrm{AX}}}$

$\triangle\mathrm{ABX}$와 $\triangle\mathrm{YMX}$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{XY}}}{\overline{\mathrm{XA}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{MY}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\dfrac{7}{9}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{7}{9}$

29) 66

$y^2=16x$의 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$이고, 준선의 방정식은 $x=-4$이다.

점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$을 지나고 초점이 선분 AF 위에 있으므로 점 A는 꼭짓점이다. 타원과 포물선의 교점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BF}}$이다.

그러므로 점 B의 x좌표는 $-4+\dfrac{21}{5}=\dfrac{1}{5}$이다.

그러므로 점 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$

중심의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $\mathrm{F}(4,\ 0)$이고 중심에서 거리가 $4-a$이므로 $\mathrm{F'}(2a-4,\ 0)$, $\overline{\mathrm{BF'}}+\overline{\mathrm{BF}}$가 장축의 길이이므로 장축의 길이는 $(a+2)\times2$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{BF'}}=2a+4-\dfrac{21}{5}=2a-\dfrac{1}{5}$

$\sqrt{\left(2a-4-\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}=2a-\dfrac{1}{5}$

$\left(2a-\dfrac{21}{5}\right)^2+\dfrac{16}{5}=4a^2-\dfrac{4}{5}a+\dfrac{1}{25}$

$4a^2-\dfrac{84}{5}a+\dfrac{441}{25}+\dfrac{80}{25}=4a^2-\dfrac{4}{5}a+\dfrac{1}{25}$

$\dfrac{520}{25}=16a\qquad\therefore\ a=\dfrac{13}{10}$

$\therefore\ 10k=20a+40=26+40=66$

30) 37

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=k(12,\ 5)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 $(12,\ 5)$와 평행한 벡터이다. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OA}}\leq21$에서 내적의 정의에서 시점을 일치시키고 다른 벡터에 정사영한 선분의 길이의 곱을 의미하는 것이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 크기가 6이므로 점 P의 x좌표가 $\dfrac{7}{2}$를 넘을 수 없다.

(나) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$ 즉, 점 Q는 중심을 A로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다. $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OA}}\leq21$에서 Q의 x좌표가 $\dfrac{7}{2}$를 넘을 수 없다.

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 변수는 x좌표만 움직일 수 있으므로 넓이는 평행이동하여 잘라 붙이면 직사각형 모양으로 된다.

이때 Q의 y좌표의 폭이 높이가 될 수 있으며, P의 x좌표의 변화는 0에서 $\dfrac{7}{2}$이므로 가로의 길이는 $\dfrac{7}{2}$이다.

중심이 $(6,\ 0)$이고 반지름이 5인 원에서 y값의 변화가 가장 큰 값은 $x=\dfrac{7}{2}$일 때이므로

$\left(\dfrac{7}{2}-6\right)^2+y^2=25$, $y^2=25-\dfrac{25}{4}$

$y^2=\dfrac{75}{4}$, $y=\pm\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

그러므로 세로의 길이는 $5\sqrt{3}$이다.

따라서 도형의 넓이는 $5\sqrt{3}\times\dfrac{7}{2}=\dfrac{35}{2}\sqrt{3}$

즉, $p=2$, $q=35$이므로 $p+q=35+2=37$