수학 영역(가 형)

1. $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{8}{27}$ ④ $\frac{16}{81}$ ⑤ $\frac{32}{243}$

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

3. $\sin\theta=-\frac{1}{3}$ 일 때, $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$ 의 값은? [2점]

① -4 ② $-\frac{11}{3}$ ③ $-\frac{10}{3}$ ④ -3 ⑤ $-\frac{8}{3}$

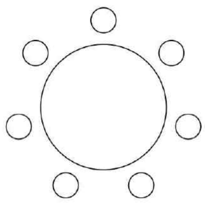
4. $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [3점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

5. 함수 $y=4^x-1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=2^{2x-3}+3$의 그래프와 일치할 때, ab의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

6. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 108 ② 120 ③ 132 ④ 144 ⑤ 156

7. 곡선 $x^2-2xy+3y^2=5$ 위의 점 $(2,\,-1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\frac{6}{5}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -2

8. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} \\ \log_2 4x < \log_2(x+k) \end{cases}$$

의 해가 존재하지 않도록 하는 양수 k의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

9. 다섯 개의 자연수 $1, 2, 3, 4, 5$ 중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 택한 세 수의 곱이 6 이상인 경우의 수는? [3점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

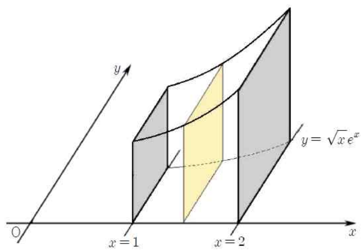
10. $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\cos^2 3x - \sin 3x + 1 = 0$ 의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{7}{4}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{9}{4}\pi$ ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

11. 함수 $f(x) = \frac{e^x}{\sin x + \cos x}$ 에 대하여 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ 에서 방정식 $f(x) - f'(x) = 0$ 의 실근은? [3점]

① $-\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

12. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}\,e^x\ (1 \le x \le 2)$ 와 x축 및 두 직선 $x = 1$, $x = 2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

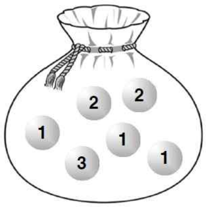


① $\frac{e^4 + e^2}{4}$ ② $\frac{2e^4 - e^2}{4}$ ③ $\frac{2e^4 + e^2}{4}$

④ $\frac{3e^4 - e^2}{4}$ ⑤ $\frac{3e^4 + e^2}{4}$

13. 주머니에 $1, 1, 1, 2, 2, 3$ 의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 두 수의 차를 확률변수 X라 하자. $E(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{14}{15}$ ② 1 ③ $\frac{16}{15}$ ④ $\frac{17}{15}$ ⑤ $\frac{6}{5}$



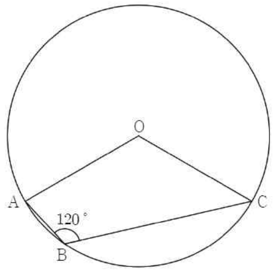
14. 함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$의 값은? [4점]

① $\ln 2$ ② $(\ln 2)^2$ ③ $\frac{\ln 2}{2}$ ④ $\frac{(\ln 2)^2}{2}$ ⑤ $\frac{(\ln 2)^2}{4}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$\angle ABC = 120^\circ$, $\overline{AB}+\overline{BC}=2\sqrt{15}$

일 때, 사각형 $OABC$의 넓이는? [4점]



① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

16. 확률변수 X는 정규분포 $N(m, 4^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $N(20, \sigma^2)$을 따른다. 확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$일 때, $f(x)$와 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+10)=f(20-x)$이다.
(나) $P(X \geq 17) = P(Y \leq 17)$

$P(X \leq m+\sigma)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $\sigma > 0$) [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.9104
④ 0.9332 ⑤ 0.9772

17. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n} \quad \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=1$일 때
>
> (좌변)$=\frac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1}=1$이고, (우변)$=\boxed{(가)}$ 이므로
>
> $(*)$이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면
>
> $$\sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2m)!}{2^m}$$
>
> 이다. $n=m+1$일 때,
>
> $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} + \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!} \\ &\le \frac{(2m)!}{2^m} + \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!} \\ &= \frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{\boxed{(다)}}+\frac{1}{(m+1)!}\right\} \\ &< \frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\end{aligned}$$
>
> 이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k} \le \frac{(2n)!}{2^n}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\frac{f(2)}{g(4)}$의 값은? [4점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

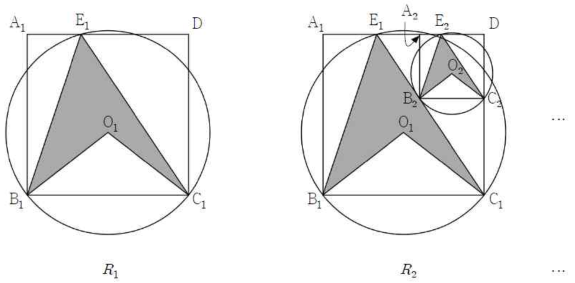
18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n+1}=-a_n+3a_{n+1}$
>
> (나) $a_{2n+2}=a_n-a_{n+1}$

$a_1=1$, $a_2=2$일 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D}$에서 선분 A_1D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1을 지나는 원의 중심을 O_1이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{E_1D}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{E_1C_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{C_1D}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$와 점 D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D}$를 그린다. 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D}$에서 선분 $\mathrm{A_2D}$를 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_2}$라 하고, 세 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{E_2}$를 지나는 원의 중심을 $\mathrm{O_2}$라 하자. 삼각형 $\mathrm{E_2B_2C_2}$의 내부와 삼각형 $\mathrm{O_2B_2C_2}$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{90}{7}$　② $\frac{275}{21}$　③ $\frac{40}{3}$　④ $\frac{95}{7}$　⑤ $\frac{290}{21}$

20. 세 상수 a, b, $c\,(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -ax^2+6ex+b & (x<c) \\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge c) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\frac{1}{2e}\right)$의 값은? [4점]

① $-4\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$　② $-4\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$　③ $-3\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$
④ $-3\left(e^2-\frac{1}{4e^2}\right)$　⑤ $-2\left(e^2+\frac{1}{4e^2}\right)$

21. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x |t\sin t|\,dt-\left|\int_0^x t\sin t\,dt\right|$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

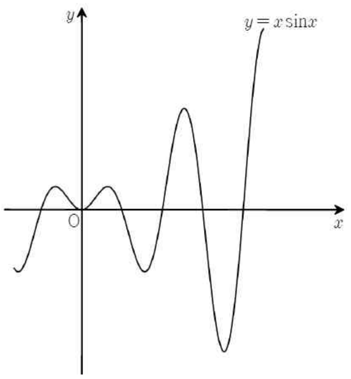
ㄱ. $f(2\pi)=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$인 α에 대하여

$\int_0^\alpha t\sin t\,dt=0$이면 $f(\alpha)=\pi$이다.

ㄷ. $2\pi<\beta<3\pi$인 β에 대하여

$\int_0^\beta t\sin t\,dt=0$이면 $\int_\beta^{3\pi} f(x)\,dx=6\pi(3\pi-\beta)$이다.



① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 함수 $f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+1\right)+3$의 주기를 p, 최댓값을 M이라 할 때, $p+M$의 값을 구하시오. [3점]

23. 모평균이 15이고 모표준편차가 8인 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})$의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{(x^2-6x+9)^n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

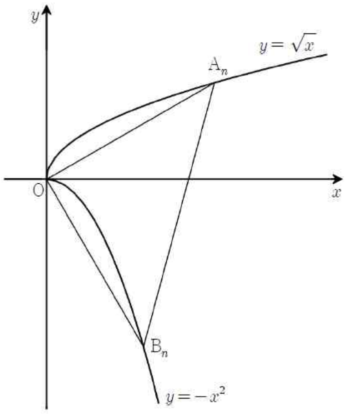
25. 흰 구슬 3개와 검은 구슬 4개가 들어있는 상자가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 3의 배수이면 이 상자에서 임의로 2개의 구슬을 동시에 꺼내고, 나오는 눈의 수가 3의 배수가 아니면 이 상자에서 임의로 3개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 구슬 중 검은 구슬의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수) [3점]

26. 두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(m+2)$개의 수
$a,\ \log_2 c_1,\ \log_2 c_2,\ \cdots,\ \log_2 c_m,\ b$
가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 항을 모두 곱한 값은 32이다.

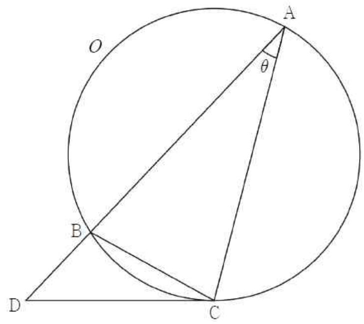
$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값을 구하시오. [4점]

27. 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{A}_n(n^2,\ n)$과 곡선 $y=-x^2\ (x \geq 0)$ 위의 점 B_n이 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}$을 만족시킨다. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{2S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

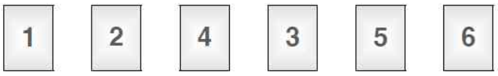


28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=4$인 이등변삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 C를 지나고 원 O에 접하는 직선과 직선 AB의 교점을 D라 하자. $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 할 때, 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)

[4점]



29. 그림은 여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀있는 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타낸 예이다.



이 여섯 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 임의로 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 장의 카드 중 왼쪽 카드에 적힌 수가 오른쪽 카드에 적힌 수보다 큰 경우가 한 번만 나타날 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수) [4점]

30. 두 함수 $f(x)=x^2-ax+b\ (a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0)<h(4)$ (나) 방정식 $\lvert h(x)\rvert=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2}<e<3$이고, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021학년도 사관학교 1차시험 [가형] 해설

1	③	2	②	3	⑤	4	②	5	⑤
6	④	7	①	8	①	9	④	10	⑤
11	③	12	④	13	①	14	④	15	⑤
16	④	17	②	18	①	19	②	20	③
21	③	22	12	23	19	24	9	25	151
26	10	27	395	28	8	29	259	30	6

1) ③

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{8}{27}$$

2) ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}{5}=\frac{2}{5}$$

3) ⑤

$$\frac{\cos\theta}{\tan\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta=-3+\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}$$

4) ②

$${}_5\mathrm{C}_2(x^3)^2\left(\frac{1}{x}\right)^3=10x^3$$

$\therefore$ 10

5) ⑤

$y=4^{x-a}-1+b=2^{2x-2a}-1+b=2^{2x-3}+3$

$a=\frac{3}{2}$, $b=4$

$\therefore\ ab=6$

6) ④

먼저 A, B, C를 제외한 4사람의 원순열로 배치하고, 그 각각에 대하여 4사람이 사이 칸 중 3곳을 택하여 A, B, C의 자리를 정한다.

$\therefore\ \frac{4!}{4}\times{}_4\mathrm{P}_3=6\times 24=144$

7) ①

$$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+9y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y}{2x-9y^2}=\frac{4+2}{4-9}=-\frac{6}{5}$$

8) ①

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-4}$에서 $1-x\leq 4x-4$,

$x\geq 1$

$\log_2 4x<\log_2(x+k)$에서 $0<4x<x+k$,

$0<x<\frac{k}{3}$

동시에 만족하는 x가 존재하지 않는 양수 k는 $\frac{k}{3}\leq 1$

$\therefore\ 0<k\leq 3$

9) ④

모든 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

택한 세수의 곱이 6미만인 경우는

(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4), (1,1,5), (1,2,2)

6가지이므로 구하는 경우의 수는

$35-6=29$

10) ⑤

$(1-\sin^2 3x)-\sin 3x+1=0$

$\sin^2 3x+\sin 3x-2=0$

$(\sin 3x+2)(\sin 3x-1)=0$

$\sin 3x=1$, $3x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{9}{2}\pi$

$x=\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{9}{6}\pi$이므로 그 합은 $\frac{5}{2}\pi$

11) ③

$$f'(x)=\frac{e^x(\sin x+\cos x)-e^x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2e^x\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$f(x)=f'(x)$이므로 $2\sin x=\sin x+\cos x$,

$\tan x=1$, $\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$

12) ④

$$V=\int_1^2 xe^{2x}dx=\left[\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2x}\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{4}e^4-\frac{1}{4}e^2=\frac{3e^4-e^2}{4}$$

13) ①

$X=0$은 둘 다 1 이거나 2이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$$

$X=1$은 1과 2 또는 2와 3이므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3\times 2+2\times 1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$$

$X=2$는 1과 3이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3\times 1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}$$

그러므로 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{3}{15}=\frac{14}{15}$

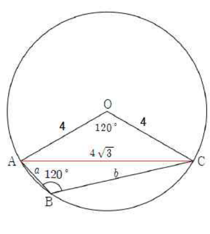
14) ④

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}f(1+k/n)$$

$$=\int_1^2\frac{1}{x}\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2=\frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

15) ⑤



사인법칙에서 $\overline{AC}=8\times\sin120^\circ=4\sqrt{3}$

코사인법칙에서

$$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ$$
$$=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab$$

$ab=(2\sqrt{15})^2-(4\sqrt{3})^2=12$

구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}(4\times4+ab)\sin120^\circ=7\sqrt{3}$$

16) ④

(가)에서 $m=15$

(나)에서 $\dfrac{17-15}{4}+\dfrac{20-17}{\sigma}=0,\ \sigma=6$

$\mathrm{P}(X\le 15+6)=\mathrm{P}(Z\le 1.5)=0.9332$

17) ②

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{{}_2\mathrm{P}_1}{2^1}=1$, (우변)$=\dfrac{2!}{2^1}=1$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}\le\frac{(2m)!}{2^m}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}+\frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}+\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$
$$\le\frac{(2m)!}{2^m}+\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$
$$=\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{(2m+1)(m+1)}+\frac{1}{(m+1)!}\right\}$$
$$<\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$p=1,\ f(m)=(2m+2)!,\ g(m)=(2m+1)(m+1)$

$\therefore\ p+\dfrac{f(2)}{g(1)}=1+\dfrac{6!}{9\times5}=1+16=17$

18) ①

(가), (나)에서 $a_{2n+1}+a_{2n+2}=2a_{n+1}$

$S_{2n+2}-a_1-a_2=2(S_{n+1}-a_1)$

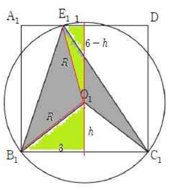
즉 $S_{2n+2}=2S_{n+1}+1$

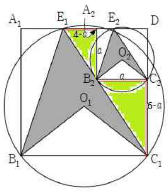
$S_2=1+2=3,\ S_4=2S_2+1=7,$

$S_8=2S_4+1=15$

$\therefore\ S_{16}=2S_8+1=31$

19) ②





$R^2=9+h^2=1+(6-h)^2,\ h=\dfrac{7}{3}$

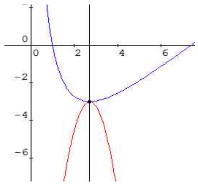
$S_1=\dfrac{1}{2}\times(6-h)\times6=11$

$\dfrac{a}{4-a}=\dfrac{6-a}{a}$이므로 $a=\dfrac{12}{5}$,

닮음비는 $r=\dfrac{12/5}{6}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ S=\dfrac{11}{1-(2/5)^2}=\dfrac{275}{21}$

20) ③

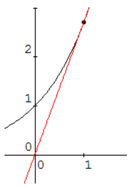


$-ax^2+6ex+b$는 $x=\dfrac{3e}{a}$에서

$a(\ln x)^2-6\ln x$는 $\ln x=\dfrac{3}{a}$에서

증감이 변한다. 따라서 $e^{\frac{3}{a}}\le c\le\dfrac{3e}{a}$

그런데 $y=e^x$와 $y=ex$의 그래프는 그림과 같이 $e^x\ge ex$이고 등호는 $x=1$일 때 성립한다.



그러므로 $\dfrac{3}{a}=1,\ c=e$ 이다.

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2+6ex+b & (x<e)\\ 3(\ln x)^2-6\ln x & (x\ge e)\end{cases}$$

$f(x)$는 연속이므로

$-3e^2+6e^2+b=3-6,\ b=-3-3e^2$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{2e}\right)=-3\left(\frac{1}{4e^2}\right)+\frac{6e}{2e}-3-3e^2$$
$$=-3\left(\mathrm{e}^2+\frac{1}{4\mathrm{e}^2}\right)$$

21) ③

수직선 운동에서 점 P의 속도를 $v(t)=t\sin t$로 보면

$\displaystyle\int_0^x|t\sin t|dt,\ \int_0^x t\sin t dt$는

각각 움직인 거리와 위치의 변화량이다.

$$\int_0^\pi t\sin tdt=[-t\cos t+2\sin t]_0^\pi=\pi$$
$$\int_\pi^{2\pi} t\sin tdt=[-t\cos t+2\sin t]_\pi^{2\pi}=-3\pi$$
$$\int_{2\pi}^{3\pi} t\sin tdt=[-t\cos t+2\sin t]_{2\pi}^{3\pi}=5\pi$$

ㄱ. $f(2\pi)==(\pi+3\pi)-|\pi-3\pi|=2\pi$

ㄴ. $\pi<\alpha<2\pi$, $\displaystyle\int_0^\alpha t\sin tdt=0$이면

$f(\alpha)=(\pi+\pi)-|\pi-\pi|=2\pi$

ㄷ. $2\pi<\beta\le x\le3\pi$, $\displaystyle\int_0^\beta t\sin tdt=0$이면

$$f(x)=\int_0^x|t\sin t|dt-\left|\int_0^x t\sin tdt\right|$$

$$= 6\pi + \int_{\beta}^{x} t\sin t dt - \int_{\beta}^{x} t\sin t dt = 6\pi$$

$$\int_{\beta}^{3\pi} f(x)dx = 6\pi(3\pi - \beta)$$

22) 12

$p = \dfrac{2\pi}{\pi/2} = 4$, $M = 5+3 = 8$, $\therefore\ p+M = 12$

23) 19

$\mathrm{E}(\overline{X}) + \sigma(\overline{X}) = \mathrm{E}(X) + \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = 15 + \dfrac{8}{\sqrt{4}} = 19$

24) 9

$-1 < x^2 - 6x + 9 \le 1$, $(x-3)^2 \le 1$

$x = 2,\ 3,\ 4$

$\therefore\ 2+3+4 = 9$

25) 151

$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{{}_4C_2}{{}_7C_2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{{}_4C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_3}$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{7} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{18}{35} = \dfrac{46}{105}$

$\therefore\ 46 + 105 = 151$

26) 10

등차수열의 합에서

$\log_2 c_1 + \cdots + \log_2 c_m = m \times \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{m}{2}$

$\log_2(c_1 \times \cdots \times c_m) = \log_2 32 = 5 = \dfrac{m}{2}$

$\therefore\ m = 10$

27) 395

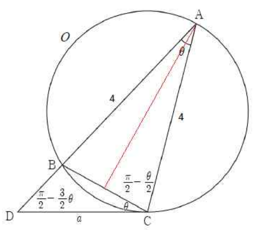
직삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$은 직각이등변삼각형이므로

$S_n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n^4)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{2S_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{10} (1+n^2) = 10 + \frac{1}{6}(10)(11)(21)$

$= 395$

28) 8



이등변삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 8\sin\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 ACD에 사인법칙에 의하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta} = \dfrac{4}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{2}\theta\right)}$, $\overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{4\sin\theta}{\cos\dfrac{3}{2}\theta}$

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \sin\theta = \dfrac{16\sin\dfrac{\theta}{2}\sin^2\theta}{\cos\dfrac{3}{2}\theta}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{\theta\to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = 8$

29) 259

① $a_1 > a_2$, $a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$

a_1을 2,3,4,5,6 중에서 하나 정하면 된다.

따라서 5가지

② $a_1 < a_2$, $a_2 > a_3$, $a_3 < a_4 < a_5 < a_6$

a_1와 a_3는 a_2보다 작으므로 가능한 a_2는 3,4,5,6이고 그 각각에 대하여

a_2보다 작은 a_1을 정하기만 하면 되는데, 각각 2,3,4,5 가지이므로

모두 14가지

③ $a_1 < a_2 < a_3$, $a_3 > a_4$, $a_4 < a_5 < a_6$

a_3보다 작은 것이 a_1, a_2, a_4이므로 가능한 a_3는 4,5,6이고

그 각각에 대하여 $a_1 < a_2$를 정하기만 하면된다.

따라서 ${}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 = 19$가지

④ $a_4 > a_5$인 경우는 ②를 반대로 대칭배열한다.

따라서 14가지

⑤ $a_5 > a_6$인 경우도 ①을 반대로 대칭배열한다.

따라서 5가지

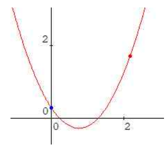
모든 경우의 수는 6!이므로 구하는 확률은

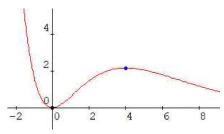
$\dfrac{5+14+19+14+5}{6!} = \dfrac{19}{240}$

$\therefore\ 19 + 240 = 259$

30) 6

$f(x) = x^2 - ax + b$ $\qquad g(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$





$g(x)$는 극솟값 $g(0) = 0$, 극댓값 $g(4) = \dfrac{16}{e^2}$

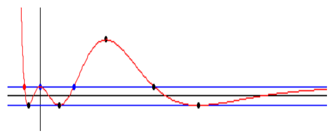
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$

(가) $h(0) = f(0) = b$, $h(4) = f\left(\dfrac{16}{e^2}\right) > b$

이므로 $0 < a < \dfrac{16}{e^2}$ (단, $\dfrac{5}{2} < e < 3$)

(나)를 만족시키려면

$h(x) = f(g(x))$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$f'(x) = 2x - a$, $g'(x) = \dfrac{1}{2}x(4-x)e^{-\frac{x}{2}}$

$h'(x) = g'(x)f'(g(x))$

$\quad = \dfrac{1}{2}x(4-x)e^{-\frac{x}{2}}\{2g(x) - a\}$

$g(x) = \dfrac{a}{2}$, $\left(0 < \dfrac{a}{2} < \dfrac{8}{e^2}\right)$에서 $h(x)$는 극솟값인데,

그 값이 $-k = -f(0) = -b = f\left(\dfrac{a}{2}\right)$

$f(x) = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + b - \dfrac{a^2}{4}$에서 $\dfrac{a^2}{4} = 2b$, 즉 $b = \dfrac{a^2}{8}$

한편 $f(1)=1-a+b=1-a+\frac{a^2}{8}=-\frac{7}{32}$ 이므로

$4a^2-32a+39=0$, $(2a-13)(2a-3)=0$

$0<a<\frac{16}{e^2}$ 이므로 $a=\frac{3}{2}$ 이고 $b=\frac{9}{32}$ 이다.

$\therefore\ a+16b=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=6$