수학 영역(나 형)

1. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합

$A=\{1,\ 3\},\ B=\{3,\ 5\}$

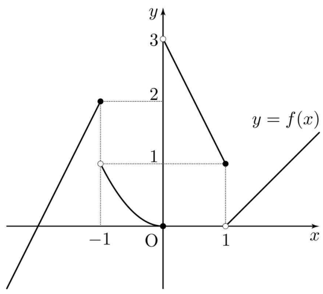
에 대하여 집합 $A^C\cap B^C$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. $\sqrt[3]{36}\times\left(\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^2=2^a$일 때, a의 값은? [2점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



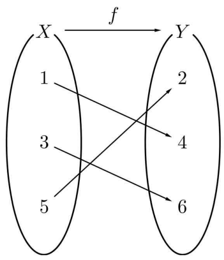
$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to0-}f(x)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 4개의 수 6, a, 15, b가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 3 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{7}{2}$

5. 그림은 함수 $f: X \to Y$를 나타낸 것이다.



함수 $g: Y \to X$에 대하여 함수 $g \circ f: X \to X$가 항등함수일 때, $g(6) + (f \circ g)(4)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

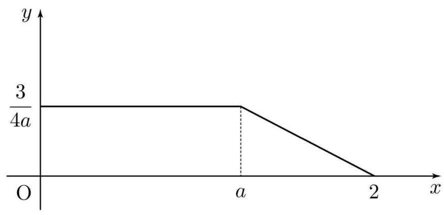
6. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A^C \cup B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

7. 연속확률변수 X가 가지는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$이고 X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같이 두 점 $\left(0, \frac{3}{4a}\right)$, $\left(a, \frac{3}{4a}\right)$을 이은 선분과 두 점 $\left(a, \frac{3}{4a}\right)$, $(2, 0)$을 이은 선분으로 이루어져 있다. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le 2\right)$의 값은? (단, a는 양수이다.) [3점]



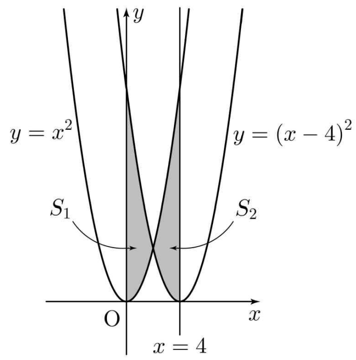
① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{17}{24}$ ④ $\frac{35}{48}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

8. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - 3}{h} = 2$일 때, 함수 $g(x) = (x+2)f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. 두 곡선 $y=x^2$, $y=(x-4)^2$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 곡선 $y=x^2$, $y=(x-4)^2$와 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38



10. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(5,\ p)$를 따르고,

$$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=4)$$

일 때, $\mathrm{E}(6X)$의 값은? (단, $0<p<1$) [3점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

11. 함수 $f(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ x+3 & (x\geq 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $(x-a)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p: (x-a+7)(x+2a-18)=0,$

$q: x(x-a) \le 0$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은? [3점]

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

13. 어느 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리는 평균이 $m$km, 표준편차가 1.5km인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 직장인들 중에서 36명을 임의추출하여 조사한 결과 36명이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 평균은 $\bar{x}$km이었다. 이 결과를 이용하여, 이 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le 6.49$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 5.46 ② 5.51 ③ 5.56 ④ 5.61 ⑤ 5.66

14. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2-a_n} & (a_n > 2) \\ a_n + 2 & (a_n \le 2) \end{cases}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k = 12$를 만족시키는 자연수 m의 최솟값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

15. 두 양수 a, b $(a > b)$에 대하여

$$9^a = 2^{\frac{1}{b}}, \ (a+b)^2 = \log_3 64$$

일 때, $\dfrac{a-b}{a+b}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

16. 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 서로 이웃하는 두 카드에 적힌 수를 곱하여 만들어지는 5개의 수가 모두 짝수인 경우의 수는? [4점]

① 120 ② 126 ③ 132 ④ 138 ⑤ 144

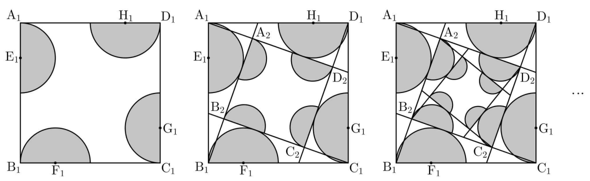
17. 집합 $X=\{x \mid x>0\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}+1 & (0<x \leq 3) \\ -\dfrac{1}{x-a}+b & (x>3) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 일대일 대응일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{41}{12}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{43}{12}$

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 4개의 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1을 $1:3$로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1이라 하고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 점 E_1, F_1, G_1, H_1 각각을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}\overline{A_1B_1}$인 4개의 반원을 그린 후 이 4개의 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 A_1을 지나고 중심이 H_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 B_1을 지나고 중심이 E_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 A_2, 점 B_1을 지나고 중심이 E_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 C_1을 지나고 중심이 F_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 B_2, 점 C_1을 지나고 중심이 F_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 D_1을 지나고 중심이 G_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 C_2, 점 D_1을 지나고 중심이 G_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선과 점 A_1을 지나고 중심이 H_1인 색칠된 반원의 호에 접하는 직선의 교점을 D_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 4개의 반원을 그리고 이 4개의 반원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3 …

① $\frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$ ② $\frac{19\sqrt{2}\pi}{8}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}\pi}{2}$
④ $\frac{21\sqrt{2}\pi}{8}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{2}\pi}{4}$

19. 다음은 자연수 n에 대하여 방정식 $a+b+c=3n$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c)가
$a>b$ 또는 $a>c$
를 만족시킬 확률을 구하는 과정이다.

> 방정식
> $$a+b+c=3n \quad \cdots\cdots (*)$$
> 을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)가 $a>b$ 또는 $a>c$를 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)가 $a \le b$와 $a \le c$를 만족시키는 사건이다.
>
> 이제 $n(A^C)$의 값을 구하자.
>
> 자연수 $k(1 \le k \le n)$에 대하여 $a=k$인 경우,
>
> $b \ge k$, $c \ge k$이고 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\boxed{(나)}$이므로
> $$n(A^C) = \sum_{k=1}^{n} \boxed{(나)}$$
> 이다.
>
> 따라서 구하는 확률은
> $$P(A) = \boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $n=2$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $n=7$, $k=2$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 식에 $n=4$를 대입한 값을 r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은? [4점]

① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

20. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge a) \\ 2a-f(x) & (f(x)<a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.

(나) 함수 $g(x)-f(x)$는 $x=\frac{7}{2}$에서 최댓값 $2a$를 가진다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

21. 함수 $f(x)=(x-2)^3$과 두 실수 m, n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|<a) \\ mx+n & (|x|\ge a) \end{cases} \quad (a>0)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a=1$일 때, $m=13$이다.

ㄴ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $m=48$이다.

ㄷ. $f(a)-2af'(a)>n-ma$를 만족시키는 자연수 a의 개수는 5이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. $\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 3^{n+2}-2^n}{3^n-3\times 2^n}=207$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[3점]

23. 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=n$이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$이 직선 $y=-2x$와 만나는 점을 B_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{9}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$의 값을 구하시오. [3점]

24. 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$가 점 $(2,\ 3)$에서 만날 때, $f(-6)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

25. 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x}{x-1}$$

일 때, $60\times f'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

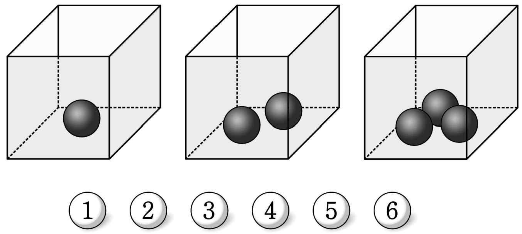
26. 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수의 최대공약수가 1일 때, 나온 두 눈의 수의 합이 8일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{1}^{x}(2x-1)f(t)\,dt=x^3+ax+b$$

일 때, $40\times f(1)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 같은 종류의 검은 공이 각각 1개, 2개, 3개가 들어 있는 상자 3개가 있다. 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6개의 흰 공을 3개의 상자에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각각의 상자에 들어 있는 공의 개수가 모두 3의 배수가 되도록 6개의 흰 공을 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 흰 공이 하나도 들어 있지 않은 상자가 있을 수 있고, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.) [4점]



29. 수열 $\{a_n\}$은 a_1이 자연수이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - d \ (a_n \geq 0) \\ a_n + d \ (a_n < 0) \end{cases} \ (d\text{는 자연수})$$

이다. $a_n < 0$인 자연수 n의 최솟값을 m이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3$
(나) $a_1 + a_{m-1} = -9(a_m + a_{m+1})$
(다) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 45$

a_1의 값을 구하시오. (단, $m \geq 3$) [4점]

30. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$가 $0 \leq x < 4$에서

$$h(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 2) \\ f(x) & (2 \leq x < 3) \\ g(x) & (3 \leq x < 4) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $h(x) = h(x-4) + k$ (k는 상수)이다.
(나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(다) $\int_0^4 h(x)\,dx = 6$

$h\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2020학년도 사관학교 1차시험 [나형] 해설

1	④	2	①	3	①	4	③	5	④
6	③	7	②	8	⑤	9	②	10	④
11	⑤	12	①	13	②	14	③	15	④
16	⑤	17	⑤	18	①	19	③	20	②
21	⑤	22	23	23	375	24	7	25	30
26	25	27	50	28	81	29	17	30	21

1) ④

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{2,\ 4\}$,

$\therefore\ 2+4=6$

2) ①

$\sqrt[3]{36}\times\left(\sqrt[3]{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^2=(2^2 3^2)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

3) ①

$\lim_{x\to-1+}f(x)=1,\ \lim_{x\to 0-}f(x)=0,$

$\therefore\ 1+0=1$

4) ③

$\frac{b}{a}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

5) ④

g는 f의 역함수이므로 $g(6)+(f\circ g)(4)=3+4=7$

6) ③

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

7) ②

$\frac{3}{4a}\times a+\frac{1}{2}\times(2-a)\times\frac{3}{4a}=1$이므로

$\frac{3(2-a)}{8a}=\frac{1}{4},\ 3(2-a)=2a,\ a=\frac{6}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)=1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4a}=\frac{11}{16}$

8) ⑤

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{h}=2$에서 $f(1)=3,\ f'(1)=2$

$g(x)=(x+2)f(x)$에서 $g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$\therefore\ g'(1)=f(1)+3f'(1)=3+6=9$

9) ②

$S_1=S_2$이고 두 곡선의 교점의 x좌표는 2이므로

$S_1+S_2=2\int_0^2\{(x-4)^2-x^2\}dx=2\int_0^2(16-8x)dx$

$=2\left[16x-4x^2\right]_0^2=32$

10) ④

$\mathrm{P}(X=3)={}_5\mathrm{C}_3p^3(1-p)^2,\ \mathrm{P}(X=4)={}_5\mathrm{C}_4p^4(1-p)$

$10p^3(1-p)^2=5p^4(1-p),\ p=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(6X)=6\mathrm{E}(X)=6\times 5p=20$

11) ⑤

$x=1$일 때만 확인 하면 된다.

$g(x)=(x-a)f(x)$에서

$g(1)=(1-a)\times 4=\lim_{x\to 1-}g(x)=(1-a)a$

$4(1-a)=a(1-a),\ a=1$ 또는 4,

$\therefore\ 1+4=5$

12) ①

$x=a-7$ 과 $18-2a$일 때 각각

$(a-7)(a-7-a)\le 0,\ (18-2a)(18-2a-a)\le 0$

$a\ge 7,\ 6\le a\le 9,$

$\therefore\ 7\le a\le 9,\ 7+8+9=24$

13) ②

$a=\overline{x}-1.96\times\left(\frac{1.5}{6}\right),\ 6.49=\overline{x}+1.96\times\left(\frac{1.5}{6}\right)$이므로

$a-6.49=-1.96\times\left(\frac{3}{6}\right),$

$\therefore\ a=6.49-\frac{1.96}{2}=5.51$

14) ③

a_n과 S_n을 나열하면

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	⋯
a_n	4	−2	0	2	4	−2	0	2	4	−2	0	2	⋯
S_n	4	2	2	4	8	6	6	8	12	10	10	12	⋯

따라서 구하는 m의 최솟값은 9이다.

15) ④

$9^a=2^{\frac{1}{b}}$에서 $3^{2a}=2,$

$(a+b)^2=\log_3 64$에서 $3^{(a+b)^2}=64=2^6,$

즉 $3^{\frac{(a+b)^2}{6}}=2$

$2a=\frac{(a+b)^2}{6},\ a^2-10ab+b^2=0,$

$t=\frac{a}{b}$라 하면 $a>b>0$에서 $t>1$이고

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-10\left(\frac{a}{b}\right)+1=0,$

$t^2-10t+1=0,\ t=5+2\sqrt{6}$

$\frac{a-b}{a+b}=\frac{t-1}{t+1}=\frac{4+2\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}}=\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$

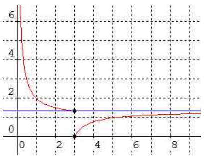
$=\frac{(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

16) ⑤

홀수는 이웃하지 않도록 나열한다.

∨(짝)∨(짝)∨(짝)∨ --- $\therefore\ {}_3\mathrm{P}_3\times{}_4\mathrm{P}_3=6\times 24=144$

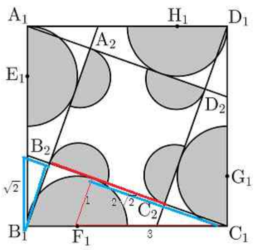
17) ⑤



$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때이므로 $b=\dfrac{4}{3}$, $a=\dfrac{9}{4}$이다.

$\therefore\ a+b=\dfrac{43}{12}$

18) ①



그림과 같이 원의 접선에서 직각삼각형의 변의 길이를 각각 구하면

두 번째 정사각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{8\sqrt{2}-4}{3}$이다.

따라서 축소비율은 $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$이므로

공비는 $\left(\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}\right)^2=1-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$이고

$S_1=2\pi$이므로

$S=\dfrac{2\pi}{1-\left(1-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)}=\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{4}$이다.

19) ③

$a+b+c=3n$을 만족시키는 자연수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

${}_{3n-1}\mathrm{C}_2=\dfrac{(3n-1)(3n-2)}{2}$

$a>b$ 또는 $a>c$의 여사건은 $a\le b$이고 $a\le c$이다.

$a=k$일 때 $k\le b$, $k\le c$은 $b+c=3n-k$에서

$(b,\ c)=(k,\ 3n-2k)$, $(k+1,\ 3n-2k-1)$, $\cdots$, $(3n-2k,\ k)$

즉 $3n-3k+1$개 이다. 따라서 여사건의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+1)=3n^2-\frac{3}{2}n(n+1)+n=\frac{1}{2}n(3n-1)$

따라서 구하는 확률은

$1-\dfrac{\frac{1}{2}n(3n-1)}{\frac{1}{2}(3n-1)(3n-2)}=1-\dfrac{n}{3n-2}=\dfrac{2n-2}{3n-2}$

$n=2$일 때 $p=\dfrac{5\times4}{2}=10$

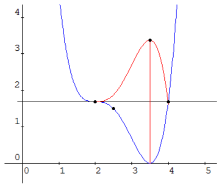
$n=7$, $k=2$일 때 $q=21-6+1=16$

$n=4$일 때 $r=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ pqr=10\times16\times\dfrac{3}{5}=96$

20) ②

$y=2a-f(x)$는 $y=f(x)$을 $y=a$에 대하여 대칭이동한 것이다.



(가)에서 $f(x)=(x-\alpha)^3(x-4)+a$

(나)에서 $f'(x)=(x-\alpha)^2(4x-14)$, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=0$

두 식으로부터 $\alpha=2$, $a=\dfrac{27}{16}$이다.

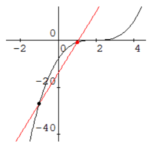
$\therefore\ f(x)=(x-2)^3(x-4)+\dfrac{27}{16}$,

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

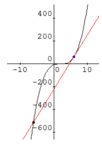
21) ⑤

ㄱ. $(-1,\ -27)$, $(1,\ -1)$으로부터 $m=\dfrac{(-1)-(-27)}{1-(-1)}=13$

ㄱ.



ㄴ.



ㄴ. $x=a$에서의 접선이 점 $(-a,\ (-a-2)^3)$을 지날 때이므로

$f'(x)=3(x-2)^2$에서 $m=f'(a)=3(a-2)^3$

$y=3(a-2)^2(x-a)+(a-2)^3$

점 $(-a,\ (-a-2)^3)$을 대입하면

$-(a+2)^3=-6a(a-2)^2+(a-2)^3$, $4a^3-24a^2=0$,

$\therefore\ a=6$

ㄷ. $x=a$에서 접선은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$이고,

$x=-a$에서 $y=f(a)-2af'(a)$이다.

$y=mx+n$에서는 $x=-a$이면 $y=n-ma$이다.

$f(a)-2af'(a)>n-ma$를 만족시키려면 ㄴ의 결과에서

$0<a<6$이므로 자연수 a의 개수는 5이다.

22) 23

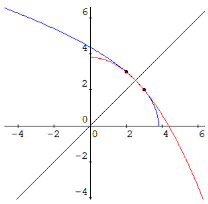
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a\times3^{n+2}-2^n}{3^n-3\times2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9a-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n}=9a=207,$

$\therefore\ a=23$

23) 375

$\displaystyle\sum_{n=1}^{9}(n^2+2n)=\frac{1}{6}\cdot9\cdot10\cdot19+9\cdot10=375$

24) 7



$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 각각 $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$를 지난다.

$3=\sqrt{2a+b}$, $2=\sqrt{3a+b}$
이것을 풀면 $a=-5$, $b=19$,
$\therefore$ $f(x)=\sqrt{-5x+19}$, $f(-6)=7$

25) 30
$f(0)=0$이고 주어진 극한의 식에서
$f(1)=1$, $f'(0)=f'(1)-1$
$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=2ax+b$
$c=0$, $a+b+c=1$, $b=2a+b-1$
$\therefore$ $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=x+\dfrac{1}{2}$,

$60\times f'(0)=60\times\dfrac{1}{2}=30$

26) 25
표로 나타내면 다음과 같다

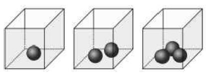
	1	2	3	4	5	6
1	○	○	○	○	○	○
2	○	×	○	×	○	×
3	○	○	×	○	●	×
4	○	×	○	×	○	×
5	○	○	●	○	×	○
6	○	×	×	×	○	×

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{2}{23}$ 이므로 $2+23=25$이다.

27) 50
등식을 만족시키는 다항식 $f(x)$는 일차식이다.
$f(x)=cx+d$라 하면
$\displaystyle\int_1^x(2x-1)f(t)dt=x^3+ax+b$
미분하면
$2\displaystyle\int_1^x f(t)dt+(2x-1)f(x)=3x^2+a$
또 미분하면
$2f(x)+2f(x)+(2x-1)f'(x)=6x$
$4f(x)+(2x-1)f'(x)=6x$
$4cx+4d+c(2x-1)=6x$, $6cx+4d-c=6x$
$\therefore$ $c=1$, $d=\dfrac{1}{4}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{4}$,

$40\times f(1)=40\times\dfrac{5}{4}=50$

28) 81
각각의 상자에 3개 또는 6개 이므로



3 3 6 --- $\dfrac{6!}{2!3!}=60$

3 6 3 --- $\dfrac{6!}{2!4!}=15$

6 3 3 --- $\dfrac{6!}{5!}=6$

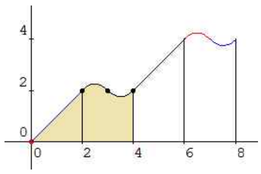
$\therefore$ $60+15+6=81$

29) 17
조건에 맞도록 나열하면
(가)에서 $a_{m-2}=d+1$, $a_{m-1}=1$, $a_m=1-d$

$1-d$	1	$1+d$	$\cdots$
a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	$\cdots$
	a_{m+1}		

(나)에서 $a_1=a_{m-1}+(m-2)d=1+(m-2)d$
$2+(m-2)d=9(d-2)$, $d=\dfrac{20}{11-m}$
(다)에서 $(m-1)\dfrac{9(d-2)}{2}=45$, 즉 $(m-1)(d-2)=10$
따라서 $(m-1)\left(\dfrac{20}{11-m}-2\right)=10$, $m^2+3m-54=0$
$(m-6)(m+9)=0$, $\therefore$ $m=6$, $d=4$
$\therefore$ $a_1=1+(6-2)\times 4=17$

30) 21



그림과 같은 모양이어야 한다.
$f(x)=a\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+b$ 라 하면
$f'(x)=2a\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$
$f'(2)=2a\left(2-\dfrac{5}{2}\right)=-a=1$
$f(2)=a\left(2-\dfrac{5}{2}\right)^2+b=2$, $b=\dfrac{9}{4}$
즉 $f(x)=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$, $g(x)=\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$
그리고 $k=2$이다.
$h\left(\dfrac{13}{2}\right)=h\left(\dfrac{5}{2}\right)+2=f\left(\dfrac{5}{2}\right)+2=\dfrac{9}{4}+2=\dfrac{17}{4}$,
$\therefore$ $4+17=21$