수학 영역(가 형)

1. 제 3사분면의 각 θ에 대하여 $\cos\theta = -\frac{1}{2}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [2점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

2. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. $\lim_{x \to 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A^C \cup B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

5. 같은 종류의 흰 바둑돌 5개와 같은 종류의 검은 바둑돌 4개가 있다. 이 9개의 바둑돌을 일렬로 나열할 때, 검은 바둑돌 4개 중 2개는 서로 이웃하고, 나머지 2개는 어느 검은 바둑돌과도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 60 ② 72 ③ 84 ④ 96 ⑤ 108

6. 초점이 F인 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ 6)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=k$이다. $a+k$의 값은? [3점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

7. 이산확률변수 X가 가지는 값이 0, 2, 4, 6이고 X의 확률질량함수가

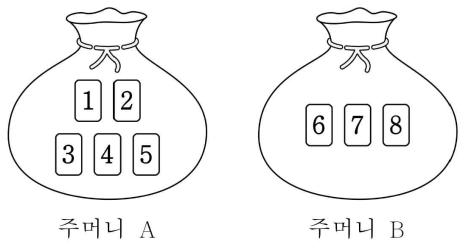
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\begin{cases} a & (x=0) \\ \dfrac{1}{x} & (x=2,\ 4,\ 6) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{E}(aX)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

8. 주머니 A에는 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 6부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낸다. 꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 합이 홀수일 때, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



9. 평면 α위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{\mathrm{PH}}=4$일 때, 삼각형 HAB의 넓이는? [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{7}$ ④ 9 ⑤ $3\sqrt{11}$

10. 함수 $f(x)=\dfrac{6x^3}{x^2+1}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

11. 좌표공간의 두 점 A$(2,\ 2,\ 1)$, B$(a,\ b,\ c)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있다. 직선 AB와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다. 양수 b의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

12. $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 $\tan 2x\sin 2x=\dfrac{3}{2}$의 모든 해의 합은? [3점]

① 2π ② $\dfrac{5}{2}\pi$ ③ 3π ④ $\dfrac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

13. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 중심으로 하는 원 C가 있다. 점 $(3,\ 0)$을 지나고 원 C에 접하는 두 직선이 각각 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$과 한 점에서만 만날 때, 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

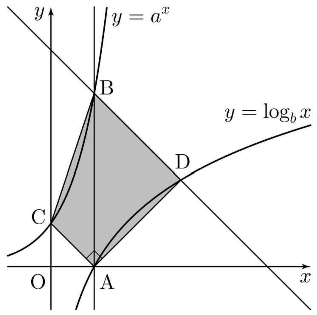
14. 어느 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리는 평균이 $m$km, 표준편차가 σkm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 직장인들 중에서 36명을 임의추출하여 조사한 결과 36명이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 총합은 216km이었다. 이 결과를 이용하여, 이 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le a+0.98$이다. $a+\sigma$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

① 6.96 ② 7.01 ③ 7.06 ④ 7.11 ⑤ 7.16

15. 두 상수 a, b $(b<0<a)$에 대하여 직선 $\frac{x-a}{a}=3-y=\frac{z}{b}$ 위의 임의의 점과 평면 $2x-2y+z=0$ 사이의 거리가 4로 일정할 때, $a-b$의 값은? [4점]

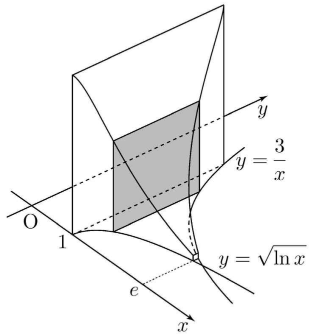
① 25 ② 27 ③ 29 ④ 31 ⑤ 33

16. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 $\mathrm{C}(0,\ 1)$에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a\times b$의 값은? [4점]



① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8 ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

17. 그림과 같이 두 곡선 $y=\dfrac{3}{x}$, $y=\sqrt{\ln x}$와 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



① $5-\dfrac{9}{e}$ ② $5-\dfrac{8}{e}$ ③ $5-\dfrac{7}{e}$ ④ $6-\dfrac{9}{e}$ ⑤ $6-\dfrac{8}{e}$

18. 다음은 자연수 n에 대하여 방정식 $a+b+c=3n$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가

$$a>b \text{ 또는 } a>c$$

를 만족시킬 확률을 구하는 과정이다.

> 방정식
>
> $a+b+c=3n \cdots\cdots (*)$
>
> 을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 $a>b$ 또는 $a>c$를 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 $a\le b$와 $a\le c$를 만족시키는 사건이다.
>
> 이제 $n(A^C)$의 값을 구하자.
>
> 자연수 $k(1\le k\le n)$에 대하여 $a=k$인 경우,
>
> $b\ge k$, $c\ge k$이고 방정식 $(*)$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $\boxed{(나)}$이므로
>
> $$n(A^C)=\sum_{k=1}^{n}\boxed{(나)}$$
>
> 이다.
>
> 따라서 구하는 확률은
>
> $$\mathrm{P}(A)=\boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $n=2$를 대입한 값을 p, (나)에 알맞은 식에 $n=7$, $k=2$를 대입한 값을 q, (다)에 알맞은 식에 $n=4$를 대입한 값을 r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은? [4점]

① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

19. 함수 $f(x)=xe^{2x}-(4x+a)e^x$이 $x=-\frac{1}{2}$에서 극댓값을 가질 때, $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다. [4점]

① $1-\ln 2$ ② $2-2\ln 2$ ③ $3-3\ln 2$
④ $4-4\ln 2$ ⑤ $5-5\ln 2$

20. 두 상수 a, b와 함수 $f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(b-x) & (x\ge a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\int_a^{a-b} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}\ln 5$ ② $\ln 5$ ③ $\frac{3}{2}\ln 5$ ④ $2\ln 5$ ⑤ $\frac{5}{2}\ln 5$

21. 두 함수

$$f(x)=4\sin\frac{\pi}{6}x,\ g(x)=|2\cos kx+1|$$

이 있다 $0<x<2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=(f\circ g)(x)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 자연수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=1$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k=2$일 때, 방정식 $h(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

ㄷ. 함수 $|h(x)-k|$가 $x=\alpha\ (0<\alpha<2\pi)$에서 미분가능하지 않은 실수 α의 개수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{4}a_k=34$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 함수 $f(x)=(3x+e^x)^3$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=2\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t$$

가 있다. 이 곡선 위의 $t=\frac{\pi}{4}$에 대응하는 점에서의 접선의 y절편을 구하시오. [3점]

24. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 128) = \mathrm{P}(X \leq 140)$

(나) $\mathrm{P}(m \leq X \leq m+10) = \mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 0)$

$\mathrm{P}(X \geq k) = 0.0668$을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

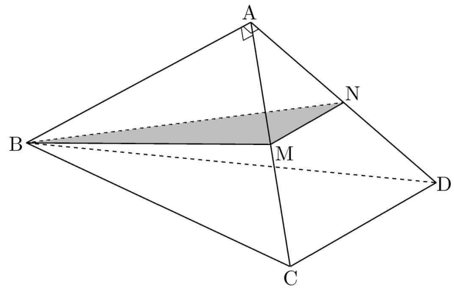
25. 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공을 같은 종류의 세 상자에 3개씩 나누어 넣으려고 한다. 세 상자 중 어떤 한 상자에 들어 있는 3개의 공에 적힌 수의 합이 나머지 두 상자에 들어 있는 6개의 공에 적힌 수의 합보다 크도록 9개의 공을 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.) [3점]

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ACD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

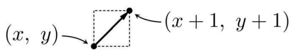
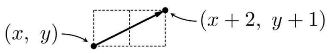
(가) $\overline{\mathrm{BC}} = 3\sqrt{10}$

(나) $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{AD}}$

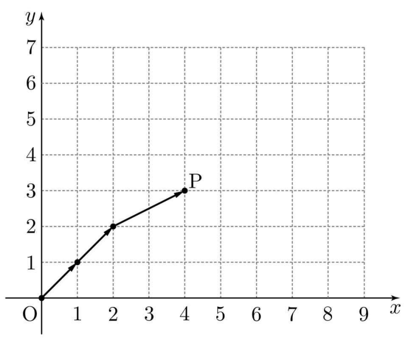
두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 삼각형 BMN의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $40 \times S$의 값을 구하시오. [4점]



27. 한 번 누를 때마다 좌표평면 위의 점 P를 다음과 같이 이동시키는 두 버튼 ㉠, ㉡이 있다.

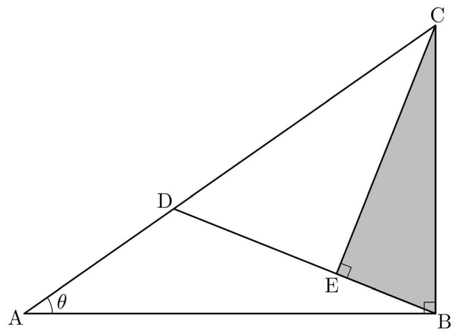
> [버튼 ㉠] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{2}$인 선분을 따라 점 $(x,\ y)$에 있는 점 P를 점 $(x+1,\ y+1)$로 이동시킨다.
>
> 
>
>
> [버튼 ㉡] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{5}$인 선분을 따라 점 $(x,\ y)$에 있는 점 P를 점 $(x+2,\ y+1)$로 이동시킨다.
>
> 
>

예를 들어, 버튼을 ㉠, ㉠, ㉡ 순으로 누르면 원점 $(0,\ 0)$에 있는 점 P는 아래 그림과 같이 세 선분을 따라 점 $(4,\ 3)$으로 이동한다. 또한 원점 $(0,\ 0)$에 있는 점 P를 점 $(4,\ 3)$으로 이동시키도록 버튼을 누르는 경우는 ㉠㉠㉡, ㉠㉡㉠, ㉡㉠㉠으로 3가지이다.



원점 $(0,\ 0)$에 있는 점 P를 두 점 $\mathrm{A}(5,\ 5)$, $\mathrm{B}(6,\ 4)$중 어느 점도 지나지 않고 점 $\mathrm{C}(9,\ 7)$로 이동시키도록 두 버튼 ㉠, ㉡을 누르는 경우의 수를 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 하자. 선분 AC를 $4:7$로 내분하는 점을 D라 하고 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 삼각형 CEB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 좌표공간에 구 $C: x^2+y^2+(z+2)^2=2$와 점 $\mathrm{A}(0,\ 3,\ 3)$이 있다. 구 C 위의 점 P와 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QA}}=3\sqrt{6}$을 만족시키는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값은 $p\sqrt{2}+q\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p, q는 유리수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 0$이다.

$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=\dfrac{n}{m-3\ln 3}$일 때, $|m\times n|$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1<\ln 3<1.1$인 무리수이다.) [4점]

2020학년도 사관학교 1차시험 [가형] 해설

1	⑤	2	①	3	④	4	③	5	①
6	④	7	②	8	⑤	9	⑤	10	①
11	③	12	⑤	13	②	14	②	15	③
16	②	17	④	18	③	19	④	20	①
21	⑤	22	12	23	6	24	149	25	20
26	450	27	14	28	9	29	7	30	16

1) ⑤

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \tan\theta = \sqrt{3}$

2) ①

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2, 4)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3, -1)$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 6 - 4 = 2$

3) ④

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x(1+\cos x)}{\sin x} = 2\times 1\times(1+1) = 4$

4) ③

$\mathrm{P}(A\cap B^C) = 1 - \mathrm{P}(A^C\cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A\cap B) + \mathrm{P}(A\cap B^C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

5) ①

흰 바둑알 5개를 먼저 놓고,

∨○∨○∨○∨○∨○∨ 좌우와 사이 6자리에

(●●), (●), (●)을 나열한다.

$\therefore\ 6\times {}_5\mathrm{C}_2 = 60$

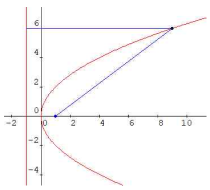
6) ④

F(1, 0)이고, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면,

$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}}$, 즉 $k = 1 + a$

P$(a, 6)$은 $36 = 4a$, $a = 9$, $k = 10$

$\therefore\ a + k = 9 + 10 = 19$



7) ②

X	0	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

$a = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, $\mathrm{E}(X) = 3$,

$\therefore\ \mathrm{E}(aX) = \frac{1}{12}\times 3 = \frac{1}{4}$

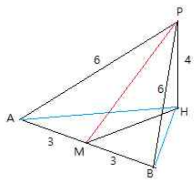
8) ⑤

두 수의 합이 홀수인 경우를 표시하면

B \ A	1	2	3	4	5
6	○	×	○	×	○
7	×	○	×	○	×
8	○	×	○	×	○

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

9) ⑤



$\overline{\mathrm{PM}} = 3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{HM}} = \sqrt{11}$

$\therefore\ \frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{11} = 3\sqrt{11}$

10) ①

$f(x) = \frac{6x^3}{x^2+1}$, $f'(x) = \frac{6x^4+18x^2}{(x^2+1)^2}$

$f(1) = 3$, $g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$

11) ③

$\frac{2}{3}(2, 2, 1) + \frac{1}{3}(a, b, c) = \frac{1}{3}(4+a, 4+b, 2+c)$,

$a = -4$, $c = -2$,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a-2, b-2, c-1) = (-6, b-2, -3)$, $\vec{n} = (0, 0, 1)$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 에서 $\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{45+(b-2)^2}} = \frac{1}{3}$

$45 + (b-2)^2 = 81$,

$\therefore\ b = 8$

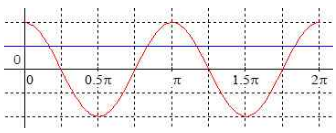
12) ⑤

$\tan 2x\sin 2x = \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} = \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x} = \frac{3}{2}$

$2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$,

$(2\cos 2x - 1)(\cos 2x + 2) = 0$

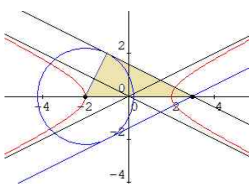
$\cos 2x = \frac{1}{2}$



$x = \pi$에 대하여 서로 대칭인 두 쌍의 실근이므로

모든 해의 합은 4π이다.

13) ②



점근선 $y=\pm\frac{1}{2}x$,

그림의 직각삼각형에서 $r^2+(2r)^2=25$,

$\therefore\ r=\sqrt{5}$

14) ②

$\bar{x}=\frac{216}{36}=6$,

$a=6-1.96\times\frac{\sigma}{6}$, $a+0.98=6+1.96\times\frac{\sigma}{6}$

연립하여 풀면, $a=5.51$, $\sigma=1.5$,

$\therefore\ a+\sigma=7.01$

15) ③

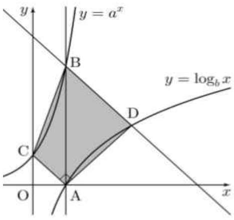
직선과 평면이 평행이므로, 직선 위의 임의의 점에서 평면에 이르는 거리가 4이다.

$\vec{d}=(a,\ -1,\ b)$, $\vec{n}=(2,\ -2,\ 1)$, $\mathrm{P}(a,\ 3,\ 0)$

$\vec{d}\cdot\vec{n}=2a+2+b=0$, $4=\frac{|2a-6|}{\sqrt{4+4+1}}$

$\therefore\ a=9$, $b=-20$, $a-b=29$

16) ②



$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ a)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$, $\mathrm{D}(k,\ k-1)$

$1+a=k+(k-1)$, $6=\frac{1}{2}\times a\times k$,

$k-1=\log_b k$

을 연립하여 풀면 $k=3$, $a=4$, $b=\sqrt{3}$

$\therefore\ ab=4\sqrt{3}$

17) ④

$$\int_1^e\left(\frac{3}{x}-\sqrt{\ln x}\right)^2dx=\int_1^e\left(\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x}\sqrt{\ln x}+\ln x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{9}{x}-4(\ln x)^{\frac{3}{2}}+x\ln x-x\right]_1^e=6-\frac{9}{e}$$

18) ③

$a+b+c=3n$을 만족시키는 자연수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

${}_{3n-1}\mathrm{C}_2=\frac{(3n-1)(3n-2)}{2}$

$a>b$ 또는 $a>c$의 여사건은 $a\le b$이고 $a\le c$이다.

$a=k$일 때 $k\le b$, $k\le c$은 $b+c=3n-k$에서

$(b,\ c)=(k,\ 3n-2k)$, $(k+1,\ 3n-2k-1)$, $\cdots$, $(3n-2k,\ k)$

즉 $3n-3k+1$개 이다. 따라서 여사건의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+1)=3n^2-\frac{3}{2}n(n+1)+n=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{\frac{1}{2}n(3n-1)}{\frac{1}{2}(3n-1)(3n-2)}=1-\frac{n}{3n-2}=\frac{2n-2}{3n-2}$$

$n=2$일 때 $p=\frac{5\times 4}{2}=10$,

$n=7$, $k=2$일 때 $q=21-6+1=16$

$n=4$일 때 $r=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$,

$\therefore\ pqr=10\times 16\times\frac{3}{5}=96$

19) ④

$f(x)=xe^{2x}-(4x+a)e^x$,

$f'(x)=(2x+1)e^{2x}-(4x+a+4)e^x$

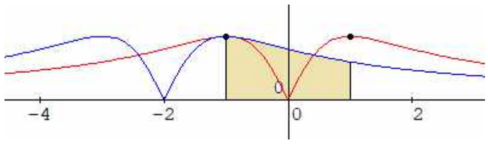
$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $a=-2$

따라서 $f'(x)=(2x+1)e^x(e^x-2)$이고

극솟값은 $f(\ln 2)=4-4\ln 2$이다.

20) ①

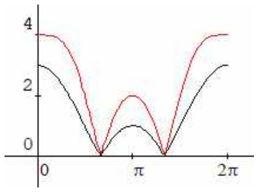
그림과 같이 $a=-1$, $b=-2$일 때이다.



$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_1^3\frac{x}{x^2+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^3=\frac{1}{2}\ln 5$$

21) ⑤

ㄱ. $g(x)=|2\cos x+1|$와 $h_1(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}g(x)\right)$의 그래프는 그림과 같다.



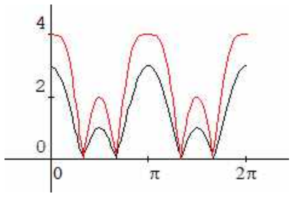
$x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\frac{4}{3}\pi$에서 $h_1(x)$는 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x)=|2\cos(2x)+1|$와 $h_2(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{6}g(x)\right)$의 그래프에서

$h_2(x)=2$의 실근은 $g(x)=1$

즉, $\cos(2x)=0$ 또는 $\cos(2x)=-1$

$x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ 또는 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$ --- 6개이다.



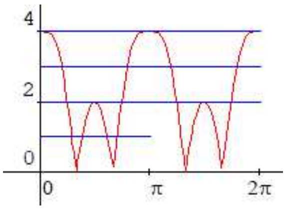
ㄷ. $y=|h_1(x)-1|$에서 $a_1=6$

$h_2(x)=h_1(2x)$이므로 $a_2=8$

$h_3(x)=h_1(3x)$이므로 $a_3=12$

$h_4(x)=h_1(4x)$이므로 $a_4=8$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{4}a_k=6+8+12+8=34$



22) 12

$f'(x)=3(3+e^x)(3x+e^x)^2$,

$f'(0)=3\times4\times1=12$

23) 6

$x=2\sqrt{2}\sin t+\sqrt{2}\cos t,\ y=\sqrt{2}\sin t+2\sqrt{2}\cos t$

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{2}\cos t-\sqrt{2}\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\sqrt{2}\cos t-2\sqrt{2}\sin t$

$t=\frac{\pi}{4}$ 이면 $x=3,\ y=3,\ \frac{dx}{dt}=1,\ \frac{dy}{dt}=-1$ 이므로

접선은 $y-3=-(x-3)$,

∴ y절편은 6

24) 149

(가)에서 $m=\frac{128+140}{2}=134$,

(나)에서 $\sigma=10$

∴ $k=m+1.5\sigma=134+1.5\times10=149$

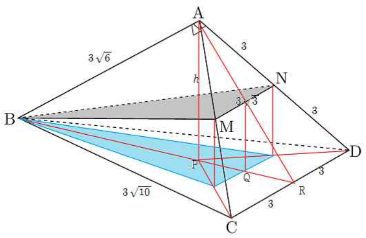
25) 20

$7+8+9=24,\ 21$ ---- ${}_6C_3\times\frac{1}{2}=10$

$6+8+9=23,\ 22$ ---- ${}_6C_3\times\frac{1}{2}=10$,

∴ $10+10=20$

26) 450



그림에서 $\overline{BR}=9$, $\overline{BP}=a$, $\overline{PR}=9-a$

$h^2=(3\sqrt{6})^2-a^2=(3\sqrt{3})^2-(9-a)^2$

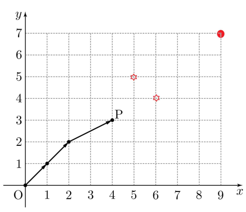
따라서 $a=6$, $\overline{PR}=3$

$S=\frac{1}{2}\times3\times\left(6+\frac{3}{2}\right)=\frac{45}{4}$

∴ $40S=450$

27) 14

㉠, ㉡ 버튼의 사용횟수를 각각 a, b라 하면



O→C : $a+2b=9,\ a+b=7$이므로

$a=5,\ b=2$ --- $\frac{7!}{5!2!}=21$가지

O→A→C : $a+2b=5,\ a+b=5$

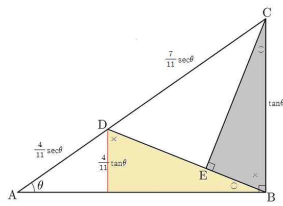
$a=5,\ b=0$ --- 1 가지

O→B→C : $a+2b=6,\ a+b=4$

$a=2,\ b=2$ --- $\frac{4!}{2!2!}=6$ 가지

∴ $21-(1+6)=14$

28) 9



그림에서 삼각형 BCE, BDM은 닮음이고,

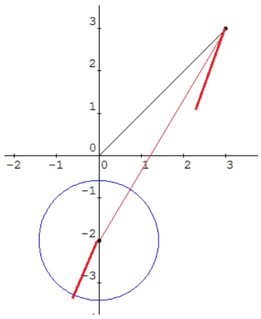
$\overline{BC}=\tan\theta$, $\overline{BD}=\frac{1}{11}\sqrt{49+16\tan^2\theta}$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{11}\tan\theta\times\left(\frac{11^2\tan^2\theta}{49+16\tan^2\theta}\right)=\frac{14\tan^3\theta}{49+16\tan^2\theta}$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{14}{49+0}=\frac{2}{7}$,

∴ $2+7=9$

29) 7



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}\right)\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\sqrt{2}\times2=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AO}$와 $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$

$\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\overrightarrow{AC}=(0,\ -3,\ -5)$, $\overrightarrow{AO}=(0,\ -3,\ -3)$

$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{4\sqrt{3}+1}{2\sqrt{17}}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\sqrt{34}\times2\times\left(\frac{4\sqrt{3}+1}{2\sqrt{17}}\right)=4\sqrt{6}+\sqrt{2}$

따라서 최댓값은 $(4\sqrt{6}+\sqrt{2})+2\sqrt{2}=4\sqrt{6}+3\sqrt{2}$,

∴ $p+q=3+4=7$

30) 16

$g(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{|t|+1}dt$, $g'(x)=\frac{f(x)}{|x|+1}$, $g(0)=0$

(가)에서 $g'(2)=0$이므로 $f(2)=0$

(나)에서 $f(0)=0$ 이어야한다.

따라서 $f(x)=x(x-2)(x-c)$이고

$g'(-1)=\dfrac{f(-1)}{2}$가 최대가 되도록 하려면

$0<c<2$이고 $g(2)\geq 0$ 인 최소의 c일 때이다.

$$\frac{f(x)}{x+1}=\frac{x(x-2)(x-c)}{x+1}=x^2-(3+c)x+3(c+1)-\frac{3(c+1)}{x+1}$$

$$g(2)=\int_0^2\left(x^2-(3+c)x+3(c+1)-\frac{3(c+1)}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{1}{2}(c+1)x^2+3(c+1)x-3(c+1)\ln(x+1)\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{3}+4(c+1)-3(c+1)\ln 3\geq 0$$

$$3(c+1)\geq\frac{4}{4-3\ln 3},$$

$$f(-1)=-3(c+1)\leq\frac{-4}{4-3\ln 3}$$

$\therefore\ n=-4,\ m=4,\ |m\times n|=16$