수학 영역(나 형)

5지선다형

1. 함수 $f(x)=(x^2+2x)(2x+1)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2}{3n(2n-1)-n^2}=3$을 만족시키는 상수 a의 값은? [2점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

3. 자연수 7을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수는? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-3}{h}=3$$

을 만족시킬 때, $f(1)+f'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 a_4 = 2a_5, \qquad a_5 = a_4 + 12a_3$$

일 때, $\log_2 a_{10}$의 값은? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

6. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{5}, \quad \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{4}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

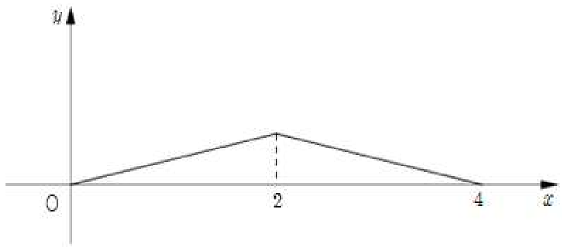
7. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n + 2}{2} & (a_n\text{은 짝수}) \\ \dfrac{a_n - 1}{2} & (a_n\text{은 홀수}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1 = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [3점]

① 38 ② 42 ③ 46 ④ 50 ⑤ 54

8. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 4$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같을 때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le X \le 3\right)$의 값은? [3점]



① $\frac{25}{32}$ ② $\frac{13}{16}$ ③ $\frac{27}{32}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{29}{32}$

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_5 = a_1$, $S_{10} = 40$일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 22

10. 모평균이 85, 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} \geq k\right) = 0.0228$$

을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

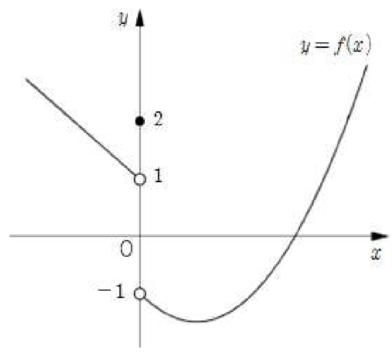
z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 86 ② 87 ③ 88 ④ 89 ⑤ 90

11. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x \to 1-} f(x-1)g(x) = 3$$

일 때, $g(2)$의 값은? [3점]



① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

12. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y = \dfrac{f(x)+5}{2-f(x)}$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x = 4$, $y = -1$이다. $f(1) = 5$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

13. 실수 x에 대한 두 조건

$$p : x^2 + ax - 8 > 0,$$
$$q : |x-1| \le b$$

가 있다. $\sim p$가 q이기 위한 필요충분조건이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은? [3점]

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

14. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

15. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 $A = \{3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$에 대하여 U의 부분집합 X가

$$A \cup X = X, \qquad (B - A) \cap X = \{6\}$$

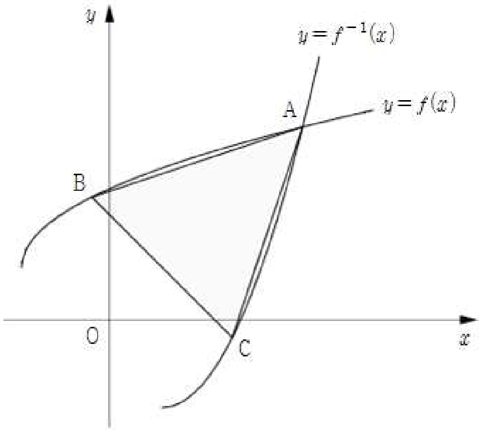
을 만족시킨다. $n(X) = 5$일 때, 모든 X의 개수는? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

16. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $y = n(x^3 - 3x^2) + k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 195 ② 200 ③ 205 ④ 210 ⑤ 215

17. 그림과 같이 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sqrt{x+5}+b$의 그래프와 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B$(-1, 7)$과 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC는 $\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AC}}$인 이등변삼각형이다. 삼각형 ABC의 넓이가 64일 때, ab의 값은? (단, 점 C의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 작다.) [4점]

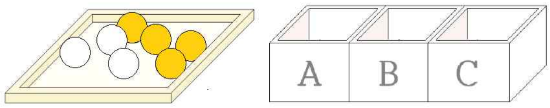


① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

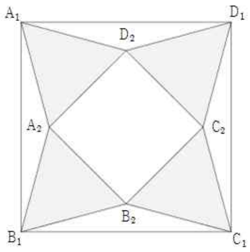
18. 흰색 탁구공 3개와 주황색 탁구공 4개를 서로 다른 3개의 비어 있는 상자 A, B, C에 남김없이 넣으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 넣는 경우의 수는? (단, 탁구공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) [4점]

(가) 상자 A에는 흰색 탁구공을 1개 이상 넣는다. (나) 흰색 탁구공만 들어 있는 상자는 없도록 넣는다.

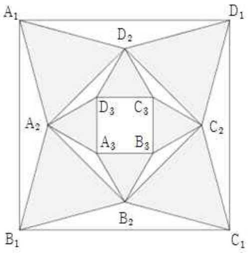
① 35 ② 37 ③ 39 ④ 41 ⑤ 43



19. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 네 점 A_2, B_2, C_2, D_2를 네 삼각형 $A_2A_1B_1$, $B_2B_1C_1$, $C_2C_1D_1$, $D_2D_1A_1$이 모두 한 내각의 크기가 $150°$인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 네 삼각형 $A_1A_2D_2$, $B_1B_2A_2$, $C_1C_2B_2$, $D_1D_2C_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 네 점 A_3, B_3, C_3, D_3을 네 삼각형 $A_3A_2B_2$, $B_3B_2C_2$, $C_3C_2D_2$, $D_3D_2A_2$가 모두 한 내각의 크기가 $150°$인 이등변삼각형이 되도록 잡는다. 네 삼각형 $A_2A_3D_3$, $B_2B_3A_3$, $C_2C_3B_3$, $D_2D_3C_3$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



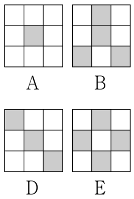
R_1



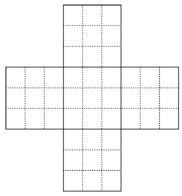
R_2

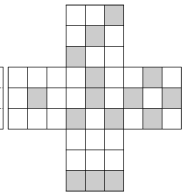
① $5-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ② $6-2\sqrt{3}$ ③ $7-\frac{5}{2}\sqrt{3}$
④ $8-3\sqrt{3}$ ⑤ $9-\frac{7}{2}\sqrt{3}$

20. [그림 1]과 같이 5개의 스티커 A, B, C, D, E는 각각 흰색 또는 회색으로 칠해진 9개의 정사각형으로 이루어져 있다. 이 5개의 스티커를 모두 사용하여 [그림 2]의 45개의 정사각형으로 이루어진  모양의 판에 빈틈없이 붙여 문양을 만들려고 한다. [그림 3]은 스티커 B를  모양의 판의 중앙에 붙여 만든 문양의 한 예이다.



[그림 1]


[그림 2]


[그림 3]

다음은 5개의 스티커를 모두 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 문양의 개수를 구하는 과정의 일부이다. (단,  모양의 판을 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

 모양의 판의 중앙에 붙이는 스티커에 따라 다음과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다.
(ⅰ) A 또는 E를 붙이는 경우
나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 3!
이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는
$1\times2\times4\times4$
그러므로 이 경우의 수는 $2\times3!\times32$
(ⅱ) B 또는 C를 붙이는 경우
나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는
$\boxed{\text{(가)}}$
이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는
$1\times1\times2\times4$
그러므로 이 경우의 수는 $2\times\boxed{\text{(가)}}\times8$
(ⅲ) D를 붙이는 경우
나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는
$\boxed{\text{(나)}}$
이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는
$\boxed{\text{(다)}}$
그러므로 이 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}\times\boxed{\text{(다)}}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]
① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

21. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x|x-k|$$

이다. 함수 $g(x)=x^2-3x-4$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(2)=2$

ㄴ. $h(k)=4$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

ㄷ. $h(k)=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\sqrt{3\sqrt[4]{27}}=3^{\frac{q}{p}}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

23. $\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2 a_k = 100, \quad \sum_{k=1}^{10} k(k+1)a_k = 23$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-8x+a}{x-6} & (x \neq 6) \\ b & (x=6) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

26. 확률변수 X가 가지는 값이 0부터 25까지의 정수이고, $0<p<\dfrac{1}{2}$인 실수 p에 대하여 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x) = {}_{25}\mathrm{C}_x\, p^x (1-p)^{25-x} \quad (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$$

이다. $\mathrm{V}(X)=4$일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오. [4점]

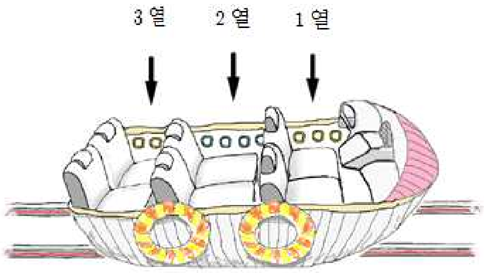
27. 곡선 $y=x^3+x-3$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2} \int_{-2}^{x} f(t)\,dt = 12$
(나) $\lim_{x \to \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \to 0} \frac{f(x+1)}{x} = 1$

29. 그림과 같이 1열, 2열, 3열에 각각 2개씩 모두 6개의 좌석이 있는 놀이기구가 있다. 이 놀이기구의 6개의 좌석에 6명의 학생 A, B, C, D, E, F가 각각 한 명씩 임의로 앉을 때, 다음 조건을 만족시키도록 앉을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 두 학생 A, B는 같은 열에 앉는다.
(나) 두 학생 C, D는 서로 다른 열에 앉는다.
(다) 학생 E는 1열에 앉지 않는다.



30. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재하지 않을 때, $g(t)=0$이다.
(나) 방정식 $f(x)=t$의 실근이 존재할 때, $g(t)$는 $f(x)=t$의 실근의 최댓값이다.

함수 $g(t)$가 $t=k$, $t=30$에서 불연속이고

$$\lim_{t\to k+} g(t)=-2\ ,\quad \lim_{t\to 30+} g(t)=1$$

일 때, 실수 k의 값을 구하시오. (단, $k<30$) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2019학년도 사관학교 1차시험 [나형] 해설

1	⑤	2	①	3	③	4	⑤	5	⑤
6	②	7	④	8	③	9	②	10	③
11	④	12	①	13	④	14	②	15	③
16	④	17	①	18	②	19	②	20	①
21	③	22	15	23	135	24	8	25	16
26	29	27	31	28	42	29	49	30	21

1) ⑤

$f'(x) = (2x+2)(2x+1) + 2(x^2+2x)$

$\therefore\ f'(1) = 4\times 3 + 2\times 3 = 18$

2) ①

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+2}{5n^2-3n} = \dfrac{a}{5} = 3,\ \therefore\ a = 15$

3) ③

$7 = 5+1+1 = 4+2+1 = 3+3+1 = 3+2+2$

$\therefore$ 4 가지

4) ⑤

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-3}{2h}\times 2 = 3$

$f(1) = 3,\ 2f'(1) = 3,$

$\therefore\ f(1) + f'(1) = 3 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$

5) ⑤

$a_n = ar^{n-1}\ (a > 0,\ r > 0)$라고 하면

$(ar)(ar^3) = 2(ar^4),\ (ar^4) = (ar^3) + 12(ar^2)$

$a = 2,\ r^2 = r + 12,$

$r = 4,\ a_{10} = ar^9 = 2\times 4^9 = 2^{19}$

$\therefore\ \log_2 a_{10} = \log_2 2^{19} = 19$

6) ②

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A),$

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$

$\dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B|A),$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A) = \dfrac{1}{5}$

7) ④

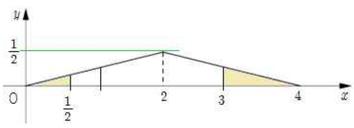
주어진 관계식에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$를 차례로 대입하면

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	20	11	5	2	2	2	2	2	2	2

$\sum\limits_{k=1}^{10} a_k = 20 + 11 + 5 + 2\times 7 = 50$

8) ③

확률밀도함수의 정의와 삼각형의 닮음으로 부터



$\mathrm{P}\left(0 \le X \le \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \mathrm{P}(0 \le X \le 2) = \dfrac{1}{16}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{32}$

$\mathrm{P}(3 \le X \le 4) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \mathrm{P}(2 \le X \le 4) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2} \le X \le 3\right) = 1 - \dfrac{1}{32} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{27}{32}$

9) ②

$a_1 = a$, 공차를 d라고 하면

$S_5 = \dfrac{5\{a + (a+4d)\}}{2} = 5(a+2d) = a,\ 4a + 10d = 0,\ 2a + 5d = 0$

$S_{10} = \dfrac{10\{a + (a+9d)\}}{2} = 5(2a+9d) = 40,\ 2a + 9d = 8$

$d = 2, \because\ a = -5,\ \therefore\ a_{10} = a + 9d = -5 + 18 = 13$

10) ③

$\overline{X}$는 $\mathrm{N}\left(85,\ \dfrac{9}{4}\right)$를 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge k) = 0.0228 = \mathrm{P}(Z \ge 2)$

$\dfrac{k-85}{\frac{3}{2}} = 2,$

$\therefore\ k = 85 + 3 = 88$

11) ④

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)}{f(x)} = -g(0) = 1,\ g(0) = -1$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x-1) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1,$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x-1)g(x) = g(1) = 3$

$g(x) = x^2 + ax + b$ 라 놓으면 $b = -1,\ 1 + a + b = 3$ 이므로

$a = 3,\ g(x) = x^2 + 3x - 1,$

$\therefore\ g(2) = 4 + 6 - 1 = 9$

12) ①

점근선이 $x = 4$이므로 $2 - f(4) = 0,\ f(4) = 2$

$f(x) = ax + b$ 라 하면, $f(4) = 4a + b = 2,\ f(1) = a + b = 5$

$a = -1,\ b = 6,\ f(x) = -x + 6,$

$\therefore\ f(2) = -2 + 6 = 4$

13) ④

q : $1 - b \le x \le 1 + b$, $\sim p$: $x^2 + ax - 8 \le 0$

$(1-b) + (1+b) = -a,\ (1-b)(1+b) = -8$

$\therefore\ a = -2,\ b = 3,\ b - a = 3 - (-2) = 5$

14) ②

$\int_0^1 f(x)dx = a$ 라 하면, $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + a^2$

$a = \int_0^1\left(\dfrac{3}{4}x^2 + a^2\right)dx = \left[\dfrac{1}{4}x^3 + a^2x\right]_0^1 = a^2 + \dfrac{1}{4}$

$a^2 - a + \dfrac{1}{4} = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0,\ a = \dfrac{1}{2},\ f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}$

$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2\left(\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}\right)dx = \left[\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{1}{4}x\right]_0^2 = \dfrac{5}{2}$

15) ③

$A\cup X = X$ 에서 $A \subset X,\ 3\in X,\ 4\in X$

$B - A = \{5,\ 6\},\ (B - A)\cap X = \{6\}$에서 $5 \not\in X,\ 6\in X$

$n(X) = 5$이므로, $\{1, 2, 7, 8\}$ 중에서 2개의 원소를 더 채운다.

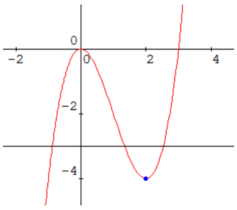
$\therefore\ {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

16) ④

$n(x^3 - 3x^2) + k = 0$

$x^3 - 3x^2 = -\dfrac{k}{n}$

$y=x^3-3x^2$의 그래프는 그림과 같다.

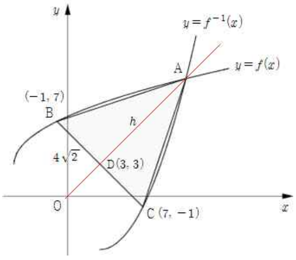


따라서 $-4<-\dfrac{k}{n}<0$

$0<k<4n$, $a_n=4n-1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\times55-10=210$

17) ①



그림에서

$4\sqrt{2}\times h=64$, $h=8\sqrt{2}$

그러므로 A$(11, 11)$

$f(-1)=2a+b=7$,

$f(11)=4a+b=11$

$a=2$, $b=3$

$\therefore\ ab=6$

18) ②

일단 A 상자에 흰 공 1개, 주황색 공 1개를 넣어 두고

나머지 흰 공 2개와 주황색 공 3개를 넣는 경우의 수를 구한다.

(i) A 상자에 흰 공이 2개 모두 넣은 경우

남은 주황색 3개를 3상자에 넣는 경우의 수는

$a+b+c=3$, ${}_3H_3={}_5C_3=10$, $\therefore$ 10

(ii) A 상자에 흰 공 1개를 넣고 남은 1개는 B 또는 C 에 넣은 경우

남은 주황색 3개 중 1개는 흰 공이 들어간 B 또는 C에 넣고

나머지 2개를 3상자에 넣는 경우의 수는

$a+b+c=2$, ${}_3H_2={}_4C_2=6$, $\therefore$ $2\times6=12$

(iii) 2개의 흰 공 2개를 모두 B 또는 C에 넣는 경우

주황색 1개를 흰 공이 들어간 B 또는 C에 넣고

나머지 2개를 3상자에 넣는 경우의 수는 6, $\therefore$ $2\times6=12$

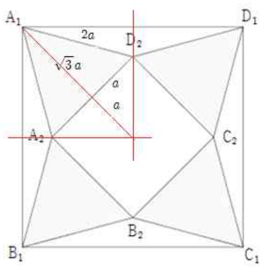
(iv) 흰 공 2개를 B와 C에 1개씩 나누어 넣은 경우

주황색 2개를 B와 C에 1개씩 넣고,

나머지 1개를 3상자에 넣는 경우의 수는 3, $\therefore$ 3

$\therefore$ $10+12+12+3=37$

19) ②



그림에서 정삼각형의 한 변의 길이를 $2a$라 하면

$\sqrt{3}a+a=\sqrt{2}$

$2a=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

$a^2=2-\sqrt{3}$

정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2a)^2=\sqrt{3}a^2$

$S_1=4\sqrt{3}a^2=8\sqrt{3}-12$

따라서 축소되는 닮음비는 a이므로

공비는 $a^2=2-\sqrt{3}$

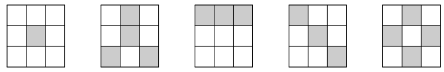
$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4\sqrt{3}a^2}{1-a^2}=\frac{8\sqrt{3}-12}{\sqrt{3}-1}=6-2\sqrt{3}$

20) ①

A와 E는 회전하면 모두 일치하고, − 1가지

B와 C는 회전하면 모두 놓인 모양이 다르고, − 4가지

D는 회전하여 다른 경우는 2가지이다. − 2가지



A B C D E

(i) 중앙에 A 또는 E 를 붙인 경우

나머지 4개는 원순열에 의하여 3! 인데,

각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면 $1\times2\times4\times4=32$

그러므로 $2\times3!\times32=384$

(ii) 중앙에 B 또는 C 를 붙인 경우

네 방향이 모두 상대적으로 다른 모양이므로

나머지 4개를 놓는 경우의 수는 4!

각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면 $1\times1\times2\times4=8$

그러므로 $2\times4!\times8=384$

(iii) 중앙에 D 를 붙인 경우

나머지 4개는 회전하여 일치하는 경우가 2방향이므로 $\dfrac{4!}{2}=12$

각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면 $1\times1\times4\times4=16$

그러므로 $12\times16=192$

따라서 서로 다른 문양의 개수는 $384+384+192=960$

(가)$=a=24$, (나)$=b=12$, (다)$=c=16$

$\therefore$ $a+b+c=24+12+16=52$

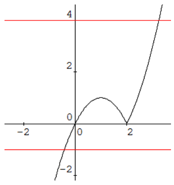
21) ③

$(g\circ f)(x)=(f(x))^2-3(f(x))-4=(f(x)+1)(f(x)-4)=0$

이므로 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점은

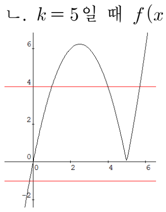
즉, 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 실근은 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=4$이다.

ㄱ. $k=2$일 때 $f(x)=x|x-2|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(2)=2$이다.

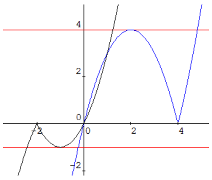
ㄴ. $k=5$일 때 $f(x)=x|x-5|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(k)=4$를 만족시키는

자연수 k의 최솟값은 5이다.

ㄷ. $k=-2$, $k=4$ 일 때, $f(x)=x|x-k|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(k)=3$을 만족시키는 k의 값의 합은
$(-2)+4=2$ 이다.

22) 15

$$\sqrt{3\sqrt[4]{27}}=\left(3\times 27^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{7}{8}}$$

$\therefore\ p+q=7+8=15$

23) 135

상수항은 ${}_6\mathrm{C}_2(3x^2)^2\left(\frac{1}{x}\right)^4=3^2\times{}_6\mathrm{C}_2=135$

24) 8

$a_k=(2k+1)^2a_k-4k(k+1)a_k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)^2a_k-4\sum_{k=1}^{10}k(k+1)a_k$$
$$=100-4\times 23=8$$

25) 16

$\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-8x+a}{x-6}=b$ 이므로

$6^2-8\times 6+a=0,\ a=12,\ x^2-8x+a=(x-6)(x-2)$

$b=\lim\limits_{x\to 6}(x-2)=4,$

$\therefore\ a+b=12+4=16$

26) 29

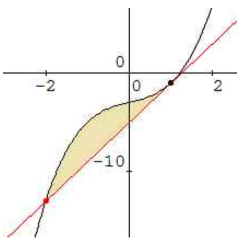
확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(25,p)$ 를 따른다.

$m=np=25p,\ 4=np(1-p)=25p(1-p)$

$p(1-p)=\frac{4}{25}=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5},\ \therefore\ p=\frac{1}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+m^2=4+\left(25\times\frac{1}{5}\right)^2=4+5^2=29$

27) 31



$y=x^3+x-3,\ y'=3x^2+1$

접선은 $y=4x-5$ 이므로

$x^3+x-3=4x-5$

$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)=(x-1)^3+3(x-1)^2$

$$S=\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)dx$$
$$=\int_{-2}^{1}\{(x-1)^3+3(x-1)^2\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}$$
$$=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4},$$

$\therefore\ p+q=4+27=31$

28) 42

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라 놓자.

(가)에서 $f(-2)=12,\ -8a+4b-2c+d=12$

(나)를 계산하면 $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to\infty$일 때

$t\to 0+$ 이고 $xf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{t}f(t)$ 이다.

$$\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(x+1)}{x}=1$$

이므로 $f(0)=0,\ f(1)=0,\ f'(0)+f'(1)=1$ 이다.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로

$f(0)=d=0,\ f(1)=a+b+c+d=0$

$f'(0)+f'(1)=c+(3a+2b+c)=1$

이상을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=0$

$\therefore\ f(x)=x^3+3x^2-4x,$

$\therefore\ f(3)=27+27-12=42$

29) 49

E, (A, B), F, (C, D) 의 순으로 자리를 정하여 앉히면 된다.

E 는 2열과 3열의 4자리 중 한 곳 -- 4가지

(A, B)는 E가 앉지 않은 열에 좌우 배치 -- $2\times 2=4$ 가지

F는 E, (A, B)가 앉지 않은 2자리 중 한 곳 -- 2가지

(C, D) 는 남은 자리에 배치 -- 2가지

그러므로 조건을 만족하도록 앉는 경우의 수는 $4\times 4\times 2\times 2=64$

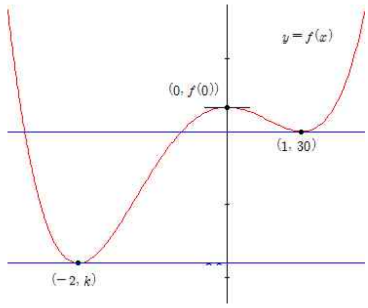
모든 경우의 수는 $6!=720$이므로, 구하려는 확률은

$\frac{64}{720}=\frac{4}{45},$

$\therefore\ p+q=45+4=49$

30) 21

주어진 조건으로 부터 $y=f(x)$는 그림과 같이 $x=-2,\ x=1$ 일 때 각각 극솟값 $f(-2)=k,\ f(1)=30$을 갖는다. 또한 $f'(0)=0$ 이다.



따라서 $f'(x)=4x(x+2)(x-1)=4x^3+4x^2-8x$

$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+C$

$f(1)=1+\frac{4}{3}-4+C=30,\ C=\frac{95}{3}$

$\therefore\ f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+\frac{95}{3}$

$k=f(-2)=16-\frac{32}{3}-16+\frac{95}{3}=21$