수학 영역(가 형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(6,\ 2,\ 4)$, $\vec{b}=(1,\ 3,\ 2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2. 함수 $f(x)=\ln(2x+3)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

3. 방정식 $2^x+\frac{16}{2^x}=10$의 모든 실근의 합은? [2점]

① 3 ② $\log_2 10$ ③ $\log_2 12$ ④ $\log_2 14$ ⑤ 4

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(5, a, -3)$, $\mathrm{B}(6, 4, b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 x축 위에 있을 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	b	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{11}{6}$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0<t<\pi)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x, y)$가

$$x=\cos t+2, \quad y=3\sin t+1$$

이다. 시각 $t=\frac{\pi}{6}$ 에서 점 P의 속력은? [3점]

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

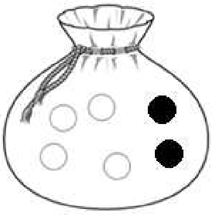
$$\int_1^{e^2} \frac{f(1+2\ln x)}{x}\,dx=5$$

일 때, $\int_1^5 f(x)\,dx$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

9. 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공의 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 5회 반복한다. 각 시행에서 꺼낸 공이 흰 공이면 1점을 얻고, 검은 공이면 2점을 얻을 때, 얻은 점수의 합이 7일 확률은? [3점]

① $\frac{80}{243}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{82}{243}$ ④ $\frac{83}{243}$ ⑤ $\frac{28}{81}$

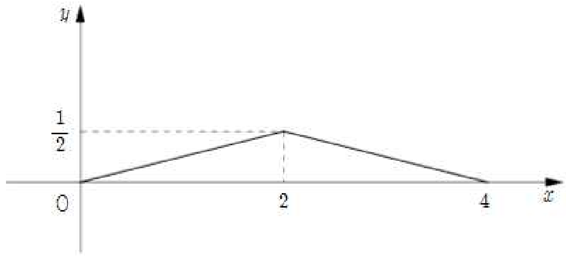


10. 곡선 $y=e^{\frac{x}{3}}$과 이 곡선 위의 점 $(3, e)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

① $\frac{e}{2}-1$ ② $e-2$ ③ $\frac{3}{2}e-3$

④ $2e-4$ ⑤ $\frac{5}{2}e-5$

11. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 4$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다. $1 < k < 2$일 때, $\mathrm{P}(k \le X \le 2k)$가 최대가 되도록 하는 k의 값은? [3점]



① $\frac{7}{5}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ $\frac{17}{10}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

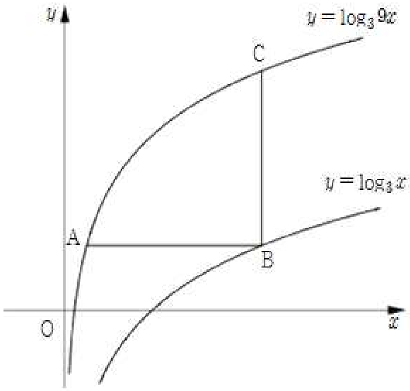
12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=x^2e^{-x}+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{e+1}{e^2}$ ③ $\frac{e+2}{e^2}$ ④ $\frac{e+3}{e^2}$ ⑤ $\frac{e+4}{e^2}$

13. 곡선 $y=\log_3 9x$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 x$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 9x$와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, $a+3^b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]



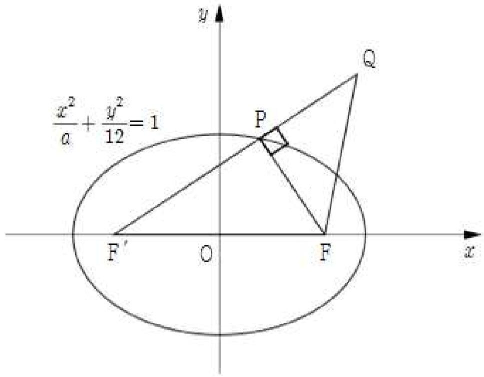
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)\sin x$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [4점]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=0$	(나) $\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}=6$

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

15. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{12}=1$ 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 F′P의 연장선 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{F'Q}}=10$이 되도록 잡는다. 삼각형 PFQ가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 QF′F의 넓이는? (단, $a>12$) [4점]

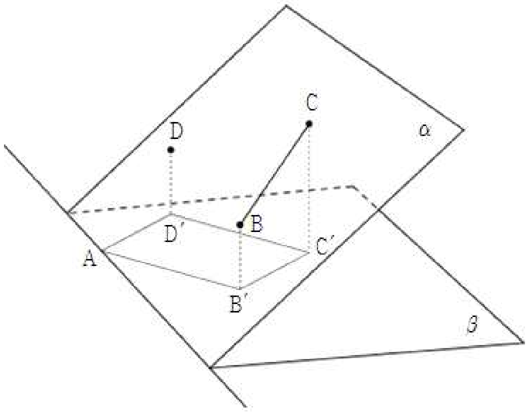


① 15 ② $\frac{35}{2}$ ③ 20 ④ $\frac{45}{2}$ ⑤ 25

16. 서로 다른 6개의 사탕을 세 명의 어린이 A, B, C에게 남김없이 나누어 줄 때, 어린이 A가 받은 사탕의 개수가 어린이 B가 받은 사탕의 개수보다 많도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 하나도 받지 못하는 어린이는 없다.) [4점]

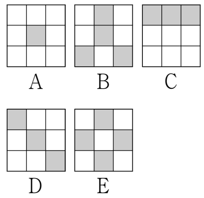
① 180 ② 190 ③ 200 ④ 210 ⑤ 220

17. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 점 A가 있다. 평면 α 위의 세 점 B, C, D의 평면 β 위로의 정사영을 각각 B$'$, C$'$, D$'$이라 할 때, 사각형 AB$'$C$'$D$'$은 한 변의 길이가 $4\sqrt{2}$인 정사각형이고, $\overline{BB'}=\overline{DD'}$이다. 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\frac{3}{4}$이다. 선분 BC의 길이는? (단, 선분 BD와 평면 β는 만나지 않는다.) [4점]

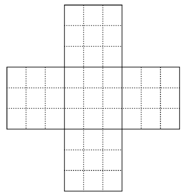


① $\sqrt{35}$ ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{39}$ ④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{43}$

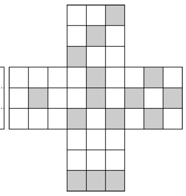
18. [그림 1]과 같이 5개의 스티커 A, B, C, D, E는 각각 흰색 또는 회색으로 칠해진 9개의 정사각형으로 이루어져 있다. 이 5개의 스티커를 모두 사용하여 [그림 2]의 45개의 정사각형으로 이루어진 모양의 판에 빈틈없이 붙여 문양을 만들려고 한다. [그림 3]은 스티커 B를 모양의 판의 중앙에 붙여 만든 문양의 한 예이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

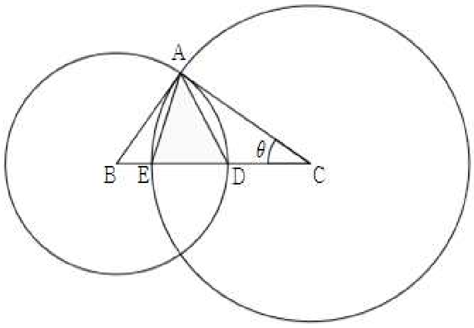
다음은 5개의 스티커를 모두 사용하여 만들 수 있는 서로 다른 문양의 개수를 구하는 과정의 일부이다. (단, 모양의 판을 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

> 모양의 판의 중앙에 붙이는 스티커에 따라 다음과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다.
> (i) A 또는 E를 붙이는 경우
> 나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 3!
> 이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는
> $1\times2\times4\times4$
> 그러므로 이 경우의 수는 $2\times3!\times32$
> (ii) B 또는 C를 붙이는 경우
> 나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$
> 이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는
> $1\times1\times2\times4$
> 그러므로 이 경우의 수는 $2\times\boxed{(가)}\times8$
> (iii) D를 붙이는 경우
> 나머지 4개의 스티커를 붙일 위치를 정하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$
> 이 각각에 대하여 4개의 스티커를 붙이는 경우의 수는
> $\boxed{(다)}$
> 그러므로 이 경우의 수는 $\boxed{(나)}\times\boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 52 ② 54 ③ 56 ④ 58 ⑤ 60

19. 그림과 같이 선분 BC를 빗변으로 하고, $\overline{\mathrm{BC}}=8$인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 D, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AC}}$인 원이 선분 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{ACB}=\theta$라 할 때, 삼각형 AED의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

20. 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(0, 12)$와 양수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}(0, t)$와 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$
>
> (나) $\frac{t}{3} \le |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| \le \frac{t}{2}$

$6 \le t \le 12$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은? [4점]

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

21. 함수 $f(x)=|x^2-x|e^{4-x}$이 있다. 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le kx) \\ kx & (f(x)>kx) \end{cases}$$

라 하자. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수를 $h(k)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=2$일 때, $g(2)=4$이다.
ㄴ. 함수 $h(k)$의 최댓값은 4이다.
ㄷ. $h(k)=2$를 만족시키는 k의 값의 범위는 $e^2\le k<e^4$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항을 구하시오. [3점]

23. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -14x+a & (x\le 1) \\ \dfrac{5\ln x}{x-1} & (x>1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

24. 곡선 $x^2+y^3-2xy+9x=19$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

25. 모평균이 85, 모표준편차가 6인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때,

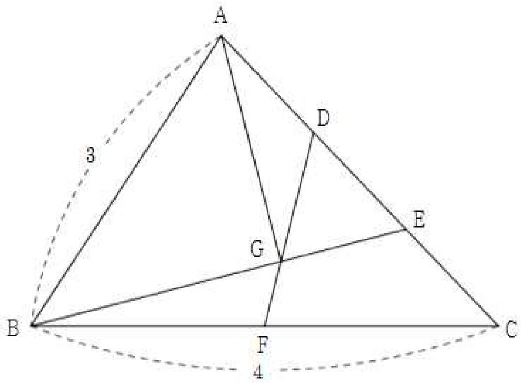
$$\mathrm{P}\left(\overline{X} \ge k\right) = 0.0228$$

을 만족시키는 상수 k의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

26. 함수 $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$의 그래프 위의 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $12\tan\theta$의 값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BE}}=0$일 때, $\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 1부터 11까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 11장의 카드 중에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 택할 때, 택한 카드에 적혀 있는 숫자를 각각 m, $n\,(m<n)$이라 하자. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}\left(\cos\frac{m\pi}{6},\ \sin\frac{m\pi}{6}\right)$, $\mathrm{C}\left(\cos\frac{n\pi}{6},\ \sin\frac{n\pi}{6}\right)$에 대하여 삼각형 ABC가 이등변삼각형일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 좌표공간에 평면 $\alpha : 2x+y+2z-9=0$과 구 $S : (x-4)^2+(y+3)^2+z^2=2$가 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \le 3\sqrt{2}$인 평면 α 위의 점 P와 구 S 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이고, a, b는 유리수이다.) [4점]

30. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$에 대하여 구간 $\left[\dfrac{12}{e^{12}}, \infty\right)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|\,dx$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2019학년도 사관학교 1차시험 [가형] 해설

1	③	2	①	3	⑤	4	②	5	②
6	④	7	③	8	⑤	9	①	10	③
11	③	12	②	13	⑤	14	②	15	③
16	④	17	④	18	①	19	⑤	20	④
21	②	22	135	23	19	24	11	25	88
26	9	27	37	28	68	29	21	30	18

1) ③

$\vec{a}-\vec{b}=(6,\ 2,\ 4)-(1,\ 3,\ 2)=(5,\ -1,\ 2)$,

$\therefore\ 5-1+2=6$

2) ①

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$f'(x)=\frac{2}{2x+3}$,

$\therefore\ f'(2)=\frac{2}{7}$

3) ⑤

$2^{2x}+16=10\times2^x$, $2^{2x}-10\times2^x+16=0$

$(2^x-2)(2^x-8)=0$,

$\therefore\ x=1,\ x=3,\ 1+3=4$

4) ②

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$,

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B|A)$,

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{5}$

5) ②

$\frac{3\mathrm{B}-2\mathrm{A}}{3-2}=3\mathrm{B}-2\mathrm{A}=3(6,\ 4,\ b)-2(5,\ a,\ -3)$

$=(8,\ 12-2a,\ 3b+6)$

$12-2a=0,\ 3b+6=0,\ a=6,\ b=-2$,

$\therefore\ a+b=4$

6) ④

$a+b=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$, $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+3b=\frac{11}{6}$,

$b=\frac{4}{12}$, $a=\frac{1}{12}$,

$\therefore\ \frac{b}{a}=4$

7) ③

$\vec{v}=(-\sin t,\ 3\cos t)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore\ |\vec{v}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{7}$

8) ⑤

$1+2\ln x=t$로 치환하면, $\frac{2}{x}dx=dt$

$\int_1^{e^2}\frac{f(1+2\ln x)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_1^5 f(t)dt=5$,

$\therefore\ \int_1^5 f(x)dx=10$

9) ①

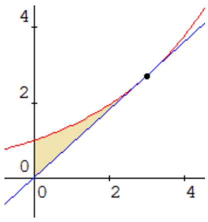
흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$, 검은 공이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$

점수의 합이 7 이려면 $2\times2+3\times1=7$이므로

5번 중 흰 공이 3번, 검은 공이 2번

$\therefore\ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$

10) ③

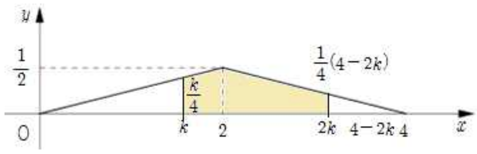


$y'=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$이므로 접선의 방정식은 $y=\frac{e}{3}x$

$S=\int_0^3\left(e^{\frac{x}{3}}-\frac{e}{3}x\right)dx=\left[3e^{\frac{x}{3}}-\frac{e}{6}x^2\right]_0^3=\frac{3}{2}e-3$

11) ③

아래 그림에서



$\mathrm{P}(k\le X\le 2k)=1-\frac{1}{8}k^2-\frac{1}{8}(4-2k)^2$

$=-\frac{5}{8}k^2+2k-1=-\frac{5}{8}\left(k-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{3}{5}$

따라서 $k=\frac{8}{5}$일 때 최댓값 $\frac{3}{5}$를 갖는다.

12) ②

$xf(x)=x^2e^{-x}+\int_1^x f(t)dt$ 에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=e^{-1}$

x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}+f(x)$

$f'(x)=2e^{-x}-xe^{-x}$

$f(x)=\int(2e^{-x}-xe^{-x})dx=-2e^{-x}+xe^{-x}-\int e^{-x}dx$

$=-2e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}+C=(x-1)e^{-1}+C$

$f(1)=e^{-1}$이므로 $C=e^{-1}$, $f(x)=(x-1)e^{-x}+e^{-1}$

$\therefore\ f(2)=e^{-2}+e^{-1}=\frac{e+1}{e^2}$

13) ⑤

$y=\log_3 9x=2+\log_3 x$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=2$

따라서 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(a+2,\ b)$이고, $b=\log_3 9a=\log_3(a+2)$

이것을 풀면 $3^b=9a=a+2$, $a=\frac{1}{4}$, $3^b=\frac{9}{4}$

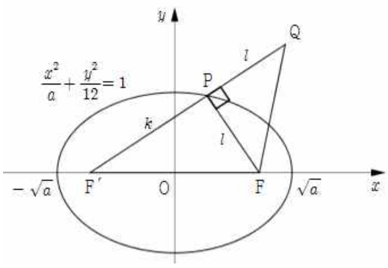
$\therefore\ a+3^b=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$

14) ②

$\frac{g(x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}\times\sin x$인데, 여기서 $\sin x$는 진동발산한다.

$x\to\infty$ 일 때, $\dfrac{g(x)}{x^2}$ 이 0 으로 수렴하려면 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 이다.
따라서 $f(x)=ax+b$와 같이 일차이하의 다항식이다.
$g(x)=(ax+b)\sin x$에서
$g'(x)=a\sin x+(ax+b)\cos x$
$\dfrac{g'(x)}{x}=a\dfrac{\sin x}{x}+\left(a+\dfrac{b}{x}\right)\cos x$
인데, 이것이 $x\to 0$일 때 6으로 수렴하려면
$b=0,\ 2a=6$
$\therefore\ f(x)=3x,\ f(4)=12$

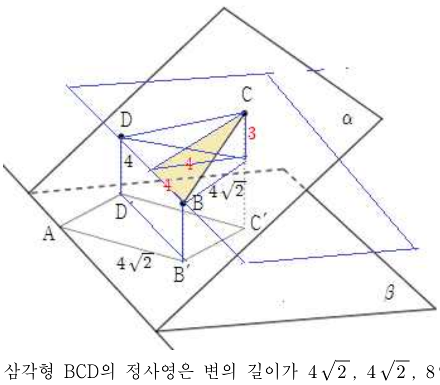
15) ③
아래 그림과 같이 놓으면



$k+l=10=2\sqrt{a}$ 이므로 $a=25$
초점 거리를 $2c$라 하면 $k^2+l^2=4c^2=4(a-12)=52$
$2kl=(k+l)^2-(k^2+l^2)=100-52=48$
P가 제1사분면의 점이므로 $k>l$이다.
이제 $k,\ l$을 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-10x+24=0,\ (x-6)(x-4)=0$
따라서 $k=6,\ l=4$이고 구하려는 넓이는
$\dfrac{1}{2}kl+\dfrac{1}{2}l^2=12+8=20$

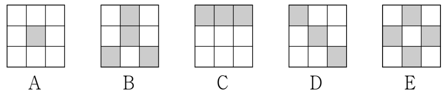
16) ④
세 어린이 A, B, C가 받은 사탕의 개수를 $a,\ b,\ c$라고 하면
$(a,\ b,\ c)=(4,\ 1,\ 1),\ (3,\ 2,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3)$
따라서 구하려는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에서
$\dfrac{6!}{4!}+\dfrac{6!}{3!2!}+\dfrac{6!}{3!2!}+\dfrac{6!}{2!3!}=30+60+60+60=210$

17) ④
아래 그림과 같이 평면 β를 평행이동하여 $\overline{\mathrm{BD}}$를 지나도록 하면



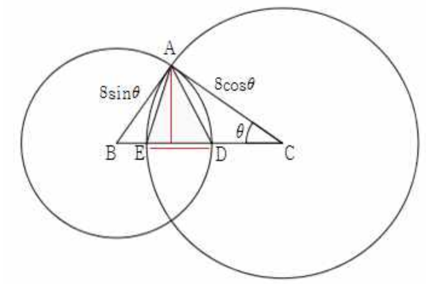
삼각형 BCD의 정사영은 변의 길이가 $4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 8$인 직각이등변삼각형이다.
이등변삼각형의 성질과 삼수선의 정리에서
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

18) ①
A와 E는 회전하면 모두 일치하고, - 1가지
B와 C는 회전하면 모두 놓인 모양이 다르고, - 4가지
D는 회전하여 다른 경우는 2가지이다. - 2가지



(i) 중앙에 A 또는 E 를 붙인 경우
나머지 4개는 원순열에 의하여 3! 인데,
각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면 $1\times2\times4\times4=32$
그러므로 $2\times3!\times32=384$
(ii) 중앙에 B 또는 C 를 붙인 경우
네 방향이 모두 상대적으로 다른 모양이므로
나머지 4개를 놓는 경우의 수는 4!
각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면 $1\times1\times2\times4=8$
그러므로 $2\times4!\times8=384$
(iii) 중앙에 D 를 붙인 경우
나머지 4개는 회전하여 일치하는 경우가 2방향이므로 $\dfrac{4!}{2}=12$
각각의 경우 회전하여 다른 경우의 수를 따지면 $1\times1\times4\times4=16$
그러므로 $12\times16=192$
따라서 (i)(ii)(iii)에 의하여
서로 다른 문양의 개수는 $384+384+192=960$
(가)$=a=24$, (나)$=b=12$, (다)$=c=16$
$\therefore\ a+b+c=24+12+16=52$

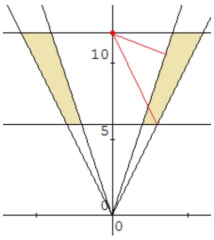
19) ⑤
직각삼각형의 삼각비에서



$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BD}}=8\sin\theta,\ \overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CE}}=8\cos\theta$
$\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CE}}-8=8(\sin\theta+\cos\theta-1)$
그리고 삼각형의 높이는 $h=8\sin\theta\cos\theta$ 이다.
따라서 $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{ED}}\times h=32\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta-1)$
$\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}=32\times\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\times\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}+\dfrac{\cos\theta-1}{\theta}\right)$
여기서 $\lim_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1,\ \lim_{\theta\to0}\dfrac{\cos\theta-1}{\theta}=0,\ \lim_{\theta\to0}\cos\theta=1$ 이므로
$\lim_{\theta\to0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}=32$

20) ④
점 Q의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(0,\ 12)\cdot(x,\ y-t)=12(y-t)=0,\ y=t$
$\dfrac{t}{3}\le\sqrt{x^2+(y-t)^2}\le\dfrac{t}{2}$
따라서 $y=t,\ \dfrac{t}{3}\le|x|\le\dfrac{t}{2},\ 6\le t\le12$
즉 $2|x|\le y\le3|x|,\ 6\le y\le12$
이것을 좌표평면에 나타내면 아래그림과 같다.
따라서 구하려는 최솟값은 A$(0,\ 12)$에서 직선 $y=3x$에 이르는 거리
$m=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$
최댓값은 A$(0,\ 12)$에서 Q$(3,\ 6)$의 거리 $M=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ Mm=\dfrac{12}{\sqrt{10}}\times 3\sqrt{5}=18\sqrt{2}$



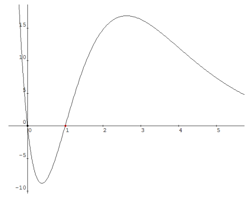
21) ②

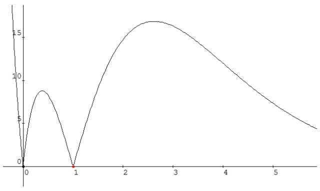
$y=(x^2-x)e^{4-x}=x(x-1)e^{4-x}$

$y'=(2x-1)e^{4-x}-(x^2-x)e^{4-x}=(-x^2+3x-1)e^{4-x}$

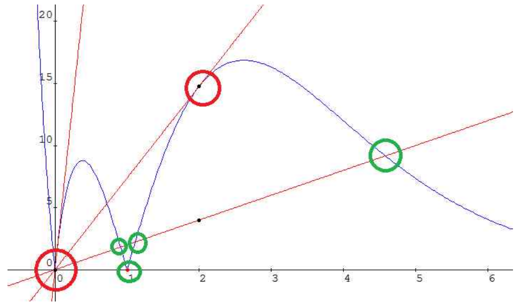
$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)e^{4-x}=0$ 이다. 이것으로 부터

$y=(x^2-x)e^{4-x}$, $f(x)=|x^2-x|e^{4-x}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





이제 $y=kx\,(k>0)$와 $y=f(x)$에서 $g(x)$를 살펴보면
아래 그림과 같이 $y=kx$가 $y=f(x)$의 접선인 경우를 기준으로
동그라미에서 미분가능하지 않은 경우가 생긴다.



ㄱ. $k=2$ 이면 $f(2)=2e^2>4$이므로 $g(2)=4$

ㄴ. $y=kx$가 $x=2$에서 $y=f(x)$의 접선보다 아래쪽이면
$h(k)$는 최댓값 4 를 갖는다.

ㄷ. 원점에서 접선을 구하여 보면
접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 두면

$y=(-t^2+3t-1)e^{4-t}(x-t)+(t^2-t)e^{4-t}$

$0=(t^3-3t^2+t)e^{4-t}+(t^2-t)e^{4-t}$

$t^3-2t^2=0$, $t=0$ 또는 $t=2$

$t=2$에서 접선의 기울기는 $k=e^2$

$t=0$에서는 $y=-f(x)$의 접선의 기울기는 $k=e^4$

따라서 $e^2\le k<e^4$, $k>e^4$ 일 때 $h(k)=2$이다.

22) 135

상수항은 ${}_6C_2(3x^2)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^4=3^2\times{}_6C_2=135$

23) 19

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5\ln x}{x-1}=-14+a$, $5=-14+a$,

$\therefore\ a=19$

24) 11

음함수의 미분법에서

$2x+3y^2\dfrac{dy}{dx}-2y-2x\dfrac{dy}{dx}+9=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-2y+9}{2x-3y^2}=\dfrac{2\times2-2\times1+9}{2\times2-3\times1}=11$

25) 88

$\overline{X}$는 $\mathrm{N}\left(85,\ \dfrac{9}{4}\right)$를 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge k)=0.0228=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$\dfrac{k-85}{\dfrac{3}{2}}=2$,

$\therefore\ k=85+3=88$

26) 9

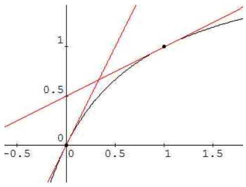
$f(x)=\dfrac{2x}{x+1}=2-\dfrac{2}{x+1}$,

$f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

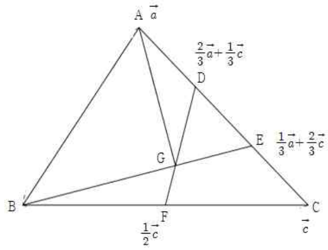
$f'(0)=2$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$\tan\theta=\dfrac{2-\dfrac{1}{2}}{1+2\times\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}$,

$\therefore\ 12\tan\theta=9$



27) 37



그림과 같이
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$라 놓으면

$\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$, $\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$,

$\overrightarrow{BG}$는 실수 t, s에 대하여

$\dfrac{t}{3}\vec{a}+\dfrac{2t}{3}\vec{c}=s\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)+(1-s)\left(\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

$\dfrac{t}{3}=\dfrac{2s}{3}$, $\dfrac{2t}{3}=\dfrac{s}{3}+\dfrac{1-s}{2}$,

$t=\dfrac{2}{3}$, $s=\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=-\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{c}$

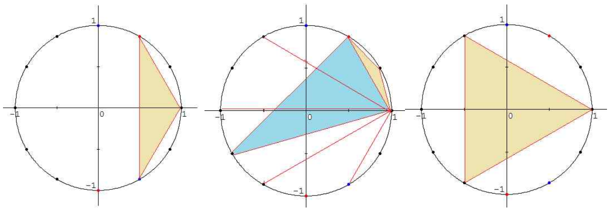
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}&=\left(-\frac{7}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{27}(-7\vec{a}+4\vec{c})(\vec{a}+2\vec{c})\\&=\frac{1}{27}\{-7|\vec{a}|^2+8|\vec{c}|^2-10(\vec{a}\cdot\vec{c})\}\\&=\frac{1}{27}\{-63+128-10(\vec{a}\cdot\vec{c})\}=0\end{aligned}$$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{13}{2}$, $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=\frac{\frac{13}{2}}{3\times4}=\frac{13}{24}=\frac{q}{p}$

$\therefore\ p+q=37$

28) 68

A, B, C는 그림과 같이 단위원을 12등분하는 점이다.



이등변삼각형인 경우는

(i) $\overline{AB}=\overline{AC}$인 경우 5가지

(ii) A가 이등변삼각형의 밑변의 꼭짓점인 경우 10가지

(iii) 정삼각형은 1가지인데 (i), (ii) 에서 3번 중복

따라서 이등변삼각형은 $5+10-2=13$ 이고,

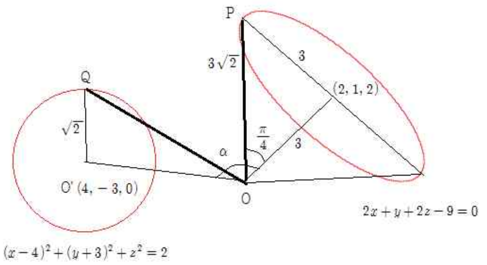
모든 경우의 수는 ${}_{11}C_2=55$ 이다.

$\therefore\ \frac{q}{p}=\frac{13}{55}$, $p+q=13+55=68$

29) 21

O에서 평면 $2x+y+2z-9=0$에 내린 수선의 발은 $(2,1,2)$, 거리는 3

따라서 P는 그림과 같은 원뿔은 밑면인 원 위의 점



그림에서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})$ 인데.

여기가 벡터 $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'Q}$의 크기는 각각 5, $\sqrt{2}$으로 일정하다.

그리고 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{O'Q}$가 이루는 각은 모든 방향이 다 가능하므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{O'Q}$ 는 $|\overrightarrow{OP}|=3\sqrt{2}$일 때 최댓값 6을 갖는다.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OO'}$는 $|\overrightarrow{OP}|=3\sqrt{2}$이고 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OO'}$가 이루는 각의 크기가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉 이 각의 크기는 $\vec{v}=(2,1,2)$와 $\overrightarrow{OO'}=(4,-3,0)$이 이루는 각의 크기를 α라 할 때, $\alpha-\frac{\pi}{4}$가 최소이다.

이때 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OO'}$의 최댓값은 $3\sqrt{2}\times5\times\frac{4+\sqrt{2}}{6}=5+10\sqrt{2}$

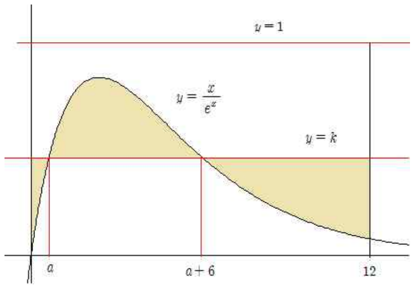
그러므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})$ 의 최댓값은

$(5+10\sqrt{2})+6=11+10\sqrt{2}$

$\therefore\ a+b=11+10=21$

30) 18

$g(t)$는 그림과 같이 색칠한 영역의 넓이이다.



$f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$, $f'(x)=(1-x)e^{-x}$ 이므로

극댓값(최댓값)은 $f(1)=\frac{1}{e}<1$이므로

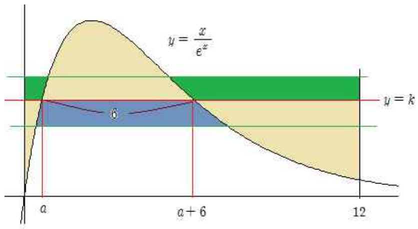
ㄱ) $t>\frac{1}{e}$이면

$g(t)=\int_0^{12}(t-f(x))dx=12t-\int_0^{12}f(x)dx$ 이므로

$g'(1)=12$

ㄴ) $\frac{12}{e^{12}}\le t\le\frac{1}{e}$일 때

$f(x)=t$는 두 실근 a, b $(a<b)$를 갖는다.



$$g(t)=\int_0^a(t-f(x))dx+\int_a^b(f(x)-t)dx+\int_b^{12}(t-f(x))dx$$
$$=\int_0^{12}(t-f(x))dx+2\int_a^b(f(x)-t)dx$$
$$=t\int_0^{12}dx-\int_0^{12}f(x)dx+2\int_a^b f(x)dx-2t\int_a^b dx$$

$g'(t)=12-0+2(f(b(t))\times b'(t)-f(a(t))\times a'(t))$
$\quad -2(b(t)-a(t))-2t(b'(t)-a'(t))$
$\quad =12-2(b-a)$

$g'(k)=12-2(b-a)=0$

$\therefore b-a=6$, $b=a+6$

따라서 $f(a)=f(a+6)$이므로

$\frac{a}{e^a}=\frac{a+6}{e^{a+6}}$, 즉 $\frac{a+6}{a}=e^6$

즉 $\ln\left(\frac{6}{a}+1\right)=\ln e^6=6$ 이다.

ㄱ), ㄴ)에서

$\therefore\ g'(1)+\ln\left(\frac{6}{a}+1\right)=12+6=18$