제 2 교시

수학 영역(나 형)

1. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$에 대하여 집합 $A^C \cap B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n+3^n}{4^{n+1}-2\times3^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=6$$

일 때, $f'(1)$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

4. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

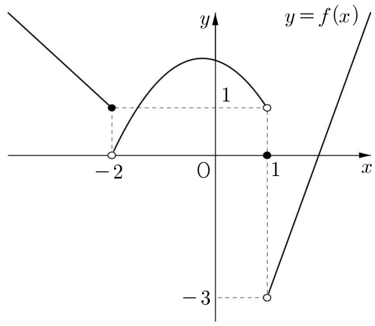
5. 곡선 $y=x^3-4x$ 위의 점 $(-2, 0)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. 함수 $f(x)=\dfrac{bx+1}{x+a}$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 $ab\neq 1$인 상수이다.) [3점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)+\lim\limits_{x\to -2-} f(x)$의 값은? [3점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

8. $\log 6=a$, $\log 15=b$라 할 때, 다음 중 $\log 2$를 a, b로 나타낸 것은? [3점]

① $\dfrac{2a-2b+1}{3}$ ② $\dfrac{2a-b+1}{3}$ ③ $\dfrac{a+b-1}{3}$

④ $\dfrac{a-b+1}{2}$ ⑤ $\dfrac{a+2b-1}{2}$

9. 빨간 공 3개, 파란 공 2개, 노란 공 2개가 있다. 이 7개의 공을 모두 일렬로 나열할 때, 빨간 공끼리는 어느 것도 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

10. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+7}-a}{x-2} & (x\neq 2)\\ b & (x=2)\end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

11. 집합 $X=\{2,4,6,8\}$에서 X로의 일대일 대응 $f(x)$가

$$f(6)-f(4)=f(2),\ f(6)+f(4)=f(8)$$

을 모두 만족시킬 때, $(f\circ f)(6)+f^{-1}(4)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

12. 점 $(-2, 2)$를 지나는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 그래프가 점 $(-8, 5)$를 지날 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

13. 다음 표는 어느 고등학교의 수학 점수에 대한 성취도의 기준을 나타낸 것이다.

성취도	A	B	C	D	E
수학점수	89 점 이상	79 점 이상 ~ 89 점 미만	67 점 이상 ~ 79 점 미만	54 점 이상 ~ 67 점 미만	54 점 미만

예를 들어, 어떤 학생의 수학 점수가 89 점 이상이면 성취도는 A 이고, 79 점 이상이고 89 점 미만이면 성취도는 B 이다.

이 학교 학생들의 수학 점수는 평균이 67 점, 표준편차가 12 점인 정규분포를 따른다고 할 때, 이 학교의 학생 중에서 수학 점수에 대한 성취도가 A 또는 B 인 학생의 비율을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.1915 ⑤ 0.3085

14. 원점에서 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$$f(t) = t^2 + t,\ g(t) = 5t$$

이다. 두 점 P, Q 가 출발 후 처음으로 만날 때까지 점 P 가 움직인 거리는? [4점]

① 82 ② 84 ③ 86 ④ 88 ⑤ 90

15. 함수 $f(x) = 4x^2 + ax$ 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kf\left(\frac{k}{2n}\right) = 2$$

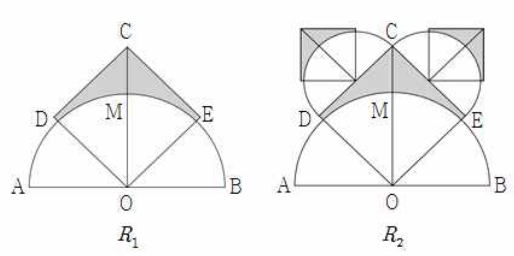
가 성립하도록 하는 상수 a 의 값은? [4점]

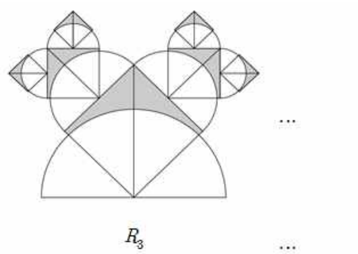
① $\frac{19}{2}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{41}{4}$ ⑤ $\frac{21}{2}$

16. 전체집합 $U = \{x \mid x$ 는 7 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여
$A \cap X \ne \varnothing$, $B \cap X \ne \varnothing$ 을 모두 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수는? [4점]

① 102 ② 104 ③ 106 ④ 108 ⑤ 110

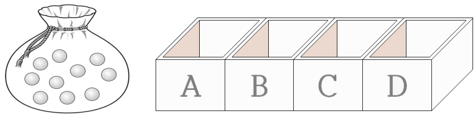
17. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 이 반원의 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 선분 OM을 3:1로 외분하는 점을 C라 하자. 선분 OC를 대각선으로 하는 정사각형 CDOE를 그리고, 정사각형의 내부와 반원의 외부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 두 선분 CD, CE를 각각 지름으로 하는 두 반원을 정사각형 CDOE의 외부에 그리고, 각각의 두 반원에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





① $\frac{36-8\pi}{5}$ ② $\frac{58-12\pi}{7}$ ③ $\frac{72-16\pi}{7}$
④ $\frac{83-18\pi}{8}$ ⑤ $\frac{91-20\pi}{8}$

18. 그림과 같이 10개의 공이 들어 있는 주머니와 일렬로 나열된 네 상자 A, B, C, D가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내어 이웃한 두 상자에 각각 한 개씩 넣는 시행을 5회 반복할 때, 네 상자 A, B, C, D에 들어 있는 공의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자. a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? (단, 상자에 넣은 공은 다시 꺼내지 않는다.)[4점]



① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

19. 1부터 $(2n-1)$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(2n-1)$장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 택할 때, 택한 3장의 카드 중 짝수가 적힌 카드의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, n은 4 이상의 자연수이다.)

> 정수 $k\,(0 \le k \le 3)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 짝수가 적혀 있는 카드 중에서 k장의 카드를 택하고, 홀수가 적혀 있는 카드 중에서 $\left(\boxed{(가)}-k\right)$장의 카드를 택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=0)=\frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=2)=\boxed{(나)}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=3)=\frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{3}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\frac{\boxed{(다)}}{2n-1}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $a\times f(5)\times g(8)$의 값은? [4점]

① 22 ② $\frac{45}{2}$ ③ 23 ④ $\frac{47}{2}$ ⑤ 24

20. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

> (가) $f(2)=f'(2)=0$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge -3$이다.

① 128 ② 144 ③ 160 ④ 176 ⑤ 192

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2+\frac{1}{n}$이라 하고 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)f(x) & (x \geq 1) \\ (x-1)^2 f(x) & (x<1)\end{cases}$$

이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} \frac{g(x)}{x-1}=0$

ㄴ. $n=1$일 때, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수가 1인 n의 개수는 5이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(300, \frac{2}{5}\right)$를 따를 때, $\mathrm{V}(X)$의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=14$, $a_4+a_5=23$일 때, $a_7+a_8+a_9$의 값을 구하시오. [3점]

24. 곡선 $y = x^3$과 y축 및 직선 $y = 8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

25. $\left(x^n + \frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 상수항이 45일 때, 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

26. 실수 x에 대한 두 조건

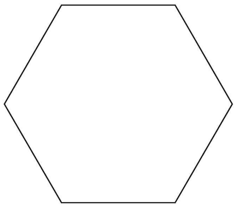
$$p : -3 \le x < 5, \quad q : k-2 < x \le k+3$$

에 대하여 명제

'어떤 실수 x에 대하여 p이고 q이다.'

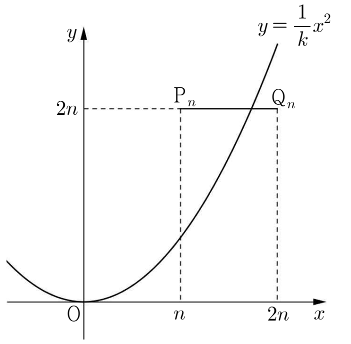
가 참이 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [4점]

27. 한 변의 길이가 1인 정육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 점을 택하여 이 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 이 삼각형의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이상일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(6)=3$이다. $f(n)=8$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오. [4점]

29. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 2n)$, $\mathrm{Q}_n(2n,\ 2n)$이 있다. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$과 곡선 $y=\frac{1}{k}x^2$이 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 값을 구하시오. [4점]



30. $a \le 35$인 자연수 a와 함수 $f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+4$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)-a|$$

라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b\,(b>0)$이 서로 다른 4개의 점에서 만난다.
> (나) 함수 $|g(x)-b|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 4이다.

두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2018학년도 사관학교 1차시험 [나형] 해설

1	⑤	*2*	②	*3*	②	*4*	③	*5*	⑤
6	③	*7*	②	*8*	④	*9*	④	*10*	①
11	①	*12*	④	*13*	③	*14*	⑤	*15*	⑤
16	④	*17*	③	*18*	①	*19*	②	*20*	①
21	②	*22*	72	*23*	24	*24*	12	*25*	4
26	13	*27*	17	*28*	64	*29*	191	*30*	36

1) ⑤

$A^C \cap B = B - A = \{3,5\}$,

$\therefore\ 3+5=8$

2) ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 4^n+3^n}{4^{n+1}-2\times 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4-2\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{3}{4}$$

3) ②

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3}{2}f'(1)=6,$$

$\therefore\ f'(1)=4$

4) ③

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B^c)=\frac{3}{5}$, $\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$

5) ⑤

$f'(x)=3x^2-4$, $\therefore\ f'(-2)=12-4=8$

6) ③

$y=f(x)$는 점근선의 교점인 $(-a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

역함수 $y=f^{-1}(x)$는 $(b,\ -a)$에 대하여 대칭이므로

$\therefore\ a+b=(-1)+(2)=1$

7) ②

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to -2-}f(x)=(-3)+(1)=-2$

8) ④

$2=\frac{60}{30}=\frac{6\times 10}{15\times 2}$ 이므로

$\log 2=\log 10+\log 6-\log 15-\log 2=1+a-b-\log 2$

$\therefore\ \log 2=\frac{a-b+1}{2}$

9) ④

파란 공 2개와 노란 공 2개를 먼저 나열한 후

양 끝과 사이 5곳 중 3곳을 택하여 빨간 공을 배치한다.

$\therefore\ \frac{4!}{2!2!}\times {}_5\mathrm{C}_3=60$

10) ①

$f(2)=\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)$ 이므로 $b=\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-a}{x-2}$

분모가 0 으로 수렴하므로 분자도 0 으로 수렴한다.

따라서 $a=3$이고

$$b=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{6},$$

$\therefore\ ab=\frac{1}{2}$

11) ①

$f(6)-f(4)=f(2)$ 에서 $f(6)>f(4)$, $f(6)>f(2)$

$f(6)+f(4)=f(8)$ 에서 $f(8)>f(6)$, $f(8)>f(4)$

따라서 $f(8)=8$, $f(6)=6$, $f(4)=2$, $f(2)=4$

$\therefore\ (f\circ f)(6)+f^{-1}(4)=6+2=8$

12) ④

점 $(-2,\ 2)$에서 $2=\sqrt{-2a}$ 이므로 $a=-2$

이제 그래프를 이동하면 $-y=\sqrt{-2x}+b$ 인데,

점 $(-8,5)$를 지나므로 $-5=\sqrt{16}+b$, $b=-9$

$\therefore\ ab=18$

13) ③

수학점수를 확률변수 X라 하면 X는 $\mathrm{N}(67,\ 12^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 79)=\mathrm{P}(Z\ge 1)=0.5-0.3413=0.1587$

14) ⑤

t초 후 두 점의 위치는 각각 $\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$, $\frac{5}{2}t^2$

위치가 같으므로 $\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2=\frac{5}{2}t^2$

이것을 풀면 $t=6$이다.

$t>0$일 때 각각의 점의 속도는 양수이므로, 점의 위치가 곧 움직인 거리이다.

$\therefore\ \frac{5}{2}\times 6^3=90$

15) ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kf\left(\frac{k}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{2n}\right)$$
$$=\int_0^1 xf\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^1 x\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(x^3+\frac{a}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{6}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{a}{6}=2,$$

$\therefore\ a=\frac{21}{2}$

16) ④

주어진 조건의 부정은 $A\cap X=\varnothing$ 이거나 $B\cap X=\varnothing$ 이므로

i) $A\cap X=\varnothing$ 인 경우는 $2^4=16$ 가지

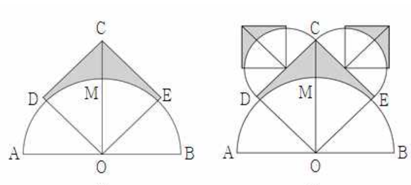
ii) $B\cap X=\varnothing$ 인 경우는 $2^3=8$ 가지이고

iii) $(A\cup B)\cap X=\varnothing$ 인 경우는 $2^2=4$가지인데, i), ii)에 중복되어 있다.

U의 모든 부분집합은 $2^7=128$ 개에서 위의 경우를 뺀다.

$\therefore\ 128-(16+8-4)=108$

17) ③



R_1 R_2

$\overline{\mathrm{OC}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, 즉 정사각형 OEDC 의 넓이는 $\dfrac{9}{2}$이고,

사분원의 넓이는 π이므로, $S_1=\dfrac{9}{2}-\pi$이다.

그리고 두번째 축소된 모양은 지름의 길이가 4에서 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$인 반원이므로

줄어든 닮음비는 $\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$, 넓이의 비는 닮음비의 제곱이고, 2개 생긴다.

따라서 공비는 $2\times\left(\dfrac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{9}{16}$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}-\pi}{1-\frac{9}{16}}=\frac{72-16\pi}{7}$$

18) ①

5회의 시행중 (A,B), (B,C), (C,D) 에 넣은 경우를 각각 x, y, z라고 하면
$a=x$, $b=x+y$, $c=y+z$, $d=z$ 이다.
그리고 $x+y+z=5$ 이므로
${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

19) ②

정수 $k\,(0\le k\le 3)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은
짝수 $n-1$개 중에서 k장의 카드를 택하고,
홀수 n개 중에서 $(3-k)$장의 카드를 택하는
경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_n\mathrm{C}_2\times{}_{n-1}\mathrm{C}_1}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_{n-1}\mathrm{C}_2}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_3}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_3}=\frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=0}^{3}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\frac{3n(n-1)+6n(n-2)+3(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}\\&=\frac{3(n-1)}{2n-1}\end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $f(n)=\dfrac{3n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$, $g(n)=3(n-1)$

$\therefore\ af(5)g(8)=3\times\dfrac{5}{14}\times 21=\dfrac{45}{2}$

20) ①

(가)로부터

$f(x)=(x-2)^2(x-c)=x^3-(4+c)x^2+(4+4c)x-4c$

(나)에서

$f'(x)=3x^2-2(4+c)x+(4+4c)\ge -3$

$3x^2-2(4+c)x+(7+4c)\ge 0$

$D/4=(4+c)^2-3(7+4c)=c^2-4c-5$

$\quad=(c-5)(c+1)\le 0,\ -1\le c\le 5$

$f(6)=16(6-c)$의 최대와 최소는 각각 $c=-1$, $c=5$일 때 이므로
$16(6+1)+16(6-5)=128$

21) ②

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}(x-1)f(x)=0$

ㄴ. $n=1$ 이면 $f(x)=x^2+1$이므로

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)(x^2+1) & (x\ge 1)\\(x-1)^2(x^2+1) & (x<1)\end{cases}$$

인데, $g(x)\ge 0=g(1)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $x>1$에서는 $g(x)=(x-1)\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right)$은 증가함수이므로 극점은 없다.

$x<1$ 일 때는 $g(x)=(x-1)^2\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right)$ 에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=2(x-1)\left(x^2+\frac{1}{n}\right)+2x(x-1)^2\\&=2(x-1)\left(2x^2-x+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$x<1$인 모든 x에 대하여 $2x^2-x+\dfrac{1}{n}\ge 0$이면 극점은 없다.

$2x^2-x+\dfrac{1}{n}=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{8}\ge 0$

따라서 $n\le 8$이므로, 함수 $g(x)$의 극점이 $x=1$일 때 한 개뿐인 경우
자연수 n의 개수는 8이다.

22) 72

$\mathrm{V}(X)=npq=300\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=72$

23) 24

공차를 d라고 하면

$a_4+a_5=(a_2+2d)+(a_2+3d)=14+2d+14+3d$

$\qquad=28+5d=23,\ d=-1$

따라서 $a_8=a_2+6d=14-6=8$

$\therefore\ a_7+a_8+a_{10}=3a_8=24$

24) 12

직사각형의 넓이에서 $\displaystyle\int_0^2 x^3dx$를 뺀다

$\therefore\ 16-\displaystyle\int_0^2 x^3dx=16-4=12$

25) 4

$\left(x^n+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ 의 전개식의 일반항은 ${}_{10}\mathrm{C}_r(x^n)^r\left(\dfrac{1}{x}\right)^{10-r}={}_{10}\mathrm{C}_r x^{nr+r-10}$

그리고 ${}_{10}\mathrm{C}_2={}_{10}\mathrm{C}_8=45$이므로

$r=8$이라고 하면 $8n+8-10=0$, $r=\dfrac{1}{4}$이므로 안됨

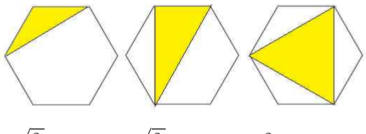
$r=2$이면 $2n+2-10=0$ 에서 $n=4$이다.

26) 13

주어진 명제가 참이라고 하면 $P\cap Q\ne\varnothing$이다.
따라서 구간의 경계점을 비교하면
$-3\le k+3,\ k-2<5$
즉, $-6\le k<7$이므로 정수 k의 개수는 13이다.

27) 17

삼각형의 모양은 그림과 같은 세 종류이고, 그 넓이와 경우의 수는 다음과 같다.



$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 6개 $\quad\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 12개 $\quad\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$, 2개

따라서 구하려는 확률은 $\dfrac{12+2}{20}=\dfrac{7}{10}$이므로

$p+q=17$이다.

28) 64

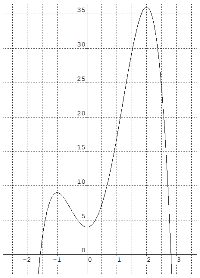
$n^{\frac{4}{k}}$의 값이 자연수인 경우의 예로 $n=6$이라고 하면

$6^{\frac{4}{k}}$에서 $k=1,\ 2,\ 4$ 인 3가지이므로 $f(6)$이다.
이것으로 부터 생각하기를 n이 거듭제곱수인 경우를 관찰해 보자.

n이 소수 m의 완전제곱수이면 $(m^2)^{\frac{4}{k}}=m^{\frac{8}{k}}$ 에서
k는 8의 양의 약수인 1, 2, 4, 8 일 때이고 $f(n)=4$ 이다.
이것을 차례로 적용해 보면
n이 세제곱수이면 $4\times3=12=2^2\times3$의 양의 약수의 개수 6
n이 네제곱수이면 $4\times4=16=2^4$의 양의 약수의 개수 5
n이 5제곱수이면 $4\times5=20=2^2\times5$의 양의 약수의 개수 6
n이 6제곱수이면 $4\times6=24=2^3\times3$의 양의 약수의 개수 8
따라서 $f(n)=8$을 만족시키는 n의 최솟값은 $2^6=64$이다.

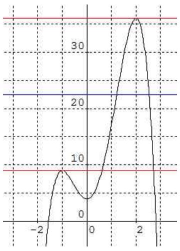
29) 191
선분과 곡선의 위치관계로부터
$\frac{1}{k}n^2\le 2n\le\frac{1}{k}4n^2,\ \frac{n}{2}\le k\le 2n$
i) $n=2m-1$ (홀수)이면
$m\le k\le 4m-2,\ a_n=a_{2m-1}=3m-1$
ii) $n=2m$ (짝수)이면
$m\le k\le 4m,\ a_n=a_{2m}=3m+1$
그러므로
$$\sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{m=1}^{8}(3m-1)+\sum_{m=1}^{7}(3m+1)=100+91=191$$

30) 36
$f(x)=-3x^4+4x^3+12x+4$ 에서
$f'(x)=-12x^3+12x^2+12=-12x(x+1)(x-2)$
도함수의 부호와 함수의 증감으로부터 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

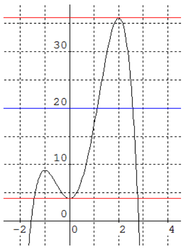


이제 $g(x)=|f(x)-a|$, $y=f(x)$의 그래프를 $y=a$에서 접어 올린다음 $y=a$를 x축으로 본 그래프와 같다.
이때 $y=a$와 $y=f(x)$의 교점이 $y=f(x)$의 극점이 아니면 접힌 점은 모두 꺾이게 되어 미분가능하지 않다.
마찬가지로, $y=g(x)$에서 $y=b$에서 접어 올린다음 $y=b$를 x축으로 본 그래프가 $y=|g(x)-b|$인데, 것은 $y=f(x)$의 그래프를 $y=a,\ y=a+b,$ $y=a-b$ 라는 3곳에서 접은 것과 같다.
따라서 (가)에서 $y=a+b,\ y=a-b$와 $y=f(x)$는 교점이 4개이고,
(나)에서 $y=a,\ y=a+b,\ y=a-b$와 $y=f(x)$의 교점 중 4곳만 꺾어져서 미분가능하지 않은 점이라야 하고, 다른 점은 $y=f(x)$의 극점이다.
위의 결과를 다 만족하는 경우는 다음과 같은 두 가지이다.

ㄱ)



ㄴ)



ㄱ)
$a+b=36,\ a-b=9$
$a=\frac{45}{2}$ ($\neq$ 자연수)
$b=\frac{27}{2}$
$\therefore$ 성립안함

ㄴ)
$a+b=36,\ a-b=4$
$a=20$ (자연수)
$b=16$
$\therefore$ 성립함

ㄴ)에서 $a+b=36$