제 2 교시

수학 영역(가 형)

1. 두 벡터 $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(-1,k)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, k의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

2. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{V}(4X)$의 값은? [2점]

① 50 ② 75 ③ 100 ④ 125 ⑤ 150

3. 함수 $f(x)=x^2e^{x-1}$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\ln 3}{2}$ ③ $\ln 2$ ④ $\ln 3$ ⑤ $2\ln 2$

5. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,2,-1)$, $\mathrm{B}(3,1,-2)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는? [3점]

① $(5,0,-3)$ ② $(5,3,-4)$ ③ $(4,0,-3)$
④ $(4,3,-3)$ ⑤ $(3,0,-4)$

6. 함수 $f(x)=a\sin bx+c$ $(a>0,\ b>0)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -2이다. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 양수 p의 최솟값이 π일 때, abc의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

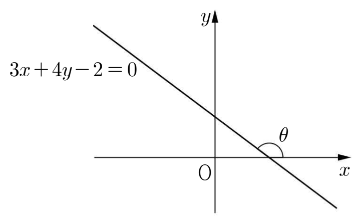
7. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt = e^{x-1}+ax^2-3x+1$$

을 만족시킬 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

8. 그림과 같이 직선 $3x+4y-2=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

9. 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}=4$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-3}$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

10. 상자 A에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있고, 상자 B에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있다. 한 개의 동전을 던져 앞면이 나오면 상자 A를, 뒷면이 나오면 상자 B를 택하고, 택한 상자에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내기로 한다. 이 시행을 한 번 하여 꺼낸 공의 색깔이 서로 같았을 때, 상자 A를 택하였을 확률은? [3점]

① $\frac{11}{29}$ ② $\frac{12}{29}$ ③ $\frac{13}{29}$ ④ $\frac{14}{29}$ ⑤ $\frac{15}{29}$

11. 다음 표는 어느 고등학교의 수학 점수에 대한 성취도의 기준을 나타낸 것이다.

성취도	A	B	C	D	E
수학점수	89점 이상	79점 이상 ~ 89점 미만	67점 이상 ~ 79점 미만	54점 이상 ~ 67점 미만	54점 미만

예를 들어, 어떤 학생의 수학 점수가 89점 이상이면 성취도는 A이고, 79점 이상이고 89점 미만이면 성취도는 B이다.
이 학교 학생들의 수학 점수는 평균이 67점, 표준편차가 12점인 정규분포를 따른다고 할 때, 이 학교의 학생 중에서 수학 점수에 대한 성취도가 A 또는 B인 학생의 비율을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

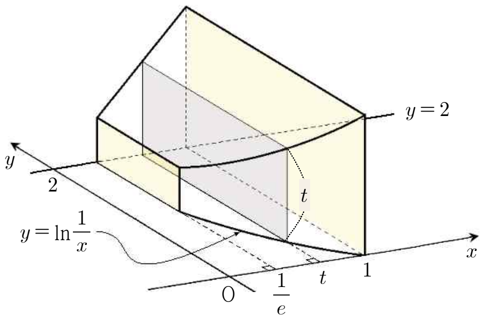
z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.1915 ⑤ 0.3085

12. 좌표공간에서 점 $(0,\ a,\ b)$를 지나고 평면 $x+3y-z=0$에 수직인 직선이 구 $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=1$과 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

13. 그림과 같이 곡선 $y=\ln\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e}\le x\le 1\right)$과 직선 $x=\frac{1}{e}$, 직선 $x=1$ 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축 위의 $x=t\left(\frac{1}{e}\le t\le 1\right)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 한 변의 길이가 t인 직사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{1}{2}-\frac{1}{3e^2}$ ② $\frac{1}{2}-\frac{1}{4e^2}$ ③ $\frac{3}{4}-\frac{1}{3e^2}$
④ $\frac{3}{4}-\frac{1}{4e^2}$ ⑤ $\frac{3}{4}-\frac{1}{5e^2}$

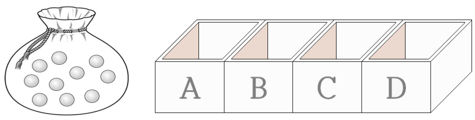
14. 집합 $S=\{a, b, c, d\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 한 개씩 두 개의 부분집합을 차례로 택한다. 첫 번째로 택한 집합을 A, 두 번째로 택한 집합을 B라 할 때, $n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$가 성립할 확률은? (단, 한 번 택한 집합은 다시 택하지 않는다.) [4점]

① $\frac{2}{35}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{4}{35}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{6}{35}$

15. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 $\overline{\mathrm{PB}}=4$, $\angle\mathrm{PAB}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이고, 평면 PAB와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 사면체 PHAB의 부피는? [4점]

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

16. 그림과 같이 10개의 공이 들어 있는 주머니와 일렬로 나열된 네 상자 A, B, C, D가 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내어 이웃한 두 상자에 각각 한 개씩 넣는 시행을 5회 반복할 때, 네 상자 A, B, C, D에 들어 있는 공의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자. a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? (단, 상자에 넣은 공은 다시 꺼내지 않는다.) [4점]



① 21　② 22　③ 23　④ 24　⑤ 25

17. 1부터 $(2n-1)$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 $(2n-1)$장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 3장의 카드를 택할 때, 택한 3장의 카드 중 짝수가 적힌 카드의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, n은 4 이상의 자연수이다.)

> 정수 $k\,(0 \le k \le 3)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 짝수가 적혀 있는 카드 중에서 k장의 카드를 택하고, 홀수가 적혀 있는 카드 중에서 $\left(\boxed{\text{(가)}} - k\right)$장의 카드를 택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=0) = \frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=1) = \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=2) = \boxed{\text{(나)}}$$
>
> $$\mathrm{P}(X=3) = \frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{3} \{k \times \mathrm{P}(X=k)\} = \frac{\boxed{\text{(다)}}}{2n-1}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $a \times f(5) \times g(8)$의 값은? [4점]

① 22　② $\frac{45}{2}$　③ 23　④ $\frac{47}{2}$　⑤ 24

18. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_n이라 하자.

> (가) 한 변의 길이가 n이고 네 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이다.
> (나) 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{16} x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

a_3+a_4의 값은? [4점]

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

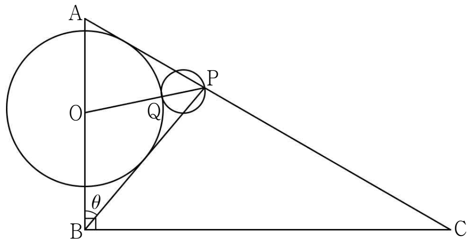
19. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치 $(x,\,y)$가

$$x=t^3+2t,\ y=\ln(t^2+1)$$

이다. 점 P에서 직선 $y=-x$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $t=1$일 때, 점 Q의 속력은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

20. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 CA 위의 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{ABP}=\theta$라 할 때, 선분 AB 위의 점 O를 중심으로 하고 두 선분 AP, BP에 동시에 접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. 이 원과 선분 PO가 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{17-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{18-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{19-5\sqrt{3}}{3}\pi$ ④ $\frac{18-4\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $\frac{19-4\sqrt{3}}{3}\pi$

21. 자연수 n에 대하여 한 개의 주사위를 반복하여 던져서 나오는 눈의 수에 따라 다음과 같은 규칙으로 a_n을 정한다.

> (가) $a_1 = 0$이고, $a_n \ (n \geq 2)$는 세 수 -1, 0, 1 중 하나이다.
> (나) 주사위를 n번째 던져서 나온 눈의 수가 짝수이면 a_{n+1}은 a_n이 아닌 두 수 중에서 작은 수이고, 홀수이면 a_{n+1}은 a_n이 아닌 두 수 중에서 큰 수이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_2 = 1$일 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $a_3 = 1$일 확률과 $a_4 = 0$일 확률은 서로 같다.

ㄷ. $a_9 = 0$일 확률이 p이면 $a_{11} = 0$일 확률은 $\frac{1-p}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

23. 직선 $y = -4x$가 곡선 $y = \frac{1}{x-2} - a$에 접하도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

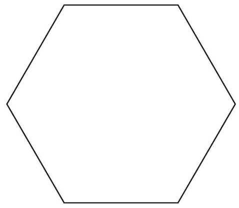
24. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)\,(c>0)$이라 하자. 이 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 점 F′을 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF′이 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원과 직선 PF가 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 둘레의 길이를 구하시오. [3점]

25. 도함수가 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

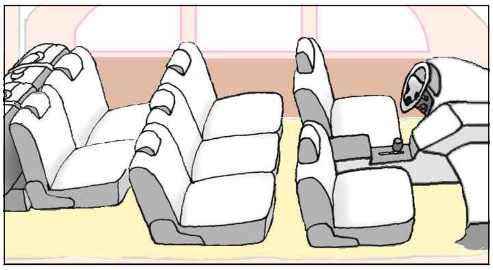
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(\pi)=0$
(다) $\int_0^{\pi} x^2 f'(x)\,dx=-8\pi$

$\int_{-\pi}^{\pi}(x+\cos x)f(x)\,dx=k\pi$일 때, k의 값을 구하시오. [3점]

26. 한 변의 길이가 1인 정육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 임의로 서로 다른 3개의 점을 택하여 이 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 이 삼각형의 넓이를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}\left(X\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

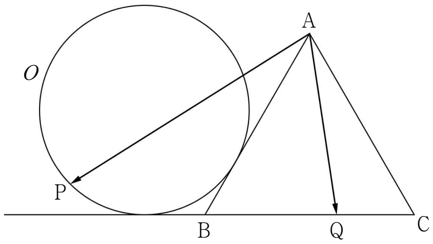


27. 그림과 같이 7개의 좌석이 있는 차량에 앞줄에 2개, 가운데 줄에 3개, 뒷줄에 2개의 좌석이 배열되어 있다. 이 차량에 1학년 생도 2명, 2학년 생도 2명, 3학년 생도 2명이 탑승하려고 한다. 이 7개의 좌석 중 6개의 좌석에 각각 한 명씩 생도 6명이 앉는다고 할 때, 3학년 생도 2명 중 한 명은 운전석에 앉고 1학년 생도 2명은 같은 줄에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



28. 함수 $f(x)=(x^3-a)e^x$과 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=0$) [4점]

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 반지름의 길이가 1이고 선분 AB와 직선 BC에 동시에 접하는 원 O가 있다. 원 O 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이고, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.) [4점]



30. 함수 $f(x)=x^3+ax^2-ax-a$의 역함수가 존재할 때, $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 자연수 n에 대하여 $n\times g'(n)=1$을 만족시키는 실수 a의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{27} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2018학년도 사관학교 1차시험 [가형] 해설

1	④	*2*	⑤	*3*	③	*4*	③	*5*	①
6	①	*7*	⑤	*8*	②	*9*	②	*10*	④
11	③	*12*	⑤	*13*	④	*14*	③	*15*	④
16	①	*17*	②	*18*	①	*19*	②	*20*	⑤
21	③	*22*	80	*23*	16	*24*	36	*25*	8
26	17	*27*	288	*28*	49	*29*	40	*30*	30

1) ④

$\vec{a}=(2,\,1),\ \vec{a}-\vec{b}=(2,1)-(-1,k)=(3,1-k)$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=(2,1)\cdot(3,\,1-k)=6+1-k=0,$

$\therefore\ k=7$

2) ⑤

$\mathrm{V}(4X)=16\mathrm{V}(X)=16npq=16\times 50\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=150$

3) ③

$f'(x)=2xe^{x-1}+x^2e^{x-1},$

$\therefore\ f'(1)=3$

4) ③

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=[-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln 2$

5) ①

$2\mathrm{B}-\mathrm{A}=2(3,1,-2)-(1,2,-1)=(5,0,-3)$

6) ①

최대, 최소에서 $a+c=4,\ -a+c=-2$ 이므로 $a=3,\ c=1$이고

주기에서 $b=2$이다.

$\therefore\ abc=6$

7) ⑤

주어진 등식에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a-3+1$ 이므로 $a=1$

주어진 등식을 변형하여 미분하면

$\displaystyle x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=e^{x-1}+ax^2-3x+1$

$\displaystyle\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=e^{x-1}+2ax-3$

미분하면 $f(x)=e^{x-1}+2a,$

$\therefore\ f(a)=f(1)=3$

8) ②

$\tan\theta=-\dfrac{3}{4},\ \tan\dfrac{\pi}{4}=1$이므로

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=\dfrac{1-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{7}$

9) ②

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{2x}\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}=4$ 에서

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}=1$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x}=4$ 이다.

$\displaystyle\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x}\times\frac{2x}{x-3}=8$

10) ④

한 번의 시행에서 꺼낸 공의 색깔이 같을 사건을 E,

A, B 상자인 사건을 각각 A, B라고 하면

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}+\frac{3}{14}$

$\displaystyle\therefore\ \mathrm{P}(A|E)=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{14}}=\frac{14}{29}$

11) ③

수학점수를 확률변수 X라 하면 X는 $\mathrm{N}(67,\,12^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq 79)=\mathrm{P}(Z\geq 1)=0.5-0.3413=0.1587$

12) ⑤

구의 지름의 길이가 2 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

선분 AB는 구의 중심 $(-1,0,2)$를 지난다.

평면의 법선벡터가 직선 AB의 방향벡터이므로

직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$ 인데,

이것이 점 $(0,a,b)$를 지난다.

따라서 $1=\dfrac{a}{3}=\dfrac{b-2}{-1}$,

$a=3,\ b=1,$

$\therefore\ a+b=4$

13) ④

단면의 넓이는 $S(t)=t(2+\ln t)$ 이므로 부피 V는

$\displaystyle V=\int_{\frac{1}{e}}^1 t(2+\ln t)dt$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}t^2(2+\ln t)\right]_{\frac{1}{e}}^1-\int_{\frac{1}{e}}^1\frac{1}{2}tdt$

$\displaystyle=1-\frac{1}{2e^2}-\left[\frac{1}{4}t^2\right]_{\frac{1}{e}}^1$

$\displaystyle=1-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4e^2}$

$\displaystyle=\frac{3}{4}-\frac{1}{4e^2}$

14) ③

$(A\cap B)\subset A,\ (A\cap B)\subset B$이므로

$n(A\cap B)\leq n(A),\ n(A\cap B)\leq n(B)$이다.

따라서 $n(A)\times n(B)=2\times n(A\cap B)$ 을 만족하는 경우는

i) $n(A)=2,\ n(B)=1,\ n(A\cap B)=1$

$B\subset A$ 이므로 ${}_4\mathrm{C}_2\times 2=12$가지

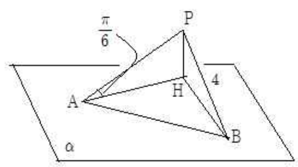
ii) $n(A)=1,\ n(B)=2,\ n(A\cap B)=1$

$A\subset B$ 이므로 $4\times{}_3\mathrm{C}_1=12$가지

그리고 집합 S의 공집합이 아닌 부분집합은 15개이므로

구하는 확률은 $\dfrac{12+12}{15\times 14}=\dfrac{4}{35}$이다.

15) ④



직각이등변삼각형 PAB에서 $\overline{\mathrm{PB}}=4,\ \overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$

정사영의 길이에서 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PA}}\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{6}$

삼수선의 정리에서 $\angle \mathrm{HAB}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\triangle \mathrm{ABH}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{3}$

그리고 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PA}}\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{2}$ 이다.

따라서 사면체 PHAB의 부피는

$V=\frac{1}{3}(\triangle \mathrm{ABH})\overline{\mathrm{PH}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

16) ①

5회의 시행중 (A,B), (B,C), (C,D) 에 넣은 경우를 각각 x, y, z라고 하면

$a=x$, $b=x+y$, $c=y+z$, $d=z$ 이다.

그리고 $x+y+z=5$ 이므로 중복조합으로부터

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

17) ②

정수 $k\,(0\le k\le 3)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은

짝수 $n-1$개 중에서 k장의 카드를 택하고,

홀수 n개 중에서 $(3-k)$장의 카드를 택하는

경우의 수를 전체 경우의 수로 나눈 값이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_n\mathrm{C}_2\times{}_{n-1}\mathrm{C}_1}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_{n-1}\mathrm{C}_2}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_3}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_3}=\frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

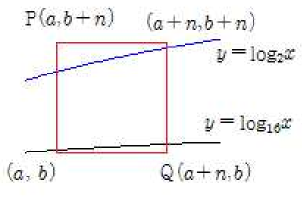
이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=0}^{3}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}\\&=\frac{3n(n-1)+6n(n-2)+3(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}\\&=\frac{3(n-1)}{2n-1}\end{aligned}$$

따라서 $a=3$, $f(n)=\frac{3n(n-2)}{2(2n-1)(2n-3)}$, $g(n)=3(n-1)$

$\therefore\ af(5)g(8)=3\times\frac{5}{14}\times 21=\frac{45}{2}$

18) ①



한 변의 길이가 3이거나 4인 꼭짓점의 좌표가 모두 자연수인 정사각형의 변은 그림과 같이 좌표축에 평행인 것뿐이다.

네 꼭짓점의 좌표를 그림과 같이 두면,

P는 $y=\log_2 x$ 위에, Q는 $y=\log_{16}x$아래에 있을 때 조건 (나)를 만족한다.

따라서 $\log_2 a<b+n$, $b<\log_{16}(a+n)$

즉, $a<2^{b+n}$, $a+n>2^{4b}$ 이므로 $2^{4b}-n<a<2^{b+n}$이다.

i) $n=3$이면 $2^{4b}-3<a<2^{b+3}$ 에서

$b=1$이면 $16-3<a<16$ -- $a=14,\ 15$

$b\ge 2$이면 $2^{4b}-3>2^{b+3}$이므로 불가능, $\therefore\ a_3=2$

ii) $n=4$이면 $2^{4b}-4<a<2^{b+4}$ 에서

$b=1$이면 $16-4<a<32$ -- $a=13,\ \cdots\ ,\ 31$

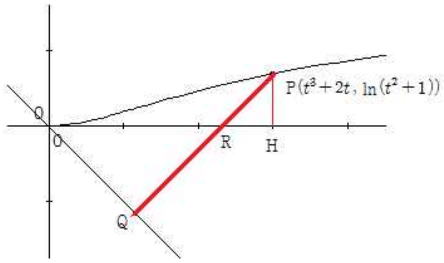
$b\ge 2$이면 $2^{4b}-4>2^{b+4}$이므로 불가능, $\therefore\ a_4=19$

i),ii)에서

$\therefore\ a_3+a_4=2+19=21$

19) ②

P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 직선 PQ와 x축의 교점을 R라 하면



$\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{PH}}=\ln(t^2+1)$, $\overline{\mathrm{OR}}=(t^3+2t)-\ln(t^2+1)$

$\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^3+2t-\ln(t^2+1))$

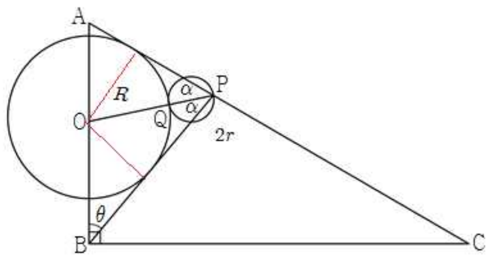
점 Q는 직선 $y=-x$위를 운동한다. 속도는

$\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(3t^2+2-\frac{2t}{t^2+1}\right)$

$t=1$을 대입하면 속력은

$\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 이다.

20) ⑤



두 원의 반지름의 길이를 각각 $R(\theta)$, $r(\theta)$ $(R(\theta)>r(\theta))$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{OB}}=\frac{2}{\sqrt{3}}R(\theta)+\frac{R(\theta)}{\sin\theta}=2$

$R(\theta)=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta}{2\sin\theta+\sqrt{3}}$

$\therefore\ f(\theta)=\pi R(\theta)^2$

$\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{BPO}=\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}$ 이므로

$\overline{OP}=\frac{R(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}$

$\overline{PQ}=\overline{OP}-\overline{OQ}$

$=\frac{R(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}-R(\theta)=\left(\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)R(\theta)$

$r(\theta)=\frac{\overline{PQ}}{2}=\left(\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)R(\theta)$

$\therefore\ g(\theta)=\pi\left(\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2R(\theta)^2$

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\pi\frac{R(\theta)^2+r(\theta)^2}{\theta^2}$

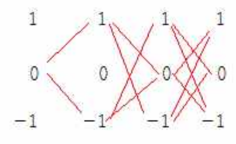
$$= \lim_{\theta \to 0+} \pi \frac{R(\theta)^2}{\theta^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)} \right)^2 \right\}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \pi \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \left(\frac{2\sqrt{3}}{2\sin\theta + \sqrt{3}} \right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)} \right)^2 \right\}$$

$$= \pi \times 1^2 \times 2^2 \times \left\{ 1 + \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{19 - 4\sqrt{3}}{3}\pi$$

21) ③



그림과 같이 줄을 따라 갈 때 마다 확률이 $\frac{1}{2}$이다.

ㄱ. $a_2 = 1$인 경우는 $0 \to 1$한가지 이므로 그 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $a_3 = 1$인 경우는 $0 \to -1 \to 1$ 이므로 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

$a_3 = -1$인 경우도 마찬가지로 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

$a_4 = 0$인 경우는 $a_3 = -1$또는 $a_3 = 1$에서 온 것이므로

그 확률은 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$이다.

ㄷ. $a_9 = 0$일 확률이 p이면

$a_9 = 1$, $a_9 = -1$일 확률은 각각 $\frac{1-p}{2}$이다.

$a_{11} = 0$인 경우는 $a_9 \to a_{10} \to a_{11}$에서

$0 \to (-1) \to 0$, $0 \to (1) \to 0$, $1 \to (-1) \to 0$, $(-1) \to 1 \to 0$ 이므로

확률은 $\frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p + \frac{1}{4} \times \frac{1-p}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1-p}{2} = \frac{1+p}{4}$ 이다.

22) 80

${}_5C_3 \times 2^3 = 80$

23) 16

$y = -4x$를 $y = \frac{1}{x-2} - a$에 대입하여 정리하면

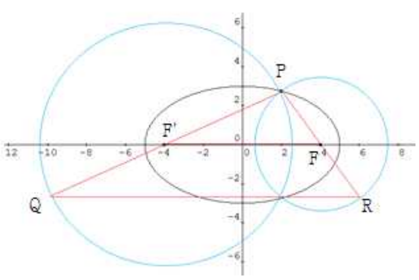
$-4x = \frac{1}{x-2} - a$, $4x^2 - (8+a)x + (2a+1) = 0$

판별식에서

$D = (8+a)^2 - 16(2a+1) = a^2 - 16a + 48 = 0$

따라서 두 개의 실수 a가 존재하고 그 합은 16이다.

24) 36



그림과 같이 삼각형 PQR의 둘레의 길이는 삼각형 PFF' 의 둘레의 길이의 두 배이다.

장축의 길이는 10이고, 초점거리는 8이다.

따라서 구하려는 둘레의 길이는 $2 \times (10+8) = 36$ 이다.

25) 8

$y = f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$f(x)\cos x$는 원점에 대하여 대칭이고

$xf(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 $\int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos x) f(x)\, dx = 2\int_0^{\pi} xf(x)dx$이다.

$$\int_0^{\pi} x^2 f'(x)dx = \left[x^2 f(x)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} xf(x)dx$$

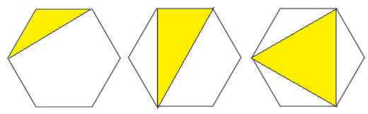
$$= 0 - 2\int_0^{\pi} xf(x)dx = -8\pi$$

따라서 $2\int_0^{\pi} xf(x)dx = 8\pi$,

$\therefore\ k = 8$

26) 17

삼각형의 모양은 그림과 같은 세 종류이고, 그 넓이와 경우의 수는 다음과 같다.



$\frac{\sqrt{3}}{4}$, 6개　$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 12개　$\frac{3}{4}\sqrt{3}$, 2개

따라서 구하려는 확률은 $\frac{12+2}{20} = \frac{7}{10}$이므로

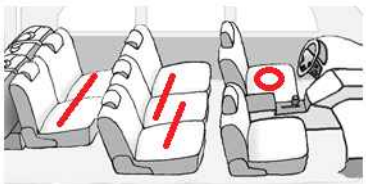
$p + q = 17$

27) 288

운전석에 2명의 3학년 중에서 한명을 앉히는 방법은 2가지

남은 자리 중 이웃하는 3가지에 1학년을 앉히는 방법은 $3 \times 2 = 6$

또, 남은 4자리에 남은 3명을 앉히는 방법은 $4! = 24$



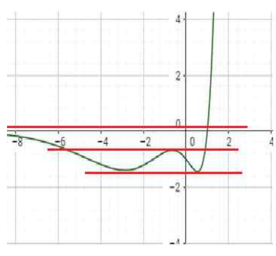
따라서 구하려는 경우의 수는 $2 \times 6 \times 24 = 288$ 이다.

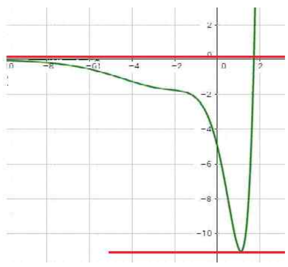
28) 49

$f(x) = (x^3 - a)e^x$에서 $f'(x) = (x^3 + 3x^2 - a)e^x$이므로

가능한 극점의 개수는 1개 또는 3개 인데,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 이므로 그래프의 개형은 극점에 개수에 따라 다음과 같다.





극점이 3개인 경우는 $g(t)$가 불연속인 점이 3곳이고

극점이 1개인 경우는 $g(t)$가 불연속인 점이 2곳이다.

따라서 주어진 조건을 만족하려면 극점이 1개일 때이다.

$f'(x)$에서 $h(x)=x^3+3x^2-a$의 값의 부호의 변화가 1번만 생길 때이다.
$h(x)$에 대하여 살펴보면

$h'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

이므로 위의 조건을 만족하려면 $h(0)h(-2)\geq 0$이다.

$h(0)h(-2)=a(a-4)\geq 0$, $a\leq 0$ 또는 $a\geq 4$

그러므로 10이하의 자연수 a의 값의 합은

$4+5+6+7+8+9+10=49$

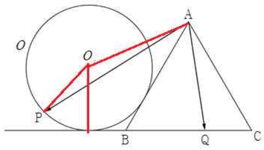
29) 40

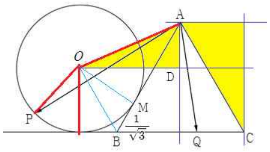
원의 중심을 O라 하면

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}$ 이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{AQ}\ =\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

여기서 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}\leq\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}\leq\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$





그림에서 $\overline{BM}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{OD}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$,

$\overline{AD}=\sqrt{3}-1$이므로

$\overrightarrow{AO}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}},1-\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC}=(1,-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=2-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=4-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

또, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$ 이므로 $-2\leq\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}\leq 2$

따라서 최댓값은 $\left(4-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)+2=6-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

최솟값은 $\left(2-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)-2=-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=36+4=40$

30) 30

$f(x)=x^3+ax^2-ax-a$ 의 역함수가 존재하려면

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2ax-a\geq 0$ 이다.

따라서 $D/4=a^2+3a=a(a+3)\leq 0$, $-3\leq a\leq 0$

이제 $f(k)=n$이라고 하면 $g(n)=k$이고

$n\times g'(n)=\dfrac{n}{f'(k)}=\dfrac{f(k)}{f'(k)}=1$

이므로 $n\times g'(n)=1$을 만족시키는 경우는

$f(k)=f'(k)=n$

그러므로 자연수 n에 대하여

$-3\leq a\leq 0$, $f(k)=f'(k)=n$

을 만족시키는 실수 a의 개수를 알아보면 된다.

$f(k)=f'(k)$에서

$k^3+ak^2-ak-a=3k^2+2ak-a$

$k^3+(a-3)k^2-3ak=0$, $k(k-3)(k+a)=0$

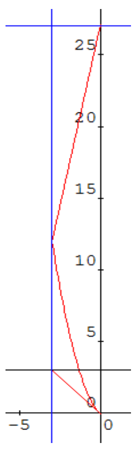
따라서 $k=0$ 또는 3 또는 $-a$인데,

각각에 대하여 $f'(k)=n$ 을 풀면

i) $k=0$ 이면 $-a=n$

ii) $k=3$ 이면 $27+5a=n$

iii) $k=-a$ 이면 $a^2-a=n$



이제 자연수 n에 대하여 위의 등식 i), ii), iii) 을 만족하는 실수 a $(-3\leq a\leq 0)$의 개수를 구해본다.

그림에서와 같이

$a_1=a_2=a_3=2$, $a_4=a_5=\cdots=a_{27}=1$ 이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{27}a_n=30$