2017학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형

성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\left(2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}}\right)^{-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{3^{n+1} - 2^n}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

3. 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균이 5일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

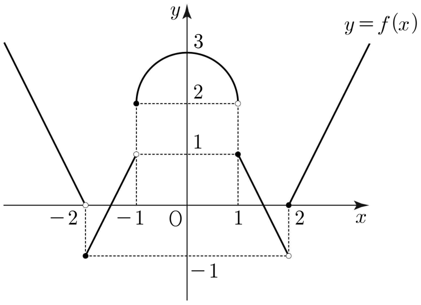
4. 실수 x에 대한 두 조건

$$p : x^2 - (2+a)x + 2a \le 0$$
$$q : x^2 - 2x - 15 \le 0$$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

5. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x-2)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. $\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(B|A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

7. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 등식

$$\log_3 a = \frac{1}{\log_b 27}$$

이 성립할 때, $\log_a b^2 + \log_b a^2$의 값은? [3점]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$

8. 함수 $f(x)=x(x-3)(x-a)$의 그래프 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 점 $(3, 0)$에서의 접선이 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

9. 주머니 속에 흰 공이 5개, 검은 공이 3개 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나오는 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

10. 집합 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$에 대하여 집합 P를

$$P=\left\{\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\frac{x_3}{10^3} \,\middle|\, x_1\in A,\ x_2\in A,\ x_3\in A\right\}$$

라 하자. 집합 P의 원소 중 41번째로 큰 원소는 $\frac{a}{10}+\frac{b}{10^2}+\frac{c}{10^3}$이다. $a+b+c$의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

11. 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생을 임의로 3명, 3명, 2명씩 3개의 조로 나눌 때, 두 학생 A, B가 같은 조에 속할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

12. 어느 공장에서 생산하는 군용 위장크림 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의로 택한 1개의 무게가 50 이상일 확률은 0.1587이다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균이 50 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.4332

13. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4-4x^3+12x \geq 2x^2+a$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [3점]

① -11　② -10　③ -9　④ -8　⑤ -7

14. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 두 함수 $f : A \to B$, $g : B \to A$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)=5$, $g(2)=3$
(나) 어떤 $x \in B$에 대하여 $g(x)=x$이다.
(다) 모든 $x \in A$에 대하여 $(f \circ g \circ f)(x)=x+1$이다.

$f(1)+g(3)$의 값은? [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

15. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_6-S_3=6,\ S_{12}-S_6=72$$

일 때, $a_{10}+a_{11}+a_{12}$의 값은? [4점]

① 48　② 51　③ 54　④ 57　⑤ 60

16. 이차함수 $f(x)=x^2+mx-8$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$는 $x=\alpha$에서 극소이다. α의 값은? (단, m은 상수이다.) [4점]

① -4　② -2　③ 1　④ 2　⑤ 4

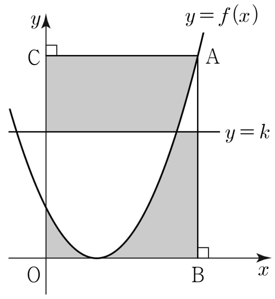
17. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 다섯 개의 구슬이 들어 있다. 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인한 후 다시 넣는다.
이와 같은 시행을 4회 반복하여 얻은 4개의 수 중에서 3개의 수의 합의 최댓값을 N이라 하자. 다음은 $N \geq 14$일 확률을 구하는 과정이다.

> (ⅰ) $N=15$인 경우
>
> 5가 적힌 구슬이 4회 나올 확률은 $\frac{1}{625}$이고,
>
> 5가 적힌 구슬이 3회, 4 이하의 수가 적힌 구슬 중 한 개가 1회 나올 확률은 $\frac{\boxed{(가)}}{625}$이다.
>
> (ⅱ) $N=14$인 경우
>
> 5가 적힌 구슬이 2회, 4가 적힌 구슬이 2회 나올 확률은 $\frac{6}{625}$이고,
>
> 5가 적힌 구슬이 2회, 4가 적힌 구슬이 1회, 3 이하의 수가 적힌 구슬 중 한 개가 1회 나올 확률은 $\frac{\boxed{(나)}}{625}$이다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{\boxed{(다)}}{625}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 96　② 101　③ 106　④ 111　⑤ 116

18. 그림과 같이 함수 $f(x)=(x-1)^2$의 그래프 위의 점 A$(3,\ 4)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하자. 직사각형 OBAC의 내부에서 연립부등식 $\begin{cases} y \leq f(x) \\ y \leq k \end{cases}$를 만족시키는 영역의 넓이를 S_1, 직사각형 OBAC의 내부에서 연립부등식 $\begin{cases} y \geq f(x) \\ y \geq k \end{cases}$를 만족시키는 영역의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때, 상수 k의 값은? (단, $1<k<4$이다.) [4점]

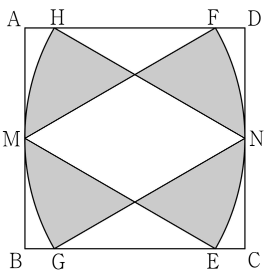


① $\frac{7}{3}$　② $\frac{8}{3}$　③ 3　④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{11}{3}$

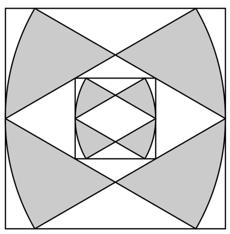
19. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD가 있다. 두 선분 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 두 선분 BC, AD 위에 $\overline{\mathrm{ME}}=\overline{\mathrm{MF}}=\overline{\mathrm{AB}}$가 되도록 각각 점 E, F를 잡고, 중심이 M인 부채꼴 MEF를 그린다. 두 선분 BC, AD 위에 $\overline{\mathrm{NG}}=\overline{\mathrm{NH}}=\overline{\mathrm{AB}}$가 되도록 각각 점 G, H를 잡고, 중심이 N인 부채꼴 NHG를 그린다. 두 부채꼴 MEF, NHG의 내부에서 공통부분을 제외한 나머지 부분에 와 같이 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

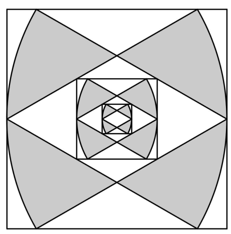
그림 R_1에서 두 부채꼴 MEF, NHG의 공통부분인 마름모의 각 변에 꼭짓점이 있고, 네 변이 정사각형 ABCD의 네 변과 각각 평행한 정사각형을 그린다. 새로 그려진 정사각형에 그림 R_1을 얻은 방법과 같은 방법으로 2개의 부채꼴을 각각 그린 다음 2개의 부채꼴의 내부에서 공통부분을 제외한 나머지 부분에 와 같이 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1

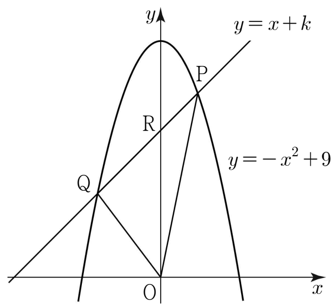

R_2


…

R_3 …

① $8\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$　② $9\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$
③ $10\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$　④ $11\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$
⑤ $12\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$

20. 그림과 같이 직선 $y=x+k\ (3<k<9)$가 곡선 $y=-x^2+9$와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, y축과 만나는 점을 R라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.) [4점]



<보 기>

ㄱ. 선분 PQ의 중점의 x좌표는 $-\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $k=7$일 때, 삼각형 ORQ의 넓이는 삼각형 OPR의 넓이의 2배이다.

ㄷ. 삼각형 OPQ의 넓이는 $k=6$일 때 최대이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$가 있다. 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ t-f(x) & (x\geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 개수를 $h(t)$라 하자. 예를 들어 $h(0)=3$이다. $h(t)=3$을 만족시키는 모든 정수 t의 개수는? [4점]

① 55　② 57　③ 59　④ 61　⑤ 63

22. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=1$, $a_5=7$일 때, a_9의 값을 구하시오. [3점]

23. 두 함수 $f(x)=4x+5$, $g(x)=\sqrt{2x+1}$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(3)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{2x^2-x-1}=\dfrac{1}{2}$
(나) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{2x^2-x-1}=4$

$f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

25. 방정식 $(x+y+z)(s+t)=49$를 만족시키는 자연수 x, y, z, s, t의 모든 순서쌍 (x, y, z, s, t)의 개수를 구하시오. [3점]

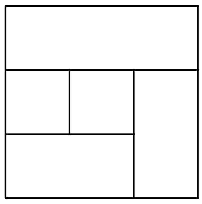
26. 사관학교에서는 사관생도들에게 세 국가 A, B, C에서 해외 파견 교육을 받을 수 있도록 하고 있다. 해외 파견 교육 대상 사관생도를 선발하기 위해 희망자를 조사하였더니 하나 이상의 국가를 신청한 사관생도의 수가 70명이었고, 그 결과는 다음과 같았다.

(가) A 또는 B를 신청한 사관생도는 43명이다.
(나) B 또는 C를 신청한 사관생도는 51명이다.
(다) A와 C를 동시에 신청한 사관생도는 없다.

B를 신청한 사관생도의 수를 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 5개의 영역으로 나누어진 도형을 서로 다른 4가지 색을 사용하여 모든 영역을 칠하려고 한다. 다음 조건을 만족시키도록 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 경계가 일부라도 닿은 두 영역은 서로 이웃한 영역으로 본다.) [4점]

(가) 4가지의 색의 전부 또는 일부를 사용한다.
(나) 서로 이웃한 영역은 서로 다른 색으로 칠한다.



28. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여

$$X \not\subset A,\ X \not\subset B,\ X \subset (A \cup B)$$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

29. 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\dfrac{k}{x}\ (k>0)$이 서로 다른 네 점에서 만날 때, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형을 만든다. 이 직사각형에서 긴 변의 길이가 짧은 변의 길이의 2배가 되도록 하는 k의 값을 $f(n)$이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{12} f(n)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \geq 0$일 때, $f(x)=x^2-2x$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)+f(x)=0$이다.

실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 좌표평면에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2017년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ⑤

$\left(2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{4}{3}}\right)^{-2}=\left(2^{-1}\right)^{-2}=4$

2) ①

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^{n+1}}{3^{n+1}-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2(\frac{2}{3})^n}{3-(\frac{2}{3})^n}=\frac{1}{3}$

3) ②

$E(X)=n\times\frac{1}{4}=5\quad \therefore n=20$

4) ③

$p:(x-2)(x-a)\le 0 \Rightarrow a\le x\le 2$ 또는 $2\le x\le a$

$q:(x-5)(x+3)\le 0 \Rightarrow -3\le x\le 5$

$\therefore -3\le a\le 5$

그러므로, 만족하는 정수 a의 개수는 9개이다.

5) ④

$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x-2)=2-1=1$

6) ①

$P(B|A)-P(B|A^C)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}-\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

7) ②

$\log_3 a=\frac{1}{\log_b 27}=\log_{27}b=\frac{1}{3}\log_3 b$

$\therefore \log_a b=\frac{\log_3 b}{\log_3 a}=3$

준식$=2\log_a b+\frac{2}{\log_a b}=2\times 3+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$

8) ④

$f'(x)=x(x-3)+x(x-a)+(x-3)(x-a)$

$f'(0)=3a$

$f'(3)=3(3-a)$

$f'(0)\times f'(3)=3a\times 3(3-a)=-1$

정리하면 $9a^2-27a-1=0$

근과 계수관계에서 a값의 합은 $\frac{27}{9}=3$

9) ①

X	0	1	2	3	계
P	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$	1

$E(X)=\frac{(0+30+60+15)}{70}=\frac{105}{70}=\frac{3}{2}$

10) ⑤

$x_1=9$ 이면, x_2, x_3 각각 5가지 = 25가지

$x_1=7$, $x_2=9$ 이면 : x_3 5가지

$x_1=7$, $x_2=7$ 이면 : x_3 5가지

$x_1=7$, $x_2=5$ 이면 : x_3 5가지

여기까지 40번째 수이므로 41번째로 큰 수는

$x_1=7$, $x_2=3$, $x_3=9$ 일 때 이다.

$\therefore a+b+c=7+3+9=19$

11) ②

전체 경우의 수$=\frac{{}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_2}{2}=280$

A, B가 3명인 조에 속하는 경우의 수$={}_6C_1\times{}_5C_3\times{}_2C_2=60$

A, B가 2명인 조에 속하는 경우의 수$={}_6C_3\times{}_3C_3\div 2!=10$

A, B가 같은 조에 속할 확률$=\frac{60+10}{280}=\frac{1}{4}$

12) ①

$P(X\ge 50)=P(z\ge\frac{50-m}{\sigma})=0.1857$

$\therefore\frac{50-m}{\sigma}=1$

$P(\overline{X}\ge 50)=P(z\ge\frac{50-m}{\frac{\sigma}{2}})=P(z\ge 2)=0.0228$

13) ③

$x^4-4x^3-2x^2+12x\ge a$ 에서

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$ 라 두면

$f'(x)=4(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$f(-1)=f(3)=-9$ 이므로 $f(x)$의 최솟값은 -9

$\therefore -9\ge a$

14) ②

가)에서 $f(3)=5$, $g(2)=3$

나)에서 $g(4)=4$

다)에서

$x=4$ 대입하면 $f(4)=2$

$x=1$ 대입하면 $f(1)=4$

$x=3$ 대입하면 $g(5)=1$

$x=2$ 대입하면 $f(2)=3$, $g(3)=2$

$\therefore f(1)+g(3)=4+2=6$

15) ③

$a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=b_n$ 이라 두면,

b_n은 등비수열이므로, 공비를 r이라 하자

$S_6-S_3=b_2=6$

$S_{12}-S_6=b_3+b_4=6r+6r^2=72\qquad\therefore r=3$

$a_{10}+a_{11}+a_{12}=b_4=6\times 3^2=54$

16) ⑤

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1+x)dx=\int_1^2 f(x)dx$ 이 성립하려면

$f(x)$의 대칭축이 $x=1$이어야 한다.

$\therefore m=-2$

$f(x)=(x-4)(x+2)$에서

$x=4$까지의 적분값이 최소이고, 극소이다

$\therefore \alpha=4$

17) ④

(ⅰ) 주어진 확률은

${}_4C_3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{625}$ $\therefore$ (가) $=16$

(ⅱ) 주어진 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\times{}_2C_1\left(\frac{1}{5}\right)\times{}_1C_1\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{36}{625}$ $\therefore$ (나) $=36$

(ⅲ) 구하는 확률은

$\frac{1}{625}+\frac{16}{625}+\frac{6}{625}+\frac{36}{625}=\frac{59}{625}$ $\therefore$ (다) $=59$

$\therefore p+q+r=16+36+59=111$

18) ③

$S_1=S_2$ 이면 아래 직사각형 넓이와 $f(x)$의 윗부분 면적이 같다.

$3k=12-\int_0^3(x-1)^2dx=9$

$\therefore k=3$

19) ①

MN의 중점을 O, HN과 FM의 교점을 P, GN과 EM의 교점을 Q라 하면

$OM=3$, $OP=\sqrt{3}$, $MP=2\sqrt{3}$, $\square MPNQ=6\sqrt{3}$

내접하는 정사각형의 한변$=\frac{MN}{\sqrt{3}+1}=\frac{6}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore$ 닮음비$=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$, 공비는 $\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)^2$

$S_1=2(\text{부채꼴}MFE-\square MPNQ)=12(\pi-\sqrt{3})$

$\lim_{n\to\infty}S_\infty=\frac{12(\pi-\sqrt{3})}{1-\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)^2}=8\sqrt{3}(\pi-\sqrt{3})$

20) ③

$-x^2+9=x+k \Rightarrow x^2+x+k-9=0$ 의 두 근 α,β는 P, Q의 x좌표

ㄱ) $\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ) $k=7$이면 $P(1,8)$, $Q(-2,5)$

QR을 밑변으로 보면 높이가 2배이므로 넓이도 2배이다. (참)

ㄷ) $OR=k$, $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=k-9$

$\triangle OPQ=\triangle OPR+\triangle OPQ$

$=\frac{1}{2}|\alpha|k+\frac{1}{2}|\beta|k=\frac{1}{2}|\alpha-\beta|k$ ($\because \alpha\beta<0$)

$=\frac{1}{2}k\sqrt{1-4(k-9)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{-4k^3+37k^2}$

여기서 $f(k)=-4k^3+37k^2$이라 두면

$f'(k)=-12k^2+74k=0$

$k=\frac{37}{6}$일 때, $f(k)$는 최댓값을 가진다.

$\therefore k=\frac{37}{6}$일 때, $\triangle OPQ$의 넓이는 최대이다. (거짓)

21) ⑤

$x=a$에서 연속이므로

$f(a)=t-f(a)$ $\therefore f(a)=\frac{t}{2}$

$h(t)$는 $f(a)=\frac{t}{2}$를 만족하는 a의 개수이다.

$h(t)=3$이려면 $y=\frac{t}{2}$가 $f(x)$의 극댓값, 극솟값 사이에 존재해야 한다.

$f'(x)=3x^2+6x-9=0$ 에서 $x=-3$, 1

$f(-3)=27$, $f(1)=-5$ 이므로

$-5<\frac{t}{2}<27$

$-10<t<54$

$\therefore$ 정수 t의 개수는 63개

22) 19

$a_n=a+(n-1)d$ 에 대입하면 $a=-5$, $d=3$

$a_9=-5+8\times3=19$

23) 21

$g^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

$f\circ g^{-1}(3)=f(4)=21$

24) 13

(가)에서 $f(x)$의 2차항 계수는 1

(나)에서 $x=1$일 때, 분모가 0이 되므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 가진다.

$\therefore f(x)=(x-1)(x+k)$

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+k)}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+k)}{(2x+1)}=\frac{1+k}{3}=4$, $\therefore k=11$

$\therefore f(x)=(x-1)(x+11)$

$\therefore f(2)=13$

25) 90

$x+y+z\ge3$, $s+t\ge2$ 이므로 준식을 만족하는 자연수 순서쌍은

$x+y+z=7$, $s+t=7$ 이다.

$\therefore {}_3H_4\times{}_2H_5=90$

26) 24

$n(A\cup B\cup C)=70$

$n(C-(A\cup B))=27$, $n(B\cup C)=51$, $A\cap C=\varnothing$ 이므로

$n(B\cup C)-n(B)=27$ 에서

$\therefore n(B)=24$

27) 72

ㄱ) 3가지 색으로 칠하는 경우:

색결정 ${}_4C_3$ × 칠하는 방법 $3!=24$

ㄴ) 4가지 색으로 칠하는 경우

중복색 결정 4가지×중복위치결정 2가지×나머지색 칠하는 방법 $3!=48$

$\therefore 24+48=72$

28) 168

집합X 개수

$=X\subset(AUB)$인 경우 $-X\subset A$인 경우 $-X\subset B$인 경우

$+x\subset(A\cap B)$인 경우

$=2^8-2^5-2^6+2^3=168$

29) 195

원 $x^2+y^2=n^2$과 곡선 $y=\frac{k}{x}$의 제1사분면의 두 교점을

$P(a, \frac{k}{a})$, $Q(\frac{k}{a}, a)$ $(a > \frac{k}{a})$ 라 하고

PQ의 중점을 $M(\frac{a+\frac{k}{a}}{2}, \frac{a+\frac{k}{a}}{2})$라 하자.

두 점 P, Q는 원 위의 점이므로 $a^2 + \left(\frac{k}{a}\right)^2 = n^2$ ⋯ ①

직사각형의 긴변이 짧은 변의 2배이면 $\overline{PQ} = \overline{OM}$ 이 성립한다

$\sqrt{2}\,(a - \frac{k}{a}) = \sqrt{2}\,(\frac{a+\frac{k}{a}}{2})$

정리하면 $a^2 = 3k$ ⋯ ②

②를 ①에 대입하면

$3k + \frac{k}{3} = n^2$

$k = \frac{3n^2}{10}$

$\therefore f(n) = \frac{3}{10}n^2$

$\sum_{n=1}^{12} f(n) = \frac{3}{10} \times \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 195$

30) 35

$f(x) = \begin{cases} (x \le 0) & -x^2 - 2x \\ (x \ge 0) & x^2 - 2x \end{cases}$

$f(x+1) = \begin{cases} (x \le -1) & -x^2 - 4x - 3 \\ (x \ge -1) & x^2 - 1 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} (x \le -\frac{3}{2}) & f(x) \\ (-\frac{3}{2} \le x \le 0) & f(x+1) \\ (0 \le x \le 1) & f(1) \\ (1 \le x) & f(x) \end{cases}$

두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$로 둘러싸인 넓이를 S라 하면

$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \{f(x) - f(x+1)\}dx + \int_{0}^{1} \{f(x) - f(1)\}dx$

$= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \{(-x^2 - 2x) - (-x^2 - 4x - 3)\}dx$

$+ \int_{-1}^{0} \{(-x^2 - 2x) - (x^2 - 1)\}dx$

$+ \int_{0}^{1} \{(x^2 - 2x) - (-1)\}dx$

$= \frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{23}{12}$

$\therefore p + q = 35$