2017학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2. 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균이 5일 때, 자연수 n의 값은? [2점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

3. 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(6, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 3, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, -3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 선분 OG의 길이는? (단, O는 원점이다.) [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

4. 자연수 10의 분할 중에서 짝수로만 이루어진 것의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

5. 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. $\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(B|A^C)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{\sec x}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

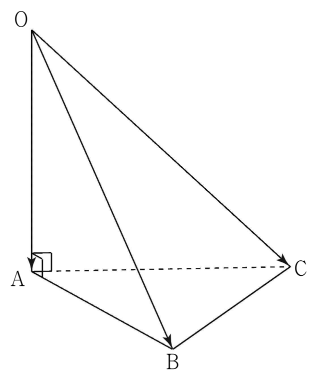
7. 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1

$\mathrm{E}(X)=1$, $\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}$일 때, $\mathrm{P}(X=0)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC를 밑면으로 하고 $\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$인 사면체 OABC가 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$의 값은? [3점]

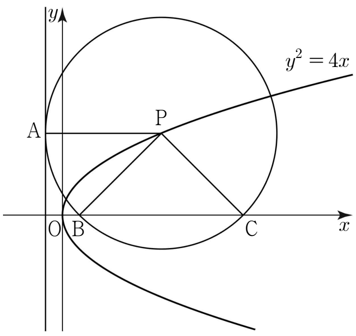


① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

9. 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생을 임의로 3명, 3명, 2명씩 3개의 조로 나눌 때, 두 학생 A, B가 같은 조에 속할 확률은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

10. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 1보다 크고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [3점]



① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{3}$
④ $4+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

11. 어느 공장에서 생산하는 군용 위장크림 1개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의로 택한 1개의 무게가 50 이상일 확률은 0.1587이다.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

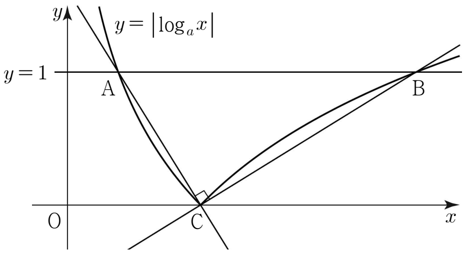
이 공장에서 생산하는 군용 위장크림 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균이 50 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.4332

12. 곡선 $y=\tan\frac{x}{2}$와 직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{4}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}\ln 2$ ③ $\ln 2$ ④ $2\ln 2$ ⑤ $4\ln 2$

13. 그림과 같이 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 x축과 만나는 점을 C라 하자. 두 직선 AC, BC가 서로 수직이 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은? (단, $a \neq 1$) [3점]

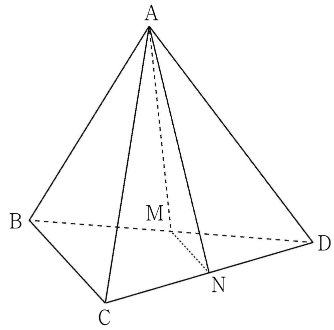


① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

14. 같은 종류의 볼펜 6개, 같은 종류의 연필 6개, 같은 종류의 지우개 6개가 필통에 들어 있다. 이 필통에서 8개를 동시에 꺼내는 경우의 수는? (단, 같은 종류끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 18　② 24　③ 30　④ 36　⑤ 42

15. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 두 모서리 BD, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 사각형 BCNM의 평면 AMN 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



① $\frac{15\sqrt{11}}{11}$　② $\frac{18\sqrt{11}}{11}$　③ $\frac{21\sqrt{11}}{11}$
④ $\frac{24\sqrt{11}}{11}$　⑤ $\frac{27\sqrt{11}}{11}$

16. 자연수 n에 대하여

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

이라 할 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하는 과정이다.

$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}$

$= \boxed{(가)} - (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n}}{1+x^2}$ 이므로

$S_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2n-1}$

$\quad = \displaystyle\int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}\} dx$

$\quad = \displaystyle\int_0^1 \boxed{(가)}\, dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx$

이다. 한편, $0 \le \dfrac{x^{2n}}{1+x^2} \le x^{2n}$ 이므로

$0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \le \int_0^1 x^{2n} dx = \boxed{(나)}$

이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = 0$ 이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)}\, dx$ 이다.

$x = \tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}\, d\theta = \boxed{(다)}$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $k \times f(2) \times g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi}{40}$ ② $\dfrac{\pi}{60}$ ③ $\dfrac{\pi}{80}$ ④ $\dfrac{\pi}{100}$ ⑤ $\dfrac{\pi}{120}$

17. 좌표공간에 평행한 두 평면 $\alpha : 2x - y + 2z = 0$, $\beta : 2x - y + 2z = 6$ 위에 각각 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 1)$이 있다. 평면 α 위의 점 P와 평면 β 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AQ}} + \overline{\mathrm{QP}} + \overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은? [4점]

① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$ ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

18. 함수 $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{t^3} dt$에 대하여 $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1-e}{2}$ ② $\dfrac{1-e}{3}$ ③ $\dfrac{1-e}{4}$ ④ $\dfrac{1-e}{5}$ ⑤ $\dfrac{1-e}{6}$

19. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하자.

(가) 점 P는 구 $x^2+y^2+z^2=25$ 위의 점이다.
(나) 점 $\mathrm{A}(t+5,\ 2t+4,\ 3t-2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=\frac{20}{3}\pi$

ㄴ. $\lim_{t\to\infty} f(t)=10\pi$

ㄷ. $f(t)$는 $t=-1$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 지수함수 $f(x)=a^x\ (0<a<1)$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표를 b라 하자. 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le b) \\ f^{-1}(x) & (x>b) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab의 값은? [4점]

① e^{-e-1} ② $e^{-e-\frac{1}{e}}$ ③ $e^{-e+\frac{1}{e}}$
④ e^{e-1} ⑤ e^{e+1}

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

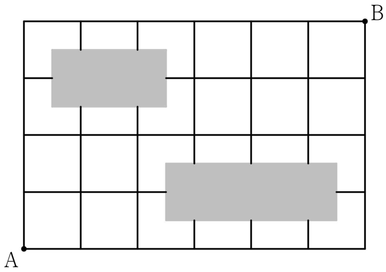
(가) $f(0)=0,\ f'(0)=1$
(나) 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ 이다.

$f(-1)=k\ (-1<k<0)$일 때, $\int_0^1 \{f(x)\}^2dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [4점]

① $1-k^2$ ② $1-2k$ ③ $1-k$
④ $1+k$ ⑤ $1+k^2$

22. $\sin^2\theta=\frac{4}{5}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$일 때, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=p$이다. $\frac{1}{p^2}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 어느 부대가 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 장애물(어두운 부분)을 피해 A 지점에서 B 지점으로 도로를 따라 이동하려고 한다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. [3점]



24. 두 초점 F, F$'$을 공유하는 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{16}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$이 있다. 타원과 쌍곡선이 만나는 점 중 하나를 P라 할 때, $\left|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2\right|$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.) [3점]

25. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

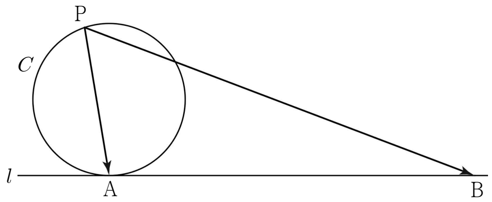
$$x=t^3,\ y=2t-\sqrt{2t}$$

의 그래프 위의 점 $(8,\ a)$에서의 접선의 기울기는 b이다. $100ab$의 값을 구하시오. [3점]

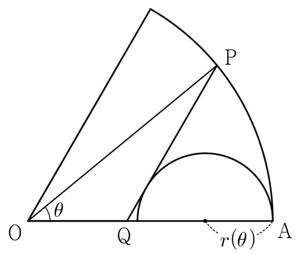
26. 곡선 $y=\sin^2 x\ (0\le x\le\pi)$의 두 변곡점을 각각 A, B라 할 때, 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선이 만나는 점의 y좌표는 $p+q\pi$이다. $40(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

27. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 차례로 꺼낸다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수일 때, 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C와 원 C 위의 점 A에서의 접선 l이 있다. 원 C 위의 점 P와 $\overline{\mathrm{AB}}=24$를 만족시키는 직선 l 위의 점 B에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값을 구하시오. [4점]



29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고 $\angle \mathrm{AOP}=\theta$라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta}=a+b\sqrt{3}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.
$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{3}\text{이고, } a, b\text{는 유리수이다.}\right)$ [4점]



30. 좌표공간에 평면 $z=1$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1, -1, 1)$, $\mathrm{B}(1, 1, 1)$, $\mathrm{C}(0, 0, 1)$이 있다. 점 $\mathrm{P}(2, 3, 2)$를 지나고 벡터 $\vec{d}=(a, b, 1)$과 평행한 직선이 삼각형 ABC의 둘레 또는 내부를 지날 때, $|\vec{d}+3\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a, b는 실수이다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2017년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ⑤

$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$

2) ⑤

$E(X) = n \times \frac{1}{4} = 5 \quad \therefore n = 20$

3) ③

점 $G = (2,\ 1,\ -1)$

$OG = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$

4) ①

$10 = 10 = 8+2 = 6+4 = 6+2+2$

$= 4+4+2 = 4+2+2+2 = 2+2+2+2+2$

$\therefore$ 7개

5) ①

$P(B|A) - P(B|A^C) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} - \frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

6) ②

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{\sec x}$ $\left(\frac{\pi}{2} - x = \theta\text{로 치환}\right)$

$= \lim_{\theta\to 0}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$

$= \lim_{\theta\to 0}(1-\sin\theta)^{\frac{1}{\sin\theta}}$

$= \lim_{\theta\to 0}\left\{(1-\sin\theta)^{\frac{1}{-\sin\theta}}\right\}^{-1}$

$= e^{-1}$

7) ③

$\sum p_i = 1$: $a+b+c=1$

$\mathrm{E}(X) = 1$: $b+2c=1$

$\mathrm{V}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{4}$: $b+4c-1 = \frac{1}{4}$

연립하면 $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{8}$

$P(X=0) = \frac{1}{8}$

8) ②

점A가 점C에 대응되도록 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 평행이동시켰을 때, 점O의 대응점을 점O' 라고 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{O'C}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{O'B}}|$

$= \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

9) ②

전체 경우의 수 $= \frac{{}_8C_3 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2}{2} = 280$

A, B가 3명인 조에 속하는 경우의 수 $= {}_6C_1 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 60$

A, B가 2명인 조에 속하는 경우의 수 $= {}_6C_3 \times {}_3C_3 \div 2! = 10$

A, B가 같은 조에 속할 확률 $= \frac{60+10}{280} = \frac{1}{4}$

10) ④

점B는 초점이므로 $(1,0)$, 점P를 (a,b)라 하고

점P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점H는 $(a,0)$

$\angle APB = \angle BPH = \frac{\pi}{4}$

$\overline{BH} = \overline{PH} = a-1 = b \ \cdots$ ①

(a,b)는 포물선 위의 점이므로 대입하면

$b^2 = 4a \ \cdots$ ②

①, ②를 연립하면 $(a,b) = (3+2\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2})$

원의 반지름 $= \overline{BP} = \sqrt{2}\ \overline{PH} = \sqrt{2}(2+2\sqrt{2}) = 4+2\sqrt{2}$

11) ①

$P(X \ge 50) = P(z \ge \frac{50-m}{\sigma}) = 0.1857$

$\therefore \frac{50-m}{\sigma} = 1$

$P(\overline{X} \ge 50) = P(z \ge \frac{50-m}{\frac{\sigma}{2}}) = P(z \ge 2) = 0.0228$

12) ③

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}dx = -2[\ln\cos\frac{x}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2$

13) ③

점C는 $(1,0)$이고

$a>1$이면 $A(\frac{1}{a},1)$, $B(a,1)$

$0<a<1$이면 $A(a,1)$, $B(\frac{1}{a},1)$

$\overline{AC}$기울기$\times$ $\overline{BC}$기울기 $= \frac{1}{\frac{1}{a}-1} \times \frac{1}{a-1} = -1$

정리하면 $a^2-3a+1=0$

a값의 합은 3

14) ④

구하는 경우의 수는

$a+b+c=8\ (0 \le a,b,c \le 6)$

을 만족하는 정수 (a,b,c)순서쌍의 개수이다.

$a+b+c=8\ (0 \le a,b,c \le 8)$인 경우 : ${}_3H_8$

여기서 제외할 경우의 수는

$a=7$인 경우: 2가지, $a=8$인 경우: 1가지

b, c도 각각 3가지

$\therefore {}_3H_8 - 9 = 36$

15) ⑤

MN의 중점을 H, $\triangle BCD$의 무게중심을 G라 하고

$\triangle AMN$과 $\square BCMN$이 이루는 각 $= \angle AHG = \theta$ 라 하면

$AH = 3\sqrt{11}$, $GH = \sqrt{3}$, $\cos\theta = \frac{GH}{AH} = \frac{\sqrt{33}}{33}$

$\square BCMN$ 의 넓이 $= \frac{3}{4} \times \triangle BCD = (\frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2) = 27\sqrt{3}$

정사영의 넓이$=27\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{33}}{33}=\dfrac{27\sqrt{11}}{11}$

16) ④

(가): $\dfrac{1}{1+x^2}$, (나): $\dfrac{1}{2n+1}$, (다): $\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore k\times f(2)\times g(2)=\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{\pi}{100}$

17) ②

점A의 평면β에의 대칭점은 $A'(\frac{8}{3},-\frac{4}{3},\frac{8}{3})$

점B의 평면α에의 대칭점은 $B'(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{5}{3})$

$AQ+QP+PB=A'Q+QP+PB'\geq A'B'=\sqrt{37}$

18) ⑤

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2f'(x)dx$

$\displaystyle=0-\int_0^1\frac{1}{2}x^2e^{x^3}dx$ ($x^3=t$로 치환)

$\displaystyle=-\frac{1}{6}\int_0^1 e^t dt=-\frac{1}{6}\left[e^t\right]_0^1=\frac{1-e}{6}$

19) ③

P에서 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OA}=\sqrt{(t+5)^2+(2t+4)^2+(3t-2)^2}=\sqrt{14t^2+14t+45}$

$\overline{OP}^2=\overline{OH}\times\overline{OA}$,

$\therefore\overline{OH}=\dfrac{\overline{OP}^2}{\overline{OA}}=\dfrac{25}{\overline{OA}}$

$\overline{PH}=\sqrt{25-\left(\dfrac{25}{\overline{OA}}\right)^2}$

$f(t)=2\pi\overline{PH}=2\pi\sqrt{25-\left(\dfrac{25}{\overline{OA}}\right)^2}$

ㄱ) $f(0)=2\pi\sqrt{25-\left(\dfrac{25}{\sqrt{45}}\right)^2}=\dfrac{20}{3}\pi$

ㄴ) $t\to\infty$ 이면 $\overline{OA}\to\infty$ 이고, $\overline{PH}\to 5$

$\therefore\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=10\pi$

ㄷ) $\overline{OA}=\sqrt{14(t+\frac{1}{2})^2+\frac{83}{2}}$ 이므로

$t=-\dfrac{1}{2}$일 때, OA는 최솟값을 가지고,

그때, $f(t)$도 최솟값을 가진다.

20) ①

$f(x)=a^x$, $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ 이고

$(b,\,b)$에서 $g(x)$가 미분가능하려면

$f(b)=a^b=b$ ⋯ ①

$f'(b)=a^b\cdot\ln a=-1$ ⋯ ②

를 만족하여야 한다.

①의 양변에 $\ln$을 취하면 $b\ln a=\ln b$ ⋯ ③

①을 ②에 대입하면 $b\ln a=-1$ ⋯ ④

③, ④에서 $\ln b=-1$

$\therefore b=e^{-1}$, $a=e^{-e}$

$\therefore ab=e^{-e-1}$

21) ④

$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ 에서 $x=1,\,y=-1$을 대입하면

$f(1)=-f(-1)=-k$ 이고

$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}-f(x)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)\times(1-f(x)^2)}{h\times(1+f(x)f(h))}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\times\lim_{h\to0}\frac{(1-f(x)^2)}{(1+f(x)f(h))}$

$=f'(0)\times(1-f(x)^2)$

$=1-f(x)^2$

$\therefore f(x)^2=1-f'(x)$

$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

$=\displaystyle\int_0^1\{1-f'(x)\}dx$

$=\left[x-f(x)\right]_0^1=1-f(1)$

$=1+k$

22) 10

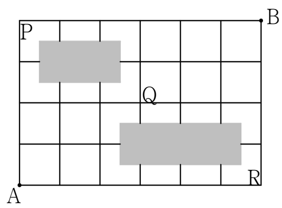
$\sin^2\theta=\dfrac{4}{5}$ 에서 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt5}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt5}$

$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{1}{\sqrt5}\,\dfrac{1}{\sqrt2}-\dfrac{2}{\sqrt5}\,\dfrac{1}{\sqrt2}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}=p$

$\therefore\ \dfrac{1}{p^2}=10$

23) 62



P 경유: $1\times1=1$가지

Q 경유: $\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{5!}{3!\times2!}=60$가지

R 경유: $1\times1=1$가지

$\therefore$ 62가지

24) 40

초점은 $F(3,0)$, $F'(-3,0)$ $\therefore a=25$

$\left|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2\right|=\left|(\overline{PF}+\overline{PF'})(\overline{PF}-\overline{PF'})\right|=10\times4=40$

25) 25

$x=t^3$, $\dfrac{dx}{dt}=3t^2$, $x=8$일 때, $t=2$

$y=2t-\sqrt{2t}$, $\dfrac{dy}{dt}=t-\dfrac{1}{\sqrt{2t}}$, $t=2$일 때, $a=2$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=8}=\frac{\frac{dy}{dt}\Big|_{t=2}}{\frac{dx}{dt}\Big|_{t=2}}=\frac{\left[t-\frac{1}{\sqrt{2t}}\right]_{t=2}}{\left[3t^2\right]_{t=2}}=\frac{1}{8}=b$$

$\therefore 100ab=100\cdot 2\cdot \frac{1}{8}=25$

26) 30

$y=\sin^2 x$

$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$y''=2\cos 2x=0 \quad \therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}$

$x=\frac{\pi}{4}$일 때, 점A는 $(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2})$, $y'_{x=\frac{\pi}{4}}=1$

$\therefore l_1:\ y=x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ \cdots①$

$x=\frac{3\pi}{4}$일 때, 점B는 $(\frac{3\pi}{4},\frac{1}{2})$, $y'_{x=\frac{3\pi}{4}}=-1$

$\therefore l_2:\ y=-x+\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\ \cdots②$

①, ② 연립하면 $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\therefore p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{4}$

$\therefore 40(p+q)=30$

27) 28

p(세수의 곱이 짝수)$=1-p$(세수 모두 홀수)

$=1-\frac{{}_3C_3}{{}_6C_3}=\frac{19}{20}$

p(홀,홀,짝)$=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$

p(홀,짝,홀)$=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{20}$

p(홀,짝,짝)$=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{20}$

구하는 확률$=\dfrac{\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}}{\frac{19}{20}}=\frac{9}{19}$

$\therefore p+q=28$

28) 180

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}$

여기서, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=25$, $\overrightarrow{OP}^2=25$ 이고

AB의 중점을 Q라 하면 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OQ}$ 이고

$\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 반대방향일 때, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$는 최댓값을 가진다

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 25+25-2(-5\times 13)=180$

29) 5

작은 원의 중심을 O', P에서 OA에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$O'A=r(\theta)$, $O'Q=\frac{2}{\sqrt{3}}r(\theta)$

$PH=\sin\theta$, $QH=\frac{1}{\sqrt{3}}sin\theta$, $OQ=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}sin\theta$

$OA=\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}sin\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}r(\theta)+r(\theta)=1$

$\therefore r(\theta)=\frac{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+\sin\theta}{2+\sqrt{3}}$

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{2+\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\,\frac{1-\cos\theta}{\theta}+\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}$

$=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$\therefore a=2,\ b=-1$

$\therefore a^2+b^2=5$

30) 32

점P를 지나고 벡터$\vec{d}$에 평행한 직선의 식은

$\frac{x-2}{a}=\frac{y-3}{b}=\frac{z-2}{1}$

$z=1$ 대입하면 $(x,\ y,\ 1)=(-a+2,\ -b+3,\ 1)$

$z=1$인 평면내에서

(x,y)가 $(1,-1),(1,1),\ (0,0)$의 둘레 또는 내부에 있으려면

$0\le x\le 1:\ 0\le -a+2\le 1\ \cdots①$

$y\le x:\ -b+3\le -a+2\ \cdots②$

$y\ge -x:\ -b+3\ge a-2\ \cdots③$

에서 ①, ②, ③을 만족해야 하고,

그 영역은 (a,b)가 $(1,2),(1,4),(2,3)$로 이루어지는 삼각형의 둘레 또는 내부에 있을 경우이다.

$|\vec{d}+3\overrightarrow{OA}|^2=|a+3,\ b-3,\ 4|^2=(a+3)^2+(b-3)^2+16$ 에서

준식의 최솟값은 $a=1,\ b=3$ 일 때 32이다.