2016학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형

성명		수험번호							

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\log_4 72 - \log_2 6$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

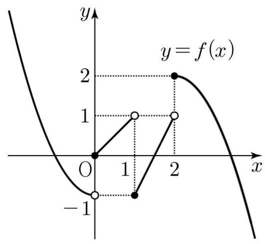
2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB+A$의 $(1, 2)$성분은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

3. 함수 $f(x)=x^3+2x^2+13x+10$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) - \lim\limits_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{5}{6},\ \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{1}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

6. 첫째항이 1이고, 둘째항이 p인 수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+2} = a_n + 2$ $(n \geq 1)$를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 70$일 때, 상수 p의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

7. 어느 과수원에서 생산되는 사과의 무게는 평균이 350g이고 표준편차가 30g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 평균이 345g 이상 365g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

8. 어느 액체의 끓는 온도 T(℃)와 증기압 P(mmHg) 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$\log P = k - \frac{1000}{T+250} \text{ (단, } k\text{는 상수)}$$

이 액체의 끓는 온도가 0℃일 때와 50℃일 때의 증기압을 각각 P_1(mmHg), P_2(mmHg)라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$의 값은? [3점]

① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{3}}$ ③ $10^{\frac{1}{2}}$ ④ $10^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{3}{4}}$

9. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{3^n} - 4\right) = 2$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 2^n}{3^{n-1}+4}$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

10. 연립방정식

$$\begin{cases} \log_x y = \log_3 8 \\ 4(\log_2 x)(\log_3 y) = 3 \end{cases}$$

의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, $\alpha > 1$이다.) [3점]

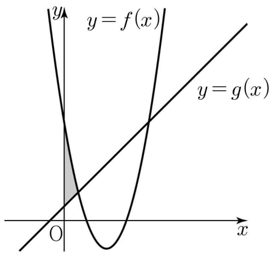
① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

[11~12] 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x) = x^2 - 6x + 7$,

$g(x) = x + n$

이라 하자. 11번과 12번의 두 물음에 답하시오.



11. $n=1$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ 3 ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

12. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 두 점 사이의 거리를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n^2$의 값은? [3점]

① 780 ② 800 ③ 820 ④ 840 ⑤ 860

13. 5개의 꼭짓점으로 이루어진 그래프 G의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 M이라 할 때, 행렬 M^2이 다음과 같다.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

행렬 M의 성분 중 1의 개수를 a, 그래프 G의 꼭짓점 중 연결된 변의 개수가 짝수인 것의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값은? (단, 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변이 없고, 두 꼭짓점 사이에 많아야 한 개의 변이 존재한다.) [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

14. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $2x^3 + ax^2 + 6x - 3 = t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

15. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB = A - B,\ 2BA + 2B = A^2$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB = BA$

ㄴ. $A - 3E$ 의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. $(A+B)^2 = 16B^2$

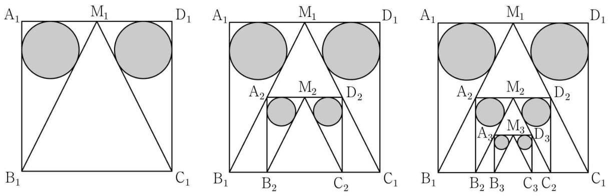
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 변 A_1D_1의 중점을 M_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1B_1M_1$과 $M_1C_1D_1$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 B_1C_1 위에 있고 삼각형 $M_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후 변 A_2D_2의 중점을 M_2라 할 때, 두 삼각형 $A_2B_2M_2$와 $M_2C_2D_2$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 꼭짓점이 변 B_2C_2 위에 있고 삼각형 $M_2B_2C_2$에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 그린 후 변 A_3D_3의 중점을 M_3이라 할 때, 두 삼각형 $A_3B_3M_3$과 $M_3C_3D_3$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3

① $\frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ② $\frac{4(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ③ $\frac{5(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$
④ $\frac{5(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5(9-4\sqrt{5})}{3}\pi$

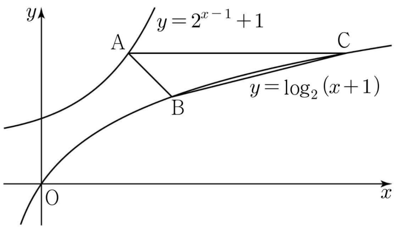
17. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=ax^2$ $(0 \le x < 2)$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+2$이다.

$\int_1^7 f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

18. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-1}+1$위의 점 A와 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 두 점 B, C에 대하여 두 점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AC는 x축과 평행하다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (p, q)일 때, $p+q$의 값은? [4점]



① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

19. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-\frac{5}{3}$이고

$$a_{n+1}=-\frac{3a_n+2}{a_n} \quad (n \ge 1) \cdots\cdots (*)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $(*)$에서
>
> $$a_{n+1}+2 = -\frac{a_n+\boxed{(가)}}{a_n} \quad (n \ge 1)$$
>
> 이다. 여기서
>
> $$b_n = \frac{1}{a_n+2} \quad (n \ge 1)$$
>
> 이라 하면 $b_1=3$이고
>
> $$b_{n+1}=2b_n-\boxed{(나)} \quad (n \ge 1)$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $$b_n=\boxed{(다)} \quad (n \ge 1)$$
>
> 이므로
>
> $$a_n=\frac{1}{\boxed{(다)}}-2 \quad (n \ge 1)$$
>
> 이다.

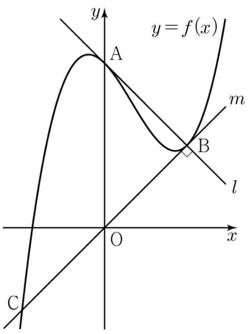
위의 (가)와 (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p\times q\times f(5)$의 값은? [4점]

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70

20. 바닥에 놓여 있는 5개의 동전 중 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집는 시행을 하기로 한다. 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여있는 상태에서 이 시행을 3번 반복한 결과 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있을 확률은? (단, 동전의 크기와 모양은 모두 같다.) [4점]

① $\frac{77}{125}$ ② $\frac{31}{50}$ ③ $\frac{78}{125}$ ④ $\frac{157}{250}$ ⑤ $\frac{79}{125}$

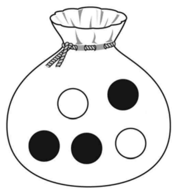
21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.) [4점]



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

22. x에 대한 이차방정식 $x^2-kx+72=0$의 두 근 α, β에 대하여 α, β, $\alpha+\beta$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

23. 주머니에 크기와 모양이 같은 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 두 번 반복하여 두 번째 꺼낸 공이 흰 공이었을 때, 첫 번째 꺼낸 공도 흰 공이었을 확률이 p이다. $40p$의 값을 구하시오. [3점]



24. 함수 $f(x)=3x^2+4x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

25. 구간 $[0, 4]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & (0\le x\le 1)\\ a(x-4) & (1<x\le 4)\end{cases}$$

일 때, $\mathrm{E}(6X+5)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

26. 수직선 위의 원점에 있는 두 점 A, B를 다음의 규칙에 따라 이동시킨다.

(가) 주사위를 던져 5 이상의 눈이 나오면 A를 양의 방향으로 2만큼, B를 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다. (나) 주사위를 던져 4 이하의 눈이 나오면 A를 음의 방향으로 2만큼, B를 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

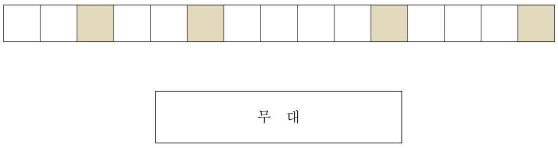
주사위를 5번 던지고 난 후 두 점 A, B 사이의 거리가 3 이하가 될 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases}a_{2n-1}=2^{n+1}-3 & (n\ge 1)\\ a_{2n}=4^{n-1}+2^n & (n\ge 1)\end{cases}$$

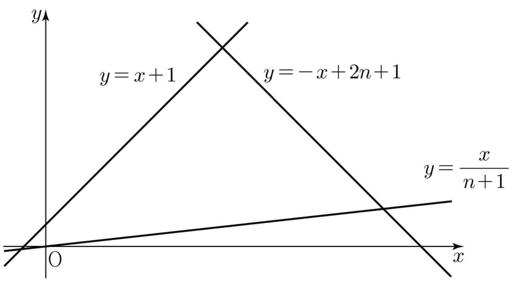
일 때, $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_{4n}}{T_{2n-1}}$의 값을 구하시오. [4점]

28. 어느 공연장에 15개의 좌석이 일렬로 배치되어 있다. 이 좌석 중에서 서로 이웃하지 않도록 4개의 좌석을 선택하려고 한다. 예를 들면, 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 좌석을 선택한다.



이와 같이 좌석을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 좌석을 선택하는 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

29. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 세 직선 $y=x+1$, $y=-x+2n+1$, $y=\dfrac{x}{n+1}$로 둘러싸인 삼각형의 내부 (경계선 제외)에 있는 점 (x, y)중에서 x, y가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $a_n=133$인 n의 값을 구하시오. [4점]



30. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $1<x<10^5$인 x에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 A라 할 때, $\log A$의 값을 구하시오. (단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.) [4점]

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} g(x^k)=g(x^{10})+2$
(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} f(kx)=3f(x)$

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2016년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ③

$\log_4 72 - \log_2 6 = \log_4 72 - \log_{2^2} 6^2$

$= \log_4 \frac{72}{36}$

$= \log_4 2$

$= \frac{1}{2}\log_2 2$

$= \frac{1}{2}$

2) ④

$AB + A = A(B+E)$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB+A$의 $(1, 2)$성분은 7이다.

3) ⑤

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 13x + 10$에서

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 13$

$\therefore\ f'(1) = 3 + 4 + 13 = 20$

4) ①

$\lim_{x\to 1+} f(x) - \lim_{x \to 2-} f(x) = -1 - 1 = -2$

5) ④

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A^C \cap B)$

$= \frac{5}{6} - \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} + \mathrm{P}(B) - \frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$= \frac{5}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}$

6) ①

수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+2} = a_n + 2$를 만족시키므로

수열 $\{a_{2n-1}\}$과 수열 $\{a_{2n}\}$은 각각 공차가 2인 등차수열이다.

$a_1 = 1,\ a_2 = p$이므로

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{5} a_{2k}$

$= \frac{5}{2}(a_1 + a_9) + \frac{5}{2}(a_2 + a_{10})$

$= \frac{5}{2}(2+8) + \frac{5}{2}(2p+8)$

$= 45 + 5p$

$45 + 5p = 70$에서 $p = 5$이다.

7) ②

과수원에서 생산되는 사과의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 30^2)$를 따른다.

따라서 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(350,\ \left(\frac{30}{\sqrt{9}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(350,\ 10^2)$를 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(345 \le \overline{X} \le 365) = \mathrm{P}\left(\frac{345-350}{10} \le Z \le \frac{365-350}{10}\right)$

$= \mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1.5)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.1915 + 0.4332$

$= 0.6247$

8) ④

주어진 식에 의하여

$\log P_1 = k - \frac{1000}{0+250} = k - 4$

$\log P_2 = k - \frac{1000}{50+250} = k - \frac{10}{3}$

$\log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1$

$= \left(k - \frac{10}{3}\right) - (k-4) = \frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{2}{3}}$

9) ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{3^n} - 4\right) = 2$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3^n} - 4\right) = 0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n} = 4$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n + 2^n}{3^{n-1}+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3} + \frac{4}{3^n}} = \frac{4+0}{\frac{1}{3}+0} = 12$

10) ③

$\log_2 x = X,\ \log_3 y = Y$라 하면

$\log_x y = \log_3 8$에서 $\frac{\log_3 y}{\log_3 x} = 3\log_3 2$

$\log_3 y = 3\log_3 2 \cdot \log_3 x$

$= 3\log_3 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 3}$

$= 3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 x$ …… ㉠

㉠을 $4(\log_2 x)(\log_3 y) = 3$에 대입하면

$4(\log_2 x)\{3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 x\} = 3$

$(\log_2 x)^2 = \frac{1}{4(\log_3 2)^2} = \left(\frac{\log_2 3}{4}\right)^2$

위의 방정식의 해 $\alpha > 1$이므로 $\log_2 \alpha > 0$이다.

$\therefore \log_2 x = \frac{\log_2 3}{2} = \log_2 \sqrt{3}$

따라서 $x = \sqrt{3}$, 즉 $\alpha = \sqrt{3}$이다.

$x = \sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면

$\log_3 y = 3(\log_3 2)^2 \cdot \log_2 \sqrt{3}$

$= \frac{3}{2}\log_3 2 = \log_3 2\sqrt{2}$

따라서 $y = 2\sqrt{2}$, 즉 $\beta = 2\sqrt{2}$이다.

$\therefore \alpha\beta = \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

11) ②

$n=1$일 때, 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

구하는 넓이는 $\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}dx$이다.

$f(x)=g(x)$에서 $x^2-6x+7=x+1$

$x^2-7x+6=0$, 즉 $(x-1)(x-6)=0$

$\therefore \alpha=1,\ \beta=6$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_0^1\{x^2-7x+6\}dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+6x\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6=\frac{17}{6}$

12) ⑤

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_n,

$\beta_n(\alpha_n<\beta_n)$이라 하면

직선 $y=g(x)$의 기울기가 1이므로 두 점사이의 거리는

$\sqrt{2}(\beta_n-\alpha_n)$이다.

α_n, β_n은 방정식 $f(x)=g(x)$,

즉 $x^2-7x+7-n=0$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=7$, $\alpha_n\beta_n=7-n$이다.

$\therefore a_n^2=\left\{\sqrt{2}(\beta_n-\alpha_n)\right\}^2$

$=2\left\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\right\}$

$=2\{7^2-4(7-n)\}$

$=8n+42$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n^2=\sum_{n=1}^{10}(8n+42)$

$=8\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10\cdot 42$

$=860$

13) ①

행렬 M^2의 (i,i)성분은 행렬 M의 i행에 대응하는 그래프 G의 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같다.

또한, 행렬 M의 i행의 성분 중 1의 개수는 i행에 대응하는 그래프 G의 꼭짓점에 연결된 변의 개수와 같다.

(단, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)

주어진 행렬 M^2에 의하여 행렬 M의 1, 2, 3, 4, 5행에 대응하는 그래프 G의 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 각각 4, 3, 3, 3, 3이다.

$\therefore a=4+3+3+3+3=16,\ b=1$

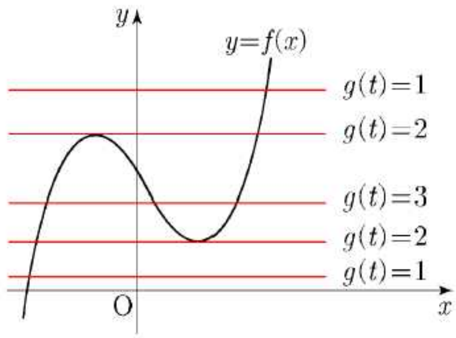
$\therefore a+b=17$

14) ⑤

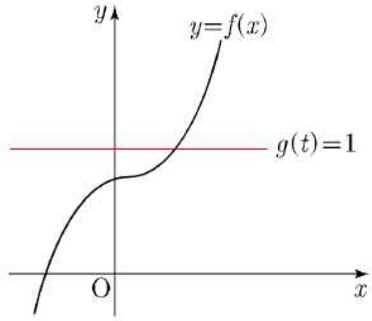
$f(x)=2x^3+ax^2+6x-3$이라 하면 $g(t)$는

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 교점의 개수와 같다.

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지면 그림과 같이 t가 극값과 같을 때를 기준으로 $g(t)$의 값이 변한다.



따라서 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)$가 그림과 같이 극값을 갖지 않아야 한다.



$f(x)=2x^3+ax^2+6x-3$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+6$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 실근을 갖지 않으면 된다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-36\le 0$에서 $-6\le a\le 6$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 $6-(-6)+1=13$개다.

15) ⑤

ㄱ. $AB=A-B$에서

$AB-A+B-E=-E$

$(A+E)(B-E)=-E$

$\therefore (A+E)^{-1}=E-B$

$(A+E)(E-B)=E$, $(E-B)(A+E)=E$이므로

$(A+E)(E-B)=(E-B)(A+E)$에서

$AB=BA$ (참)

ㄴ. $AB=A-B$이고 $AB=BA$이므로

$2BA+2B=A^2$에서

$2(A-B)+2B=A^2$, 즉 $A^2=2A$

$A^2-2A-3E=-3E$에서

$(A+E)(A-3E)=-3E$

$\therefore (A-3E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A+E)$

따라서 $A-3E$의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $(A+E)(A-3E)=-3E$에서

$(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(3E-A)$

ㄱ에서 $(A+E)^{-1}=E-B$이므로

$\frac{1}{3}(3E-A)=E-B$

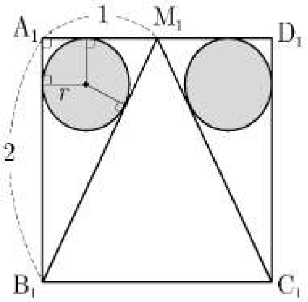
$\therefore\ A=3B$

$\therefore\ (A+B)^2=(4B)^2=16B^2$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

16) ①

합동인 두 삼각형 $\mathrm{A_1B_1M_1}$과 $\mathrm{M_1C_1D_1}$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하자.



삼각형 $\mathrm{A_1B_1M_1}$에 내접하는 원의 중심에서 모든 변에 이르는 거리는 r이므로

삼각형 $\mathrm{A_1B_1M_1}$의 넓이는 $\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{A_1B_1}}+\overline{\mathrm{B_1M_1}}+\overline{\mathrm{M_1A_1}})r$로 나타낼 수 있다.

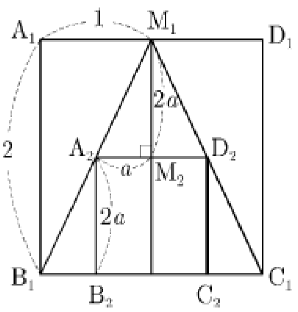
그런데 삼각형 $\mathrm{A_1B_1M_1}$는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{B_1M_1}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$이다.

따라서 $\frac{1}{2}(2+1+\sqrt{5})r=1$에서 $r=\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$이다.

$\therefore\ S_1=2\times\pi\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=(7-3\sqrt{5})\pi$

$\overline{\mathrm{A_2M_2}}=a$라 하면 삼각형 $\mathrm{M_1A_2M_2}$와 삼각형 $\mathrm{B_1M_1A_1}$은 닮음이므로 $\overline{\mathrm{M_1M_2}}=2a$이다.



따라서 $2a+2a=2$에서 $a=\frac{1}{2}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $(7-3\sqrt{5})\pi$이고 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(7-3\sqrt{5})\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\frac{(7-3\sqrt{5})\pi}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$

17) ③

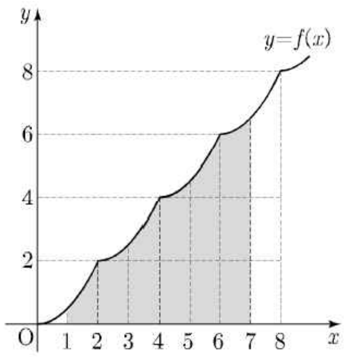
조건 (가)에 의하여 $f(0)=0$

조건 (나)에 의하여 $f(2)=f(0)+2=2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$에서 $4a=2$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$



함수 $f(x)$가 연속함수이므로 임의의 실수 n에 대하여

$\int_{n+2}^{n+4}f(x)dx=\int_{n}^{n+2}f(x+2)dx$

$=\int_{n}^{n+2}\{f(x)+2\}dx$

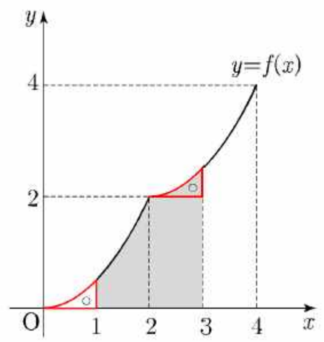
$=\int_{n}^{n+2}f(x)dx+4$

가 성립한다. 따라서

$\int_{1}^{7}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{5}f(x)dx+\int_{5}^{7}f(x)dx$

$=\int_{1}^{3}f(x)dx+\left(\int_{1}^{3}f(x)dx+4\right)+\left(\int_{1}^{3}f(x)dx+8\right)$

$=3\int_{1}^{3}f(x)dx+12$



위 그림에서

$\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}x^2dx+2=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2+2=\frac{10}{3}$

$\therefore \displaystyle\int_1^7 f(x)dx = 3\times\frac{10}{3}+12=22$

18) ⑤

점 A의 x좌표를 a라 하면 A의 좌표는 $(a,\ 2^{a-1}+1)$
점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
점 B의 좌표는 $(2^{a-1}+1,\ a)$
점 B가 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$a=\log_2(2^{a-1}+2)$

$2^a=2^{a-1}+2$

$2^{a-1}=2$

$\therefore\ a=2$

점 A의 y좌표는 $2^{2-1}+1=3$
직선 AC가 x축과 평행하므로 점 C의 y좌표는 3이다.
$\log_2(x+1)=3$에서 $x=2^3-1=7$

$\therefore$ A$(2,\ 3)$, B$(3,\ 2)$, C$(7,\ 3)$

$\therefore\ p=\dfrac{2+3+7}{3}=4,\ q=\dfrac{3+2+3}{3}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore\ p+q=\dfrac{20}{3}$

19) ④

(*)에서

$a_{n+1}+2=-\dfrac{3a_n+2}{a_n}+2=-\dfrac{a_n+\boxed{2}}{a_n}\ (n\ge 1)$ ⋯⋯ ㉠

이다. 여기서

$b_n=\dfrac{1}{a_n+2}\ (n\ge 1)$

이라 하면 $a_1=-\dfrac{5}{3}$이므로 $b_1=\dfrac{1}{-\dfrac{5}{3}+2}=3$이고

$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+2}=-\dfrac{a_n}{a_n+2}$ ($\because$ ㉠)

$=-\dfrac{(a_n+2)-2}{a_n+2}$

$=-1+\dfrac{2}{a_n+2}$

$=2b_n-\boxed{\ 1\ }\ (n\ge 1)$

이다.

$b_{n+1}-1=2b_n-2=2(b_n-1)$

이므로 수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 $b_1-1=2$이고 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ b_n-1=2^n$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$b_n=\boxed{2^n+1}\ (n\ge 1)$

이므로

$a_n=\dfrac{1}{2^n+1}-2\ (n\ge 1)$

이다.

$\therefore\ p=2,\ q=1,\ f(n)=2^n+1$

$\therefore\ p\times q\times f(5)=2\times 1\times(2^5+1)=66$

20) ③

앞면이 보이도록 바닥에 놓여 있는 동전의 개수가 a, 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있는 동전의 개수가 b일 때, $(a,\ b)$로 나타내기로 하면
최초의 상태는 $(2,\ 3)$이고 3번의 시행의 결과도 $(2,\ 3)$이다.
가능한 경우를 표를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

	시행		시행		시행		
(2, 3)	⇨	(2, 3)	⇨	(2, 3)	⇨	(2, 3)	(i)
				(0, 5)			(ii)
				(4, 1)			(iii)
	⇨	(0, 5)	⇨	(2, 3)	⇨		(iv)
	⇨	(4, 1)	⇨	(2, 3)	⇨		(v)
				(4, 1)			(vi)

(i)의 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{27}{125}$$

(ii)의 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times 1=\frac{3}{50}$$

(iii)의 확률은

$$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{27}{250}$$

(iv)의 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times 1\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{50}$$

(v)의 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{27}{250}$$

(vi)의 확률은

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_1C_1\times{}_4C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{18}{250}$$

(i)~(vi)에서 구하는 확률은

$$\frac{27}{125}+\frac{3}{50}+\frac{27}{250}+\frac{3}{50}+\frac{27}{250}+\frac{18}{250}=\frac{78}{125}$$

21) ②

점 B, C의 x좌표를 각각 $b,\ c$라 하면
직선 m과 곡선 $y=f(x)$가 두 점 B, C에서 만나고 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)-x=(x-b)^2(x-c)$ ⋯⋯ ㉠

로 놓을 수 있다.
점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 좌표는 $(b,\ b)$이다.
직선 l은 점 B를 지나며 직선 $y=x$와 수직이므로 기울기가 -1이다.
따라서 직선 l의 방정식은 $y=-x+2b$이다.
점 A는 직선 l의 y절편이므로 점 A의 좌표는 $(0,\ 2b)$, 즉 $f(0)=2b$이다.
문제의 조건에서 $f(0)>0$이므로 $b>0$이다.
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-b^2c=2b$

$\therefore\ bc=-2$ ($\because\ b>0$) ⋯⋯ ㉡

직선 l은 점 A에서 곡선 $y=f(x)$와 접하므로 $f'(0)=-1$이다.
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-1=2(x-b)(x-c)+(x-b)^2$ ⋯⋯ ㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)-1=2bc+b^2=-2$

$b^2=2$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ b=\sqrt{2}$ ($\because\ b>0$)

$b=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면 $c=-\sqrt{2}$

구하는 값은 $f'(c)$이므로 ㉢에 $x=c$를 대입하면

$f'(c)-1=(c-b)^2=(-2\sqrt{2})^2=8$

$\therefore\ f'(c)=9$

22) 18

$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\beta=\alpha+(\alpha+\beta)$에서 $\beta=2\alpha\cdots\cdots$ ㉠

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=72$

$\alpha\beta=72$에 ㉠을 대입하면

$2\alpha^2=72$

$\therefore\ \alpha=\pm 6,\ \beta=\pm 12$ ($\because$ ㉠)

그런데 $\alpha+\beta=k>0$이므로

$\alpha=6,\ \beta=12$

$\therefore\ k=\alpha+\beta=18$

23) 10

(ⅰ) 첫 번째 꺼낸 공과 두 번째 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률은

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}\times\frac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1}=\frac{1}{10}$$

(ⅱ) 첫 번째 꺼낸 공이 검은 공이고 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1}=\frac{3}{10}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$p=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{3}{10}}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 40p=10$

24) 21

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(x)dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^3(3x^2+4x)dx$

$=\frac{1}{2}\left[x^3+2x^2\right]_1^3$

$=21$

25) 15

$\mathrm{P}(0\le X\le 4)=\int_0^4 f(x)dx=1$이어야하므로

$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx$

$=\int_0^1\frac{1}{2}x\,dx+\int_1^4 a(x-4)dx$

$=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1+a\left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_1^4$

$=\frac{1}{4}-\frac{9}{2}a$

$=1$

$\therefore\ a=-\frac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\int_0^4 xf(x)dx$

$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^4 xf(x)dx$

$=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx+\int_1^4\frac{4x-x^2}{6}dx$

$=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{18}\right]_1^4$

$=\frac{1}{6}+\frac{3}{2}=\frac{5}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(6X+5)=6\times\mathrm{E}(X)+5=10+5=15$

[다른 풀이]

$f(x)$가 연속확률변수 X의 확률밀도함수이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(1)=\lim_{x\to 1+}f(x)$에서 $\frac{1}{2}=-3a$

$\therefore\ a=-\frac{1}{6}$

⋮ (생략)

26) 121

5 이상의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 4 이하의 눈이 나오는 횟수는 $5-X$이므로

점 A의 위치는 $2X-2(5-X)=4X-10$이고

점 B의 위치는 $-X+(5-X)=5-2X$이다.

이때, 두 점 A, B 사이의 거리는

$|(4X-10)-(5-2X)|=|6X-15|$

이다.

$|6X-15|\le 3$에서

$-3\le 6X-15\le 3$, 즉 $2\le X\le 3$

주사위를 던져 5 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{3}\right)$를 따른다.

따라서 두 점 A, B 사이의 거리가 3 이하가 될 확률은

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{81}$

$\therefore\ p=81,\ q=40$

$\therefore\ p+q=121$

27) 16

계차수열의 정의에 의하여

$a_{n+1}=a_1+\sum_{k=1}^{n}b_n=a_1+T_n$이므로

$T_n=a_{n+1}-a_1$이다. 따라서

$T_{4n}=a_{4n+1}-a_1$

$=(2^{2n+2}-3)-1$ ($\because\ 4n+1=2(2n+1)-1$)

$=4^{n+1}-4$

이고

$T_{2n-1}=a_{2n}-a_1=(4^{n-1}+2^n)-1$

이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_{4n}}{T_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-4}{4^{n-1}+2^n-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{4^n}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}}$$

$=16$

28) 495

선택된 4개의 좌석을 ○로 표현하자.

A○B○C○D○E

조건을 만족시키려면 A, E 자리엔 각각 0개 이상의 좌석이 놓이면 되고, B, C, D 자리엔 각각 1개 이상의 좌석이 놓이면 된다.

A, B, C, D, E 자리에 놓이는 좌석의 수를 각각 a, b, c, d, e라 하면

$a+b+c+d+e=11$

$b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면

$a+b'+c'+d'+e=8$

구하는 경우의 수는 위의 등식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d', e의 순서쌍 (a, b', c', d', e)의 개수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{5+8-1}C_8={}_{12}C_4=495$

29) 12

직선 $y=x+1$과 $y=-x+2n+1$의 교점의 x좌표는

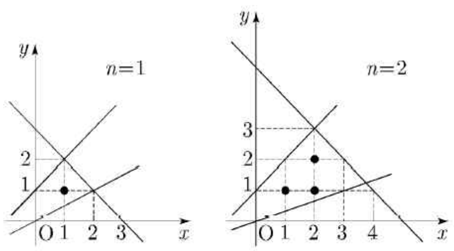
$x+1=-x+2n+1$에서 $x=n$이다.

따라서 두 직선은 $(n, n+1)$에서 만난다.

또한, 직선 $y=-x+2n+1$의 x절편은 $2n+1$이고

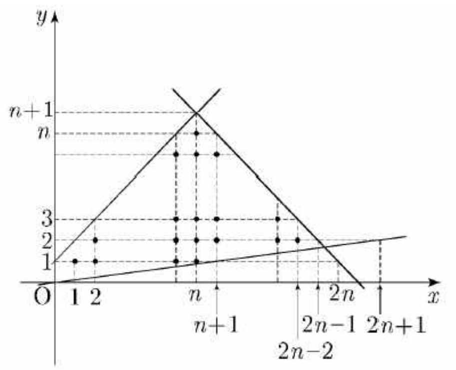
직선 $y=\frac{x}{n+1}$는 두 점 $(n+1, 1)$과 $(2n+2, 2)$를 지난다.

(i) $n=1$, 2일 때,



위의 그림에서 $a_1=1$, $a_2=3$이다.

(ii) $n\ge 3$일 때,



직선 $y=-x+2n+1$과 $y=-x+2n+1$는 위의 그림과 같이 $2n-1<x<2n$인 범위에서 만난다.

$\therefore\ a_n=(1+2+\cdots+n)+\{(n-2)+(n-3)+\cdots+1\}$

$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$

$=n^2-n+1$

(i),(ii)에서 $a_n=n^2-n+1\ (n\ge 1)$

$a_n=n^2-n+1=133$에서

$n(n-1)=132=12\cdot 11$

$\therefore\ n=12$

30) 23

모든 자연수 k에 대하여

$g(x^k)=k\times g(x)-a_k$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_k가 존재한다.

조건 (가)에서

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=5g(x)+\sum_{k=1}^{5}a_k$이고

$g(x^{10})+2=10g(x)+a_{10}+2$이므로

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=g(x^{10})+2$에서

$5g(x)=a_{10}-\sum_{k=1}^{5}a_k+2$

위 등식의 우변이 정수이므로 $5g(x)$도 정수이어야 한다.

$\therefore\ g(x)=0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$ ($\because\ 0\le g(x)<1$) …… ㉠

모든 자연수 k에 대하여

$f(kx)\ge f(x)$

이다. 조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{3}f(kx)=3f(x)$

이므로 $f(3x)=f(x)$이어야 한다.

$\log 3x=f(x)+g(x)+\log 3$이므로

$f(3x)=f(x)$이려면 $g(x)+\log 3<1$이어야 한다.

$\therefore\ g(x)<1-\log 3=0.5229$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$

(i) $g(x)=0$이면

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=0$이고 $g(x^{10})+2=2$이므로

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)\ne g(x^{10})+2$

(ii) $g(x)=\frac{1}{5}$이면

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+0=2$이고

$g(x^{10})+2=2$이므로

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=g(x^{10})+2$

(iii) $g(x)=\frac{2}{5}$이면

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+0=2$

$g(x^{10})+2=2$이므로

$\sum_{k=1}^{5}g(x^k)=g(x^{10})+2$

(i),(ii),(iii)에서 $g(x)=\frac{1}{5}$ 또는 $g(x)=\frac{2}{5}$

$1<x<10^5$이므로 $0\le f(x)<5$이다.

따라서 x가 조건을 만족시킬 때,

$$\log x = f(x) + g(x)$$

이다. (단, $f(x) = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고 $g(x) = \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$)

$\therefore\ \log A = \sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1) + \frac{1}{5}\right\} + \sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1) + \frac{2}{5}\right\}$

$= 11 + 12 = 23$