2016학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. ${}_3\mathrm{H}_1 + {}_3\mathrm{H}_2 + {}_3\mathrm{H}_3$의 값은? [2점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $(A+B)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$이고 행렬 A의 모든 성분의 합이 2일 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

3. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(2, 3, -1)$, $\mathrm{B}(-1, 3, 2)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 (a, b, c)라 할 때, $a+b+c$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

4. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$가 있다. 행렬 AB로 나타내어지는 일차변환에 의하여 두 점 $(1, 0)$, $(0, 1)$이 각각 두 점 $(0, 2)$, $(-2, 0)$으로 옮겨질 때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

5. 쌍곡선 $7x^2 - ay^2 = 20$ 위의 점 $(2, b)$에서의 접선이 점 $(0, -5)$를 지날 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

6. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = e^x + \int_0^1 tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)dx$의 값은? [3점]

① $e-1$ ② $e+1$ ③ $2e-1$
④ $2e$ ⑤ $2e+1$

7. 어느 과수원에서 생산되는 사과의 무게는 평균이 350g이고 표준편차가 30g인 정규분포를 따르고, 배의 무게는 평균이 490g이고 표준편차가 40g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 총합을 X(g)이라 하고, 이 과수원에서 생산된 배 중에서 임의로 선택한 4개의 무게의 총합을 Y(g)이라 하자. $X \geq 3240$이고 $Y \geq 2008$일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 사과의 무게와 배의 무게는 서로 독립이다.) [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.4	0.16
0.6	0.23
0.8	0.29
1.0	0.34

① 0.0432 ② 0.0482 ③ 0.0544
④ 0.0567 ⑤ 0.0614

8. 어느 액체의 끓는 온도 T(℃)와 증기압 P(mmHg) 사이에는 다음 관계식이 성립한다.

$$\log P = k - \frac{1000}{T+250} \text{ (단, } k\text{는 상수)}$$

이 액체의 끓는 온도가 0℃일 때와 50℃일 때의 증기압을 각각 P_1(mmHg), P_2(mmHg)라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$의 값은? [3점]

① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{3}}$ ③ $10^{\frac{1}{2}}$ ④ $10^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{3}{4}}$

9. 주머니에 흰 공 1개, 파란 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 꺼낸 공과 같은 색의 공을 1개 추가하여 꺼낸 공과 함께 주머니에 넣는다. 이와 같은 시행을 두 번 반복하여 두 번째 꺼낸 공이 검은 공이었을 때, 첫 번째 꺼낸 공도 검은 공이었을 확률은? (단, 공의 크기와 모양은 모두 같다.) [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{11}{21}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{13}{21}$

10. $0 \le x \le \pi$에서 함수 $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos x$는 $x = \theta$일 때 최댓값을 갖는다. $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[11~12] 좌표평면에서 매개변수 θ로 나타내어진 곡선

$$x = 2\cos\theta + \cos 2\theta,\ y = 2\sin\theta + \sin 2\theta$$

에 대하여 11번과 12번의 두 물음에 답하시오. (단, θ는 실수이다.)

11. $\theta = \frac{\pi}{6}$에 대응하는 이 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기는? [3점]

① -2 ② $-\sqrt{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

12. $0 \le \theta \le \pi$일 때, 이 곡선의 길이는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

13. 이차함수 $f(x)=x^2+2kx+2k^2+k$가 있다. x에 대한 방정식

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)+3}}-\frac{1}{f(x)}=\frac{3}{f(x)\sqrt{f(x)+3}}$$

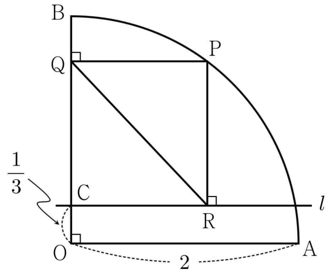
이 서로 다른 두 개의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

14. $x\geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{4}{1+x^2}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{3k}{n}\right)$의 값은? [4점]

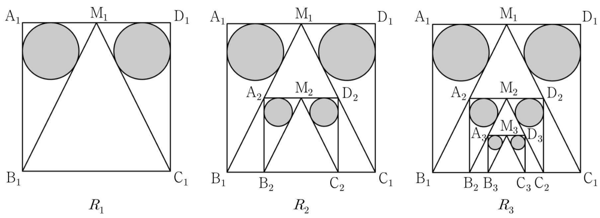
① $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB 위에 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}$인 점 C를 잡고, 점 C를 지나고 선분 OA와 평행한 직선을 l이라 하자. 호 AB 위를 움직이는 점 P에서 선분 OB와 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{24}$
④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{24}$

16. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 변 A_1D_1의 중점을 M_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1B_1M_1$과 $M_1C_1D_1$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 B_1C_1 위에 있고 삼각형 $M_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후 변 A_2D_2의 중점을 M_2라 할 때, 두 삼각형 $A_2B_2M_2$와 $M_2C_2D_2$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 두 꼭짓점이 변 B_2C_2 위에 있고 삼각형 $M_2B_2C_2$에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 그린 후 변 A_3D_3의 중점을 M_3이라 할 때, 두 삼각형 $A_3B_3M_3$과 $M_3C_3D_3$에 각각 내접하는 두 원을 그리고, 두 원에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ② $\frac{4(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ③ $\frac{5(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$
④ $\frac{5(8-3\sqrt{5})}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5(9-4\sqrt{5})}{3}\pi$

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-\frac{5}{3}$이고

$$a_{n+1}=-\frac{3a_n+2}{a_n}\ (n\ge 1)\ \cdots\cdots\ (*)$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

(*)에서

$$a_{n+1}+2=-\frac{a_n+\boxed{(가)}}{a_n}\ (n\ge 1)$$

이다. 여기서

$$b_n=\frac{1}{a_n+2}\ (n\ge 1)$$

이라 하면 $b_1=3$이고

$$b_{n+1}=2b_n-\boxed{(나)}\ (n\ge 1)$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=\boxed{(다)}\ (n\ge 1)$$

이므로

$$a_n=\frac{1}{\boxed{(다)}}-2\ (n\ge 1)$$

이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p\times q\times f(5)$의 값은? [4점]

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases}1+\sin x & (x\le 0)\\ -1+\sin x & (x>0)\end{cases}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)f(-x)=-1$

ㄴ. 함수 $f(f(x))$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이다.

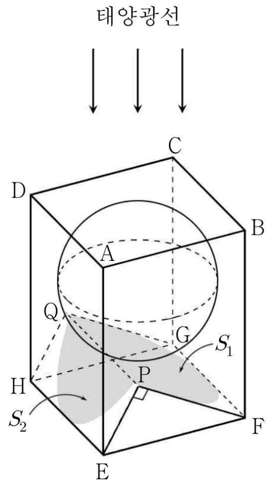
ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 좌표공간에서 구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$와 xy평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하자. 점 P에서 이 구와 접하고 점 A$(3, 3, -4)$를 지나는 평면을 α라 할 때, 원점과 평면 α 사이의 거리는? [4점]

① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

20. 한 변의 길이가 8인 정사각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+4\sqrt{3}$인 직육면체 ABCD−EFGH가 있다. 그림과 같이 이 직육면체의 바닥에 $\angle$EPF$=90°$인 삼각기둥 EFP−HGQ가 놓여 있고 그 위에 구를 삼각기둥과 한 점에서 만나도록 올려놓았더니 이 구가 밑면 ABCD와 직육면체의 네 옆면에 모두 접하였다. 태양광선이 밑면과 수직인 방향으로 구를 비출 때, 삼각기둥의 두 옆면 PFGQ, EPQH에 생기는 구의 그림자의 넓이를 각각 S_1, S_2 $(S_1>S_2)$라 하자. $S_1+\frac{1}{\sqrt{3}}S_2$의 값은? [4점]



① $\frac{20\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $8\sqrt{3}\pi$ ③ $\frac{28\sqrt{3}}{3}\pi$
④ $\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $12\sqrt{3}\pi$

21. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $1 < x < 10^5$인 x에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱을 A라 할 때, $\log A$의 값은?
(단, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.) [4점]

(가) $\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10}) + 2$
(나) $\sum_{k=1}^{3} f(kx) = 3f(x)$

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

22. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3n$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$이다. 합성변환 $f \circ f$에 의하여 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(2, 2)$, $\mathrm{C}(-3, 4)$, $\mathrm{D}(-3, -3)$이 옮겨진 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 S라 할 때, $81S$의 값을 구하시오. [3점]

24. 타원 $2x^2 + y^2 = 16$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{PF}}} = 3$일 때, $\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오.

[3점]

25. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다. (단, E는 단위행렬이다.)

> (가) $A-E$의 역행렬은 $A-3E$이다.
> (나) $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

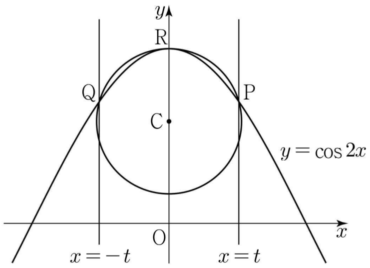
$A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오. [3점]

26. 이차함수 $f(x)$가

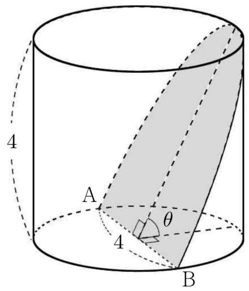
$$f(1)=2,\ f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}+\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

27. 좌표평면에서 곡선 $y=\cos 2x$가 두 직선 $x=t$, $x=-t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y=\cos 2x$가 y축과 만나는 점을 R라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 C$(0, f(t))$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}f(t)=\alpha$이다. 100α의 값을 구하시오. [4점]

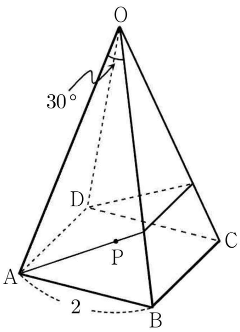


28. 그림과 같이 밑면의 지름의 길이와 높이가 모두 4인 원기둥이 있다. 밑면의 지름 AB를 포함하는 평면으로 이 원기둥을 잘랐을 때 생기는 단면이 원기둥의 밑면과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\tan\theta = 2$이다. 이 단면을 직선 AB를 회전축으로 하여 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V라 할 때, $\frac{3V}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]



29. 바닥에 놓여 있는 5개의 동전 중 임의로 2개의 동전을 선택하여 뒤집는 시행을 하기로 한다. 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여있는 상태에서 이 시행을 3번 반복한 결과 2개의 동전은 앞면이, 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있을 확률을 p라 할 때, $125p$의 값을 구하시오. (단, 동전의 크기와 모양은 모두 같다.) [4점]

30. 그림과 같이 옆면은 모두 합동인 이등변삼각형이고 밑면은 한 변의 길이가 2인 정사각형인 사각뿔 O-ABCD에서 $\angle \mathrm{AOB}=30^{\circ}$ 이다. 점 A에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 모서리 OB 위의 한 점과 모서리 OC 위의 한 점을 거쳐 점 D에 도착하는 최단경로를 l이라 하자. l 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 최댓값을 $a\sqrt{3}+b$라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2016년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ⑤

${}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+{}_3\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3=3+6+10=19$

[참고]

$x_1+x_2+\cdots+x_n \le m$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$을 정하는 방법의 수는

$\sum_{k=0}^{m} {}_n\mathrm{H}_k$이다.

그런데 $x_1+x_2+\cdots+x_n \le m$이면 $x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=m$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_{n+1}이 존재하므로 결국

$\sum_{k=0}^{m} {}_n\mathrm{H}_k={}_{n+1}\mathrm{H}_m$이다.

위의 공식에 의하여

${}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+{}_3\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{H}_3-{}_3\mathrm{H}_0=20-1=19$

로 계산할 수 있다.

2) ⑤

임의의 행렬 $M=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$에 대하여

$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_3+a_4 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은 행렬 M의 모든 성분의 합과 같다.

$(A+B)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$이므로 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합은 $3+6=9$이고

행렬 A의 모든 성분의 합이 2이므로 행렬 B의 모든 성분의 합은

$9-2=7$이다.

3) ③

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 2}{1+2},\ \frac{1\cdot 3+2\cdot 3}{1+2},\ \frac{1\cdot 2+2\cdot(-1)}{1+2}\right)$

즉, $(1,\ 3,\ 0)$이다.

$\therefore\ a=1,\ b=3,\ c=0$

$\therefore\ a+b+c=4$

4) ④

$AB\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ AB\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$이므로

$AB\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 즉 $AB=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$이다.

따라서 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=-2,\ b=-2,\ c=4,\ d=2$

$\therefore\ a+b+c+d=2$

5) ①

점 $(2,\ b)$이 쌍곡선 $7x^2-ay^2=20$ 위의 점이므로

$4\cdot 2^2-ab^2=20$

$\therefore\ ab^2=8$ …… ㉠

쌍곡선 $7x^2-ay^2=20$ 위의 점 $(2,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$7(2x)-a(by)=20$ 즉, $14x-aby=20$

직선 $14x-aby=20$이 점 $(0,\ -5)$를 지나므로

$5ab=20$

$\therefore\ ab=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=2$

$\therefore\ a+b=4$

[다른 풀이]

점 $(2,\ b)$이 쌍곡선 $7x^2-ay^2=20$ 위의 점이므로

$4\cdot 2^2-ab^2=20$

$\therefore\ ab^2=8$ …… ㉠

$7x^2-ay^2=20$에서 음함수의 미분법에 의하여

$14x-2ay\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{7x}{ay}$

점 $(2,\ b)$에서의 접선의 기울기는 두 점 $(2,\ b)$, $(0,\ -5)$를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$\frac{7\cdot 2}{ab}=\frac{b+5}{2}$

$28=ab^2+5ab=8+ab(\because$ ㉠$)$

$\therefore\ ab=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=2$

$\therefore\ a+b=4$

6) ②

$\int_0^1 tf(t)dt=c$라 하면 $f(x)=e^x+c$

$c=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 (te^t+ct)dt$

$=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt+\left[\frac{ct^2}{2}\right]_0^1$

$=e-\left[e^t\right]_0^1+\frac{c}{2}$

$=1+\frac{c}{2}$

$\therefore\ c=2$

$\therefore\ f(x)=e^x+2$

$\therefore\ \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (e^x+2)dx$

$=\left[e^x+2x\right]_0^1$

$=e+1$

7) ①

과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 9개의 무게의 표본평균을

$\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(350,\left(\frac{30}{3}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(350,\ 10^2)$을

따른다.

또한, 과수원에서 생산된 배 중에서 임의로 선택한 4개의 무게의

표본평균을 $\overline{Y}$라 하면 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(490,\left(\frac{40}{2}\right)^2\right)$, 즉

$\mathrm{N}(490,\ 20^2)$을 따른다.

$X=9\overline{X}$, $Y=4\overline{Y}$이고 확률변수 X와 Y는 독립이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 3240,\ Y\ge 2008)$

$=\mathrm{P}(X \geq 3240)\times\mathrm{P}(Y \geq 2008)$
$=\mathrm{P}(\overline{X} \geq 360)\times\mathrm{P}(\overline{Y} \geq 502)$
$=\mathrm{P}(Z \geq 1)\times\mathrm{P}(Z \geq 0.6)$
$=(0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1))\times(0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.6)$
$=(0.5-0.34)\times(0.5-0.23)$
$=0.0432$

8) ④

주어진 식에 의하여

$\log P_1 = k-\dfrac{1000}{0+250}=k-4$

$\log P_2 = k-\dfrac{1000}{50+250}=k-\dfrac{10}{3}$

$\log\dfrac{P_2}{P_1}=\log P_2-\log P_1$

$=\left(k-\dfrac{10}{3}\right)-(k-4)$

$=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \dfrac{P_2}{P_1}=10^{\frac{2}{3}}$

9) ④

(i) 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공 또는 파란 공이었을 때, 두 번째 꺼낸 공이 검은 공일 확률은

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_1}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\dfrac{3}{14}$

(ii) 첫 번째 꺼낸 공이 검은 공이었을 때, 두 번째 꺼낸 공도 검은 공일 확률은

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_1}\times\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1}=\dfrac{2}{7}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{14}+\frac{2}{7}}=\dfrac{4}{7}$

10) ②

$f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x$

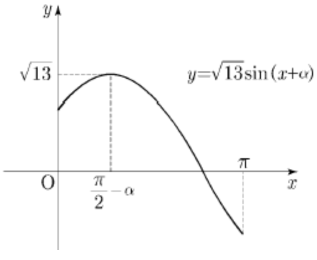
$=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos x$

$=\sin x+2\sqrt{3}\cos x$

$=\sqrt{13}\sin(x+\alpha)$ (단, $\tan\alpha=2\sqrt{3}$)

α를 예각으로 놓아도 문제의 일반성을 잃지 않는다.

이때, 함수 $f(x)$는 $0 \leq x \leq \pi$에서 $x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$일 때, 최댓값 $\sqrt{13}$을 갖는다.



$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

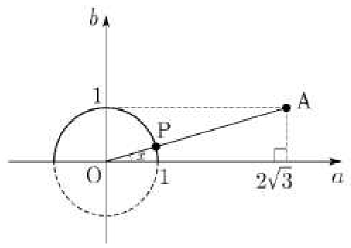
$\therefore\ \tan\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

[다른 풀이]

좌표평면에서 $\mathrm{A}(2\sqrt{3},1)$, $\mathrm{P}(\cos x, \sin x)$라 할 때, $\sin x+2\sqrt{3}\cos x$는 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 같다.

$0 \leq x \leq \pi$에서 점 P는 그림과 같이 반원 $a^2+b^2=1(b \geq 0)$ 위에 있으므로

세 점 O, A, P가 일직선상에 있을 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 최대가 된다.



따라서 θ는 선분 OA가 a축과 이루는 예각과 같다.

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

11) ③

$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta-2\sin2\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=2\cos\theta+2\cos2\theta$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\dfrac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta}$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$에 대응하는 이 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}}=-1$

12) ②

$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta-2\sin2\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=2\cos\theta+2\cos2\theta$이므로

$0 \leq \theta \leq \pi$일 때, 이 곡선의 길이는

$\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\pi}\sqrt{(-2\sin\theta-2\sin2\theta)^2+(2\cos\theta+2\cos2\theta)^2}\,d\theta$

$\displaystyle=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2(\cos\theta\cos2\theta+\sin\theta\sin2\theta)}\,d\theta$

$\displaystyle=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$

$\displaystyle=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta\ \left(\because\ \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\right)$

$\displaystyle=4\int_0^{\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

$\displaystyle=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\ (\because\ 0 \leq \theta \leq \pi)$

$\displaystyle=8\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8$

13) ①

$\frac{1}{\sqrt{f(x)+3}}-\frac{1}{f(x)}=\frac{3}{f(x)\sqrt{f(x)+3}}$ 에서

$f(x)-\sqrt{f(x)+3}=3$ (단, $f(x)\neq 0,\ f(x)\geq -3$)

$t=\sqrt{f(x)+3}\ (\geq 0)$이라 하면

$t^2-3-t=3$, 즉 $t^2-t-6=0$에서

$t=3$ ($\because\ t\geq 0$)

$\sqrt{f(x)+3}=3$이므로

$f(x)+3=3^2$에서 $f(x)=6$

방정식 $f(x)=6$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=6$이 서로 다른 두 점에서 만나면 된다.

$f(x)=(x+k)^2+k^2+k$이므로

이차함수 $f(x)$의 최솟값은 k^2+k이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=6$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k^2+k<6$이어야 한다.

$\therefore\ -3<k<2$

위 부등식을 만족시키는 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$이므로

구하는 모든 정수 k의 값의 합은 -2이다.

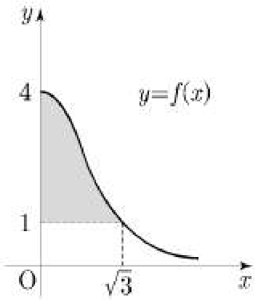
14) ③

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{3k}{n}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{3k}{n}\right)$

$=\frac{1}{3}\int_1^4 g(x)dx$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\int_1^4 g(x)dx$의 값은 그림의 어두운 부분의 넓이와 같다.

$f(x)=\frac{4}{1+x^2}=1$에서 $x=\sqrt{3}$ ($\because\ x\geq 0$)이므로

$\int_1^4 g(x)dx=\int_0^{\sqrt{3}}(f(x)-1)dx$

$=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2+1}dx-\sqrt{3}$

$x=\tan\theta(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$라 하면 $dx=\sec^2\theta d\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{4}{\tan^2\theta+1}\sec^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}4d\theta=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore\ \int_1^4 g(x)dx=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{3k}{n}\right)=\frac{1}{3}\int_1^4 g(x)dx=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{9}$

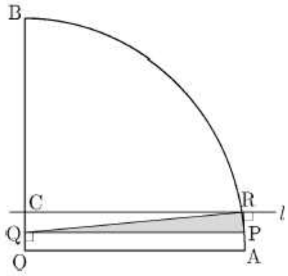
15) ⑤

삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$이다.

직선 l이 호 AB와 만나는 점을 D라 하자.

(i) 점 P가 점 A에서 출발하여 호 AD를 따라 점 D까지 움직일 때,

$\overline{PQ}$와 $\overline{PR}$의 길이가 모두 감소한다.



점 P가 점 A에 있을 때, 삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{1}{3}$이므로

점 P가 호 AD 위에 있을 때, 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다.

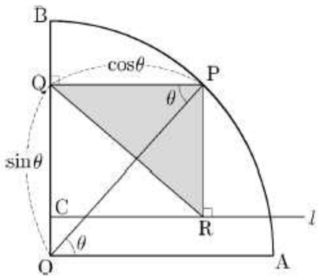
(ii) 점 P가 점 D에서 출발하여 호 AD를 따라 점 B까지 움직일 때,

$\angle OPA=\theta\ \left(\alpha\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ \angle DOA=\alpha\right)$라 하면

$\angle OPQ=\theta$이므로

$\overline{PQ}=2\cos\theta$, $\overline{OQ}=2\sin\theta$이고

$\overline{PR}=\overline{CQ}=\overline{OQ}-\overline{OC}=2\sin\theta-\frac{1}{3}$이다.



따라서 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하면

$f(\theta)=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$

$=\cos\theta\left(2\sin\theta-\frac{1}{3}\right)$

$=\sin 2\theta-\frac{1}{3}\cos\theta$

$f'(\theta)=2\cos 2\theta+\frac{1}{3}\sin\theta$

$=2-4\sin^2\theta+\frac{1}{3}\sin\theta$

$=-\frac{1}{3}(3\sin\theta+2)(4\sin\theta-3)$

$\alpha\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$에서 $3\sin\theta+2>0$이므로

$f(\theta)$는 $\sin\theta=\frac{3}{4}$일 때, 극대이자 최대이다.

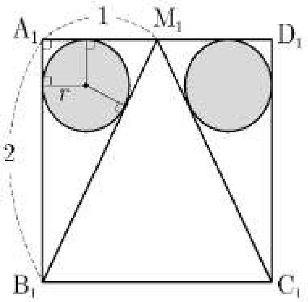
이때, $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로

$f(\theta)$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{7}}{4}\left(2\times\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\sqrt{7}}{24}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(\theta)$의 최댓값은 $\frac{7\sqrt{7}}{24}$이다.

16) ①

합동인 두 삼각형 $A_1B_1M_1$과 $M_1C_1D_1$에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하자.



삼각형 $A_1B_1M_1$에 내접하는 원의 중심에서 모든 변에 이르는 거리는 r이므로

삼각형 $A_1B_1M_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\left(\overline{A_1B_1}+\overline{B_1M_1}+\overline{M_1A_1}\right)r$로 나타낼 수 있다.

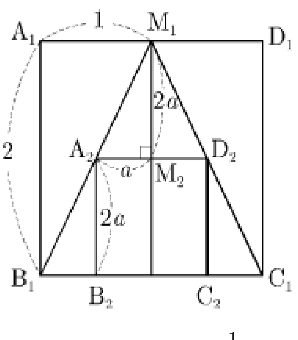
그런데 삼각형 $A_1B_1M_1$는 직각삼각형이므로

$\overline{B_1M_1}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times1=1$이다.

따라서 $\frac{1}{2}(2+1+\sqrt{5})r=1$에서 $r=\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$이다.

$\therefore\ S_1=2\times\pi\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=(7-3\sqrt{5})\pi$

$\overline{A_2M_2}=a$라 하면 삼각형 $M_1A_2M_2$와 삼각형 $B_1M_1A_1$은 닮음이므로 $\overline{M_1M_2}=2a$이다.



따라서 $2a+2a=2$에서 $a=\frac{1}{2}$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $(7-3\sqrt{5})\pi$이고 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(7-3\sqrt{5})\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\frac{(7-3\sqrt{5})\pi}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{4(7-3\sqrt{5})}{3}\pi$

17) ④

(*)에서

$a_{n+1}+2=-\frac{3a_n+2}{a_n}+2=-\frac{a_n+\boxed{2}}{a_n}\ (n\ge1)\ \cdots\cdots$ ㉠

이다. 여기서

$b_n=\frac{1}{a_n+2}\ (n\ge1)$

이라 하면 $a_1=-\frac{5}{3}$이므로 $b_1=\frac{1}{-\frac{5}{3}+2}=3$이고

$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}+2}=-\frac{a_n}{a_n+2}$ ($\because$ ㉠)

$=-\frac{(a_n+2)-2}{a_n+2}$

$=-1+\frac{2}{a_n+2}$

$=2b_n-\boxed{1}\ (n\ge1)$

이다.

$b_{n+1}-1=2b_n-2=2(b_n-1)$

이므로 수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 $b_1-1=2$이고 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ b_n-1=2^n$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은

$b_n=\boxed{2^n+1}\ (n\ge1)$

이므로

$a_n=\frac{1}{2^n+1}-2\ (n\ge1)$

이다.

$\therefore\ p=2,\ q=1,\ f(n)=2^n+1$

$\therefore\ p\times q\times f(5)=2\times1\times(2^5+1)=66$

18) ②

ㄱ. $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(1+\sin x)=1$

$\lim_{x\to0-}f(-x)=\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}(-1+\sin t)=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to0-}f(x)f(-x)=1\cdot(-1)=-1$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(-1+\sin x)=-1$

$\lim_{x\to0+}f(-x)=\lim_{t\to0-}f(t)=\lim_{t\to0-}(1+\sin t)=1$

$\therefore\ \lim_{x\to0}f(x)f(-x)=-1$ (참)

ㄴ. $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)\to0-$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(f(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=\lim_{t\to0-}(1+\sin t)=1$

$f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(f(x)) = f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$이므로 함수 $f(f(x))$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $g(x)=\{f(x)\}^2$라 하면 $g(0)=1$이므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{(1+\sin x)^2-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{2\sin x+\sin^2 x}{x}$$

$$=2\ \left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(-1+\sin x)^2-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{-2\sin x+\sin^2 x}{x}$$

$$=-2\ \left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$

$\lim\limits_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분불가능하다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. 미분가능한 두 함수 $(1+\sin x)^2$, $(-1+\sin x)^2$의 도함수는 각각 $2(1+\sin x)\cos x$, $2(-1+\sin x)\cos x$이고 이 두 함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=\{f(x)\}^2$라 하면

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}2(1+\sin x)\cos x=2$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}2(-1+\sin x)\cos x=-2$$

$\lim\limits_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$이므로

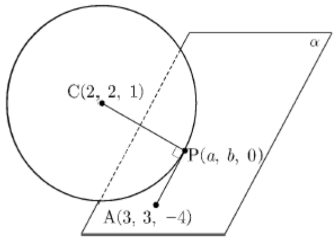
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분불가능하다. (거짓)

19) ③

구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$의 중심을 C라 하고

점 P가 xy 평면 위의 점이므로 $P(a, b, 0)$라 하자.



점 P는 구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 위의 점이므로

$(a-2)^2+(b-2)^2+(0-1)^2=9$

$\therefore\ (a-2)^2+(b-2)^2=8$ …… ㉠

구 $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$는 점 P에서 평면 α와 접하므로

$\overrightarrow{CP}\perp\alpha$

점 P와 A는 평면 α 위의 점이므로

$\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{AP}$

이다. 따라서 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$에서

$(a-2,\ b-2,\ -1)\cdot(a-3,\ b-3,\ 4)$

$=(a-2)(a-3)+(b-2)(b-3)-4$

$=a^2-5a+b^2-5b+8=0$ …… ㉡

㉠-㉡에서 $a+b=8$

$b=8-a$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$2(a-4)^2=0$

$\therefore\ a=b=4\ (\because\ b=8-a)$

$\overrightarrow{CP}=(2,\ 2,\ -1)$이고 $\overrightarrow{CP}\perp\alpha$이므로

평면 α의 법선벡터를 $\overrightarrow{CP}$로 하면

평면 α가 점 P를 지나므로 평면 α의 방정식은

$2(x-4)+2(y-4)-(z-0)=0$,

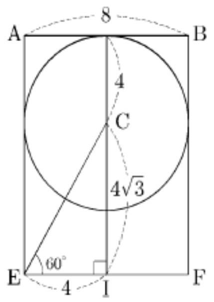
즉 $2x+2y-z=16$이다.

따라서 원점과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|-16|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{16}{3}$$

20) ④

주어진 입체를 옆면 ABFE가 정면에서 보이도록 나타낼 때, 구는 다음 그림과 같이 변 AB, AE, BF에 동시에 접하는 원이다.



위 그림에서 원의 중심을 C, 점 C에서 변 EF에 내린 수선의 발을 I라 하자.

원의 반지름의 길이가 4이고 $\overline{AE}=4+4\sqrt{3}$이므로

$\overline{CI}=4\sqrt{3}$이다.

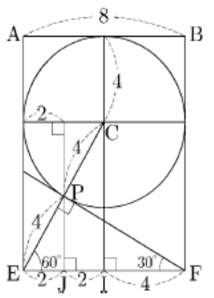
직각삼각형 CEI에서 $\overline{EI}=4$이므로 $\angle CEI=60^\circ$이다.

따라서 삼각형 CEF는 한 변의 길이가 8인 정삼각형이다.

$S_1>S_2$이므로 점 P는 F에서 원에 그은 접선 위에 존재한다.

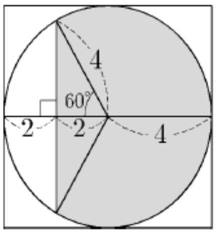
그런데 점 F에서 선분 CE에 내린 수선의 발은 선분 CE를 수직이등분하므로

점 P는 선분 CE의 중점이고 점 P에서 직선 PF와 원이 접한다.



점 P에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 J라 할 때, $\overline{EJ}=2$이다.

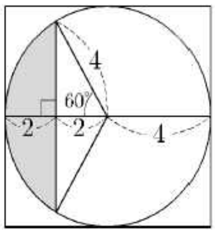
구의 중심을 지나며 직육면체의 밑면에 평행한 평면으로 주어진 입체를 자른 단면을 α라 하자.



S_1은 위 그림의 어두운 부분에 의해서 평면 PFGQ에 생기는 그림자의 넓이와 같다.
평면 α와 평면 PFGQ가 이루는 각은 30°이므로

$S_1\cos30^\circ = \frac{32}{3}\pi + 4\sqrt{3}$

$\therefore\ S_1 = \frac{64}{3\sqrt{3}}\pi + 8$



S_2은 위 그림의 어두운 부분에 의해서 평면 EPQH에 생기는 그림자의 넓이와 같다.
평면 α와 평면 EPQH가 이루는 각은 60°이므로

$S_2\cos60^\circ = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

$\therefore\ S_2 = \frac{32}{3}\pi - 8\sqrt{3}$

$\therefore\ S_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}S_2 = \left(\frac{64}{3\sqrt{3}}\pi + 8\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{32}{3}\pi - 8\sqrt{3}\right)$

$= \frac{32}{\sqrt{3}}\pi = \frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$

21) ⑤

모든 자연수 k에 대하여
$g(x^k) = k \times g(x) - a_k$
을 만족시키는 음이 아닌 정수 a_k가 존재한다.
조건 (가)에서

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = 5g(x) + \sum_{k=1}^{5} a_k$이고

$g(x^{10}) + 2 = 10g(x) + a_{10} + 2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10}) + 2$에서

$5g(x) = a_{10} - \sum_{k=1}^{5} a_k + 2$

위 등식의 우변이 정수이므로 $5g(x)$도 정수이어야 한다.

$\therefore\ g(x) = 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$ $(\because\ 0 \le g(x) < 1)$ …… ㉠

모든 자연수 k에 대하여
$f(kx) \ge f(x)$
이다. 조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{3} f(kx) = 3f(x)$

이므로 $f(3x) = f(x)$이어야 한다.
$\log 3x = f(x) + g(x) + \log 3$이므로
$f(3x) = f(x)$이려면 $g(x) + \log 3 < 1$이어야 한다.
$\therefore\ g(x) < 1 - \log 3 = 0.5229$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(x) = 0,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$

(ⅰ) $g(x) = 0$이면

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = 0$이고 $g(x^{10}) + 2 = 2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) \ne g(x^{10}) + 2$

(ⅱ) $g(x) = \frac{1}{5}$이면

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + 0 = 2$이고

$g(x^{10}) + 2 = 2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10}) + 2$

(ⅲ) $g(x) = \frac{2}{5}$이면

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + 0 = 2$

$g(x^{10}) + 2 = 2$이므로

$\sum_{k=1}^{5} g(x^k) = g(x^{10}) + 2$

(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)에서 $g(x) = \frac{1}{5}$ 또는 $g(x) = \frac{2}{5}$

$1 < x < 10^5$이므로 $0 \le f(x) < 5$이다.
따라서 x가 조건을 만족시킬 때,
$\log x = f(x) + g(x)$
이다. (단, $f(x) = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$이고 $g(x) = \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}$)

$\therefore\ \log A = \sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1) + \frac{1}{5}\right\} + \sum_{k=1}^{5}\left\{(k-1) + \frac{2}{5}\right\}$

$= 11 + 12 = 23$

22) 64

$a_7 = a_1 + \sum_{k=1}^{6}(a_{k+1} - a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{6} 3k = 1 + 63 = 64$

23) 90

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} \cos45^\circ & -\sin45^\circ \\ \sin45^\circ & \cos45^\circ \end{pmatrix}$$

따라서 변환 $f \circ f$를 나타내는 행렬은

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} \cos45^\circ & -\sin45^\circ \\ \sin45^\circ & \cos45^\circ \end{pmatrix}\right\}^2$$

$$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} \cos45^\circ & -\sin45^\circ \\ \sin45^\circ & \cos45^\circ \end{pmatrix}^2$$

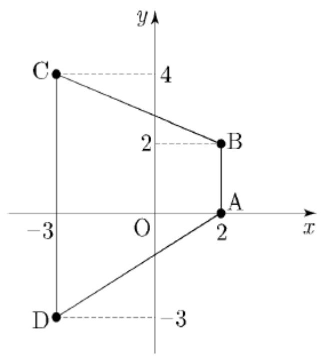
$$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} \cos90^\circ & -\sin90^\circ \\ \sin90^\circ & \cos90^\circ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{9}\begin{pmatrix} \cos90^\circ & -\sin90^\circ \\ \sin90^\circ & \cos90^\circ \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}$$

따라서 변환 $f\circ f$는 각 90°만큼 회전변환과 닮음비가 $\frac{2}{9}$인 닮음변환의 합성변환이다.

도형의 길이 또는 넓이는 회전변환에 의하여 변하지 않으므로 S는 사각형 ABCD의 넓이의 $\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{81}$배이다.



사각형 ABCD의 넓이는 위 그림에서 $\frac{1}{2}\times(2+9)\times 5=\frac{45}{2}$이므로

$S=\frac{45}{2}\times\frac{4}{81}=\frac{10}{9}$

$\therefore\ 81S=81\times\frac{10}{9}=90$

24) 12

$2x^2+y^2=16$에서 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=1$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2\times 4=8$이다.

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=8$ …… ㉠

$\frac{\overline{\mathrm{PF'}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=3$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=3\times\overline{\mathrm{PF}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{PF}}=2,\ \overline{\mathrm{PF'}}=6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=12$

25) 9

조건 (가)에 의하여

$(A-E)(A-3E)=E$

$A^2=4A-2E$ …… ㉠

조건 (나)에서 $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=(4A-2E)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=4A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-2E\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$=4\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-4\end{pmatrix}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-6\end{pmatrix}$

$\therefore\ x=15,\ y=-6$

$\therefore\ x+y=9$

26) 23

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}$가 존재하므로 $\lim_{x\to 0}\ln f(x)=0$이어야 한다.

$\therefore\ f(0)=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln f(x)}{f(x)-1}\times\frac{f(x)-1}{x}\right)$

$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\times\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ ($\because\ f(0)=1$)

$=1\times f'(0)=f'(0)$

$\therefore\ f'(1)=f'(0)+\frac{1}{2}$

$f(0)=1$이므로 $f(x)=ax^2+bx+1\,(a\neq 0)$이라 하면

$f(1)=2$에서 $a+b=1$ …… ㉠

$f'(x)=2ax+b$이므로

$f'(1)=f'(0)+\frac{1}{2}$에서 $2a=\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{3}{4}$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+1$

$\therefore\ f(8)=16+6+1=23$

27) 75

선분 PQ의 수직이등분선이 y축이므로 $f(t)$는 선분 PR을 수직이등분하는 직선의 y절편이다.

$\mathrm{P}(t,\ \cos 2t)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$이므로 선분 PQ의 중점은 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{\cos 2t+1}{2}\right)$이고

선분 PQ의 기울기는 $\frac{\cos 2t-1}{t}$이다. 따라서 선분 PR을 수직이등분하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{t}{\cos 2t-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{\cos 2t+1}{2}$

$\therefore\ f(t)=-\frac{t}{\cos 2t-1}\left(0-\frac{t}{2}\right)+\frac{\cos 2t+1}{2}$

$=\frac{t^2}{2(\cos 2t-1)}+\frac{\cos 2t+1}{2}$

$=\frac{t^2(\cos 2t+1)}{2(\cos^2 2t-1)}+\frac{\cos 2t+1}{2}$

$=-\frac{t^2(\cos 2t+1)}{2\sin^2 2t}+\frac{\cos 2t+1}{2}$

$\therefore\ \alpha=\lim_{t\to 0+}f(t)$

$=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{t^2(\cos 2t+1)}{2\sin^2 2t}+\frac{\cos 2t+1}{2}\right)$

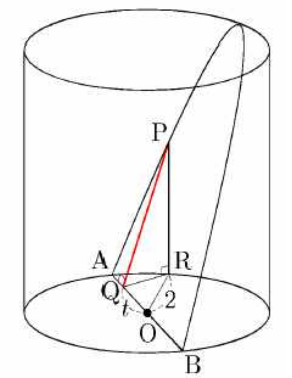
$=\lim_{t\to 0+}\left(-\left(\frac{2t}{\sin 2t}\right)^2\cdot\frac{\cos 2t+1}{8}+\frac{\cos 2t+1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 100\alpha=75$

28) 160

그림과 같이 밑면의 원의 중심을 O, 단면의 경계에 있는 점 P에서 선분 AB와 밑면에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하자.



$\overline{OQ}=t$라 하면 $\overline{OR}=2$이므로 $\overline{QR}=\sqrt{4-t^2}$이고

$\overline{PR}=\overline{QR}\tan\theta=2\sqrt{4-t^2}$이다.

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{\overline{QR}^2+\overline{PR}^2}=\sqrt{5(4-t^2)}$

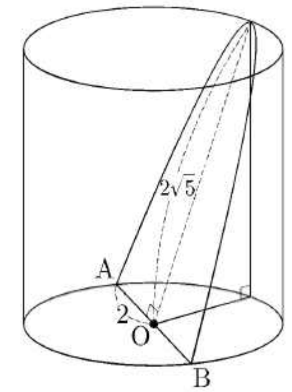
$\therefore\ V=2\pi\int_0^2 \overline{PQ}^2 dt$

$=2\pi\int_0^2 5(4-t^2)dt=10\pi\left[4t-\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{160}{3}\pi$

$\therefore\ \frac{3V}{\pi}=160$

[참고]

$\tan\theta=2$이므로 단면의 경계는 단축이 4이고 장축이 $4\sqrt{5}$인 타원의 일부이다.



선분 AB의 중점을 O라 하고 선분 AB를 포함하는 직선을 x축으로 놓으면 이 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$이다.

이것을 이용하여 $\pi\int_{-2}^2 y^2 dx$로 V의 값을 구할 수 있다.

29) 78

앞면이 보이도록 바닥에 놓여 있는 동전의 개수가 a, 뒷면이 보이도록 바닥에 놓여 있는 동전의 개수가 b일 때, (a, b)로 나타내기로 하면 최초의 상태는 $(2, 3)$이고 3번의 시행의 결과도 $(2, 3)$이다.

가능한 경우를 표를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

	시행		시행		시행		
(2, 3)	⇨	(2, 3)	⇨	(2, 3)	⇨	(2, 3)	(i)
				(0, 5)			(ii)
				(4, 1)			(iii)
	⇨	(0, 5)	⇨	(2, 3)	⇨		(iv)
	⇨	(4, 1)	⇨	(2, 3)	⇨		(v)
				(4, 1)			(vi)

(i)의 확률은

$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{27}{125}$

(ii)의 확률은

$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times1=\frac{3}{50}$

(iii)의 확률은

$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{27}{250}$

(iv)의 확률은

$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}\times1\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{50}$

(v)의 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{27}{250}$

(vi)의 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_1C_1\times{}_4C_1}{{}_5C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{18}{250}$

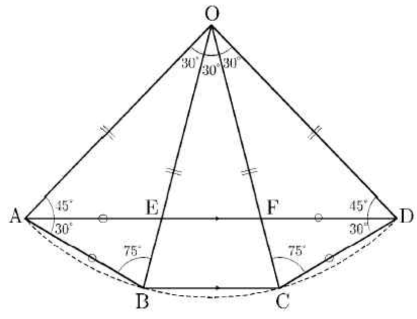
(i)~(vi)에서

$p=\frac{27}{125}+\frac{3}{50}+\frac{27}{250}+\frac{3}{50}+\frac{27}{250}+\frac{18}{250}=\frac{78}{125}$

$\therefore\ 125p=78$

30) 8

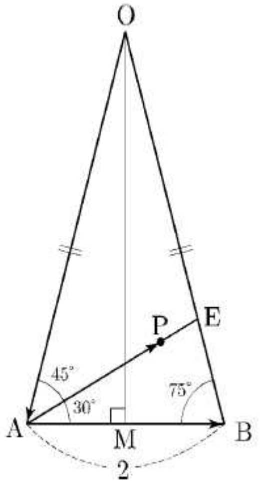
최단경로 l이 선분 OB, OC와 만나는 점을 각각 E, F라 하고 주어진 입체를 전개도로 나타내면 다음 그림과 같다.



위 전개도에서 최단경로 l은 선분 AD이다. 따라서 점 P는 전개도의 선분 AD 위에 있다.

(i) 점 P가 선분 AE 위에 있는 경우

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$



삼각형 OAB가 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면

선분 OM은 선분 AB를 수직이등분한다.

$\therefore\ \overline{OA}\cos(\angle OAB)=\overline{AM}=1$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overline{AB}\cdot\overline{AO}\cos(\angle OAB)=2\cdot 1=2$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=-2$

삼각형 OAD는 직각이등변삼각형이므로 $\angle OAD=45^\circ$

삼각형 OAB가 이등변삼각형이고 $\angle AOB=30^\circ$이므로

$\angle OAB=\angle OBA=75^\circ$

$\therefore\ \angle EAB=\angle OAB-\angle OAE=30^\circ$

따라서 삼각형 ABE는 $\angle BAE=30^\circ$이고 $\overline{AB}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overline{AB}\cdot\overline{AP}\cos(\angle EAB)$

$=2\cdot\overline{AP}\cos 30^\circ=\sqrt{3}\times\overline{AP}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=-2+\sqrt{3}\,\overline{AP}$

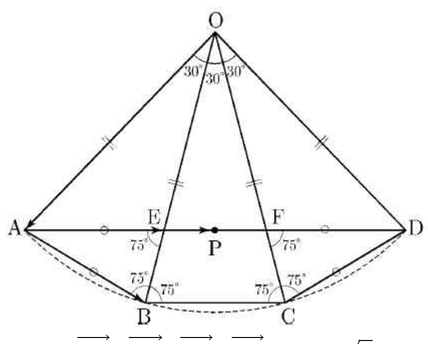
$0\le\overline{AP}\le 2$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$는 $\overline{AP}=2$,

즉 점 P가 점 E에 있을 때 최댓값 $-2+2\sqrt{3}$을 갖는다.

(ii) 점 P가 선분 EF 위에 있는 경우

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EP}$



(i)에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-2+2\sqrt{3}$

$\angle AEB=\angle OBC$이므로 $\overline{EF}/\!/\overline{BC}$이다.

그런데 사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$이다.

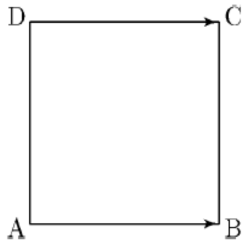
따라서 $\overrightarrow{EP}\perp\overrightarrow{AP}$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EP}=0$이다.

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EP}$

$=-2+2\sqrt{3}$

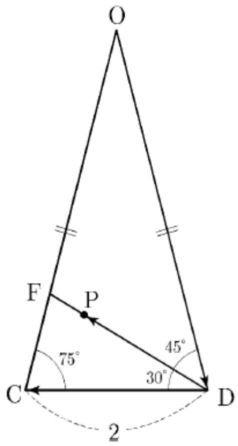
(iii) 점 P가 선분 EF 위에 있는 경우

사각형 ABCD가 정사각형이므로 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{DC}\cdot(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP})$

$=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DP}$



(i)과 같은 방법으로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$는 $\overline{DP}=2$,

즉 점 P가 점 F에 있을 때 최댓값 $-2+2\sqrt{3}$을 갖는다.

(i),(ii),(iii)에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$는 점 P가 선분 EF 위에 있을 때, 최댓값 $-2+2\sqrt{3}$를 갖는다.

$\therefore\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$