제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\log_2 9 \times \log_3 8$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AX=A+B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

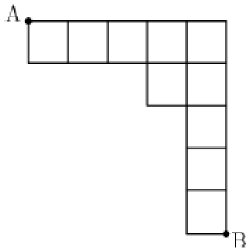
3. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$이고, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$일 때, $|\vec{a}-2\vec{b}|$의 값은? [2점]

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

4. 함수 $f(x)=8\sin x+4\cos 2x+1$의 최댓값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.



이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

6. 좌표평면에서 원점을 중심으로 90° 만큼 회전하는 회전변환을 f, 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $k(k>0)$인 닮음변환을 g라 하자. 합성변환 $g\circ f$에 의하여 원 $C_1:(x-5)^2+y^2=16$이 옮겨진 원을 C_2라 할 때, 두 원 C_1, C_2가 외접하기 위한 모든 k의 값의 합은? [3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{31}{9}$ ③ $\frac{32}{9}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{34}{9}$

7. 어느 상품의 수요량이 D, 공급량이 S일 때의 판매가격을 P라 하면 관계식

$$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S$$

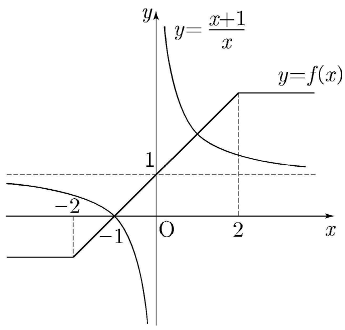
가 성립한다고 한다. 이 상품의 수요량이 9배로 증가하고 공급량이 3배로 증가하면 판매가격은 k배로 증가한다. k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (x<-2) \\ x+1 & (-2\le x<2) \\ 3 & (x\ge 2)\end{cases}$$

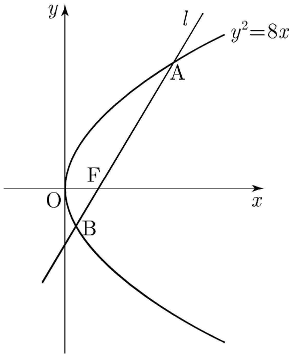
가 있다. 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=\frac{x+1}{x}$의 그래프를 나타낸 것이다.



집합 $\left\{x \,\middle|\, \frac{x+1}{f(x)}>x,\ x\text{는 } |x|<10\text{인 정수}\right\}$의 원소의 개수는? [3점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

9. 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=14$ 를 만족시키는 직선 l의 기울기를 m이라 할 때, 양수 m의 값은? [3점]



① $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

10. 정규분포를 따르는 두 연속확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{E}(X)=10$
(나) $Y=3X$

$\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(Y\ge k)$를 만족시키는 상수 k의 값은? [3점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

11. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고 섞은 다음 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 A에 넣었더니 두 주머니에 있는 검은 공의 개수가 서로 같아졌다. 이때 주머니 A에서 꺼낸 공이 모두 검은 공이었을 확률은? [3점]

① $\frac{6}{11}$ ② $\frac{13}{22}$ ③ $\frac{7}{11}$ ④ $\frac{15}{22}$ ⑤ $\frac{8}{11}$

12. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-3,0)$, $\mathrm{B}(3,0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다. 초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이 타원과 만나는 한 점을 P라 할 때, 선분 PB의 길이는? [3점]

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{23}{7}$ ③ $\frac{24}{7}$ ④ $\frac{25}{7}$ ⑤ $\frac{26}{7}$

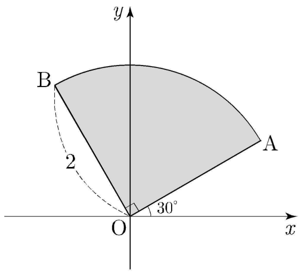
13. 모든 실수에서 연속이고 역함수가 존재하는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 제1사분면에 있는 두 점 $(2, a)$, $(4, a+8)$을 지난다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{2k}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(a+\frac{8k}{n}\right)=50$$

을 만족시키는 상수 a의 값은? [3점]

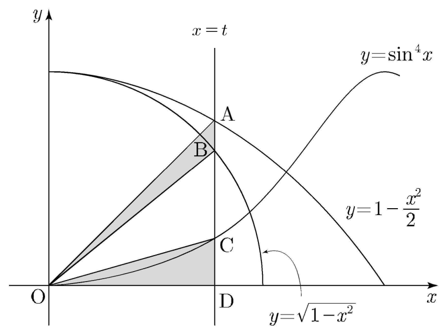
① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

14. 그림은 좌표평면에 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB를 나타낸 것이다. 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30°일 때, 부채꼴 OAB의 내부를 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? (단, O는 원점이고, 점 B는 제2사분면에 있다.) [4점]



① $\frac{4(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ② $\frac{5(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ③ $2(\sqrt{3}+1)\pi$
④ $\frac{7(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$

15. 그림과 같이 직선 $x=t$ $(0<t<1)$이 세 곡선 $y=1-\frac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^4 x$ 및 x축과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자. 두 삼각형 AOB, COD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{S_1}{S_2}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

16. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$AB=O,\ (A+2B)(2A-B)=E$$

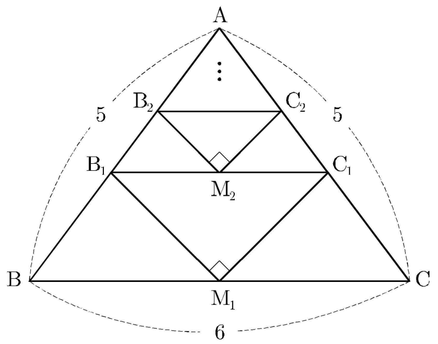
를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $BA=O$
ㄴ. 행렬 $A+B$의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. $A^2+B^2=\frac{1}{2}E$이면 $B=O$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

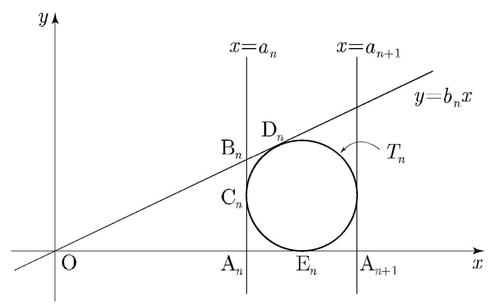
17. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=6$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 중점 M_1을 잡고 두 선분 AB, AC 위에 각각 점 B_1, C_1을 $\angle B_1M_1C_1=90°$이고 $\overline{B_1C_1}/\!/\overline{BC}$가 되도록 잡아 직각삼각형 $B_1M_1C_1$을 만든다. 선분 B_1C_1의 중점 M_2를 잡고 두 선분 AB_1, AC_1 위에 각각 점 B_2, C_2를 $\angle B_2M_2C_2=90°$이고 $\overline{B_2C_2}/\!/\overline{B_1C_1}$이 되도록 잡아 직각삼각형 $B_2M_2C_2$를 만든다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만든 직각삼각형 $B_nM_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{47}{11}$ ② $\frac{48}{11}$ ③ $\frac{49}{11}$ ④ $\frac{50}{11}$ ⑤ $\frac{51}{11}$

18. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(Ⅰ) $a_1=2$이고 $a_n<a_{n+1}$
(Ⅱ) $b_n=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)$ $(n\geq 1)$이라 할 때, 좌표평면에서 네 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$, $y=0$, $y=b_nx$에 동시에 접하는 원 T_n이 존재한다.



원점을 O라 하고, 원 T_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.
직선 $x=a_n$과 두 직선 $y=0$, $y=b_nx$의 교점을 각각 A_n, B_n이라 하고, 원 T_n과 세 직선 $x=a_n$, $y=b_nx$, $y=0$의 접점을 각각 C_n, D_n, E_n이라 하면

$\overline{A_nB_n}=a_nb_n$이고 $\overline{OB_n}=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}$ 이다.

$$\overline{OD_n}=\overline{OB_n}+\overline{B_nD_n}=\overline{OB_n}+\overline{B_nC_n}$$
$$=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}+a_nb_n-r_n$$
$$\overline{OE_n}=a_n+r_n$$

$\overline{OD_n}=\overline{OE_n}$이므로

$$r_n=\frac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^2}\right)}{2}$$

$$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2r_n=\left(\boxed{(나)}\right)\times a_n\ (n\geq 1)$$

이때 $a_1=2$이고

$$a_n=\boxed{}\times a_{n-1}=\boxed{}\times a_{n-2}=\cdots$$
$$=\boxed{}\times a_1$$

이므로

$$a_n=\boxed{(다)}$$

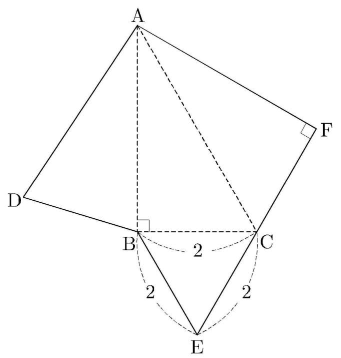
위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+f(4)+g(4)$의 값은? [4점]

① 54 ② 55 ③ 56 ④ 57 ⑤ 58

19. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때, 좌표평면에서 점 A_n의 좌표를 $(f(n), g(n))$이라 하자. 10보다 크고 1000보다 작은 두 자연수 k, m $(k<m)$에 대하여 세 점 A_1, A_k, A_m이 한 직선 위에 있을 때, $k+m$의 최댓값은? [4점]

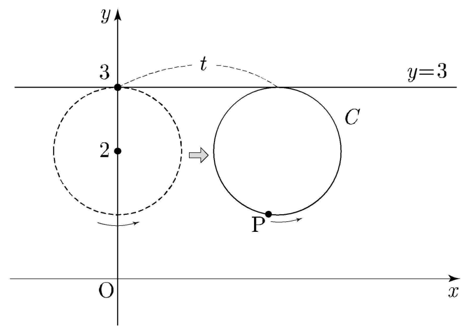
① 998 ② 990 ③ 992 ④ 994 ⑤ 996

20. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고, $\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{CFA} = 90°$, $\overline{\mathrm{AC}} = 4$이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

21. 좌표평면에 중심이 $(0, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있고, 이 원 위의 점 P가 점 $(0, 3)$의 위치에 있다. 원 C는 직선 $y=3$에 접하면서 x축의 양의 방향으로 미끄러지지 않고 굴러간다. 그림은 원 C가 굴러간 거리가 t일 때, 점 P의 위치를 나타낸 것이다.



점 P가 나타내는 곡선을 F라 하자. $t=\frac{2}{3}\pi$일 때 곡선 F 위의 점에서의 접선의 기울기는? [4점]

① -3 ② -2 ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

22. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_2+a_4=16$, $a_8+a_{12}=58$일 때, a_{17}의 값을 구하시오. [3점]

23. 방정식 $\sqrt{x+3}=|x|-3$의 모든 근의 합을 구하시오. [3점]

24. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x t^2 f'(t)dt=\frac{3}{2}x^4+kx^3$이다.
(나) $x=1$에서 극솟값 7을 갖는다.

$f(10)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

25. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=x^n \ln x$의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $g(n)\le -\frac{1}{6e}$을 만족시키는 모든 n의 값의 합을 구하시오. [3점]

26. 이차함수 $f(x)=ax^2$에 대하여 구간 $[0,\,2]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $g(x)$가

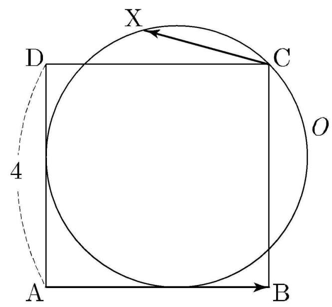
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ f(x-1)+f(1) & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{P}(a\le X\le a+1)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{k}{x}\,(k>1)$에 대하여 좌표평면에서 직선 $x=2$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$에 대하여 점 P에서의 접선을 l, 곡선 $y=g(x)$에 대하여 점 Q에서의 접선을 m이라 하자. 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 상수 k에 대하여 $3k$의 값을 구하시오. [4점]

28. 좌표공간에서 구 $(x-6)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=16$ 위의 점 P와 yz평면 위에 있는 원 $(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 위의 점 Q 사이의 거리의 최댓값을 구하시오. [4점]

29. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 최댓값은 $a-b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]



30. 함수 $f(x)=-xe^{2-x}$과 상수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\,f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $x<a$이면 $f(x)>g(x)$이고, $x>a$이면 $f(x)<g(x)$이다.

곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$이다. k의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2015년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ⑤

$\log_2 9\times\log_3 8=2\log_2 3\times 3\log_3 2=6\left(\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}\right)=6$

2) ①

$AX=A+B$에서

$X=A^{-1}(A+B)=E+A^{-1}B$

$A=\begin{pmatrix}-3&-5\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&5\\-2&1\end{pmatrix}$이므로

$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&5\\-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\-2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&20\\-2&-13\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&20\\-2&-12\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$3+20+(-2)+(-12)=9$

3) ③

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이고,

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$이므로

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=2\times3\times\frac{1}{2}=3$

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=4-12+36$

$=28$

$\therefore\ |\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

4) ②

$f(x)=8\sin x+4\cos 2x+1$

$=8\sin x+4(1-2\sin^2 x)+1$

$=-8\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+7$

실수 x에 대하여 $\sin x$는 -1과 1 사이의 값을 갖는다. 즉,

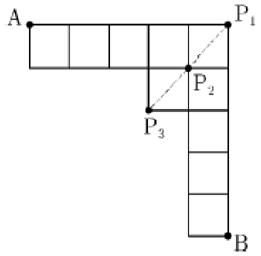
$-1\le\sin x\le 1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $\sin x=\frac{1}{2}$일 때, 즉, $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$일 때,

최댓값 7을 갖는다.

5) ②

도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 갈 때, 그림의 P_1, P_2, P_3 지점 중 어느 한 지점을 지난다.



i) A →P_1→ B인 경로로 이동하는 경우

A지점에서 P_1지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 1,

P_1지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 1이므로

이때의 경우의 수는 $1\times1=1$이다.

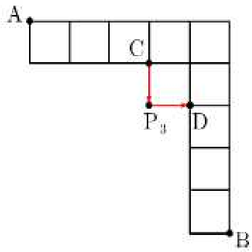
ii) A →P_2→ B인 경로로 이동하는 경우

A지점에서 P_2지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}$,

P_2지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}$이므로

이때의 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}\times\frac{5!}{4!}=25$이다.

iii) A →P_3→ B인 경로로 이동하는 경우



A지점에서 P_3지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

A지점에서 C지점까지 최단거리로 가는 경우의 수 $\frac{4!}{3!}$이다.

P_3지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

D지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수 $\frac{4!}{3!}$이다.

따라서 이때의 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}=16$이다.

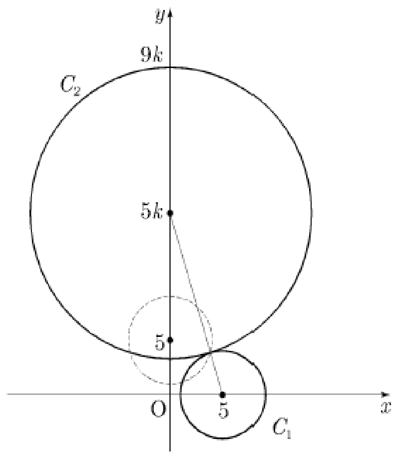
i), ii), iii)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는

$1+25+16=42$이다.

6) ③

원 C_1는 중심이 $(5, 0)$이고 반지름이 4인 원이다.

따라서 회전변환 f에 의하여 원 C_1는 중심이 $(0, 5)$이고 반지름이 4인 원으로 이동한다. 또한 이 원은 닮음변환 g에 의하여 중심이 $(0, 5k)$이고 반지름이 $4k$인 원으로 이동한다. 따라서 C_2는 중심이 $(0, 5k)$이고 반지름이 $4k$인 원이다.



두 원 C_1, C_2가 외접할 때, 두 원의 중심사이의 거리는 반지름의 길이의 합이므로

$\sqrt{5^2+(5k)^2}=4+4k$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$9k^2-32k+9=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

위 방정식을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{32}{9}$이다.

[다른 풀이]

변환 f, g를 나타내는 행렬은 각각

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$이므로

변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$이다.

원 C_1 위의 점 (x, y)이 변환 $g \circ f$에 의하여 이동한 점을 (x', y')이라 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

이 성립한다.

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y'}{k} \\ -\frac{x'}{k} \end{pmatrix}$

점 (x, y)는 원 $C_1 : (x-5)^2+y^2=16$ 위에 있으므로

$\left(\frac{y'}{k}-5\right)^2 + \left(-\frac{x'}{k}\right)^2 = 16$

$(x')^2+(y'-5k)^2=16k^2$

따라서 원 C_2의 방정식은 $x^2+(y-5k)^2=(4k)^2$이다.

두 원 C_1, C_2가 외접할 때, 두 원의 중심사이의 거리는 반지름의 길이의 합이므로

$\sqrt{5^2+(5k)^2}=4+4k$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$9k^2-32k+9=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

위 방정식을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{32}{9}$이다.

7) ④

상품의 수요량이 D, 공급량이 S일 때의 판매가격은 P,

상품의 수요량이 $9D$, 공급량이 $3S$일 때의 판매가격은 kP이므로

주어진 식에 의하여

$\log_2 P = C + \log_3 D - \log_9 S$ …… ㉠

$\log_2 kP = C + \log_3 9D - \log_9 3S$ …… ㉡

㉡−㉠에서

$\log_2 k = \log_3 9 - \log_9 3 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore\ k = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

8) ④

$x=-1$일 때, 함수 $f(x)=0$이므로 분수식 $\frac{x+1}{f(x)}$가 정의되지 않는다.

ⅰ) $x<-2$일 때,

$\frac{x+1}{f(x)} > x \Leftrightarrow -(x+1) > x \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

$\therefore\ x<-2$

ⅱ) $-2<x<2$일 때,

$\frac{x+1}{f(x)} > x \Leftrightarrow 1 > x$

$\therefore\ -2<x<1,\ x \neq -1$

ⅲ) $x \geq 2$일 때,

$\frac{x+1}{f(x)} > x \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} > x \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

따라서 부등식 $\frac{x+1}{f(x)} > x$을 만족시키는 x는 존재하지 않는다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 부등식 $\frac{x+1}{f(x)} > x$의 해는

$x<-1$, $-1<x<1$이다.

따라서 주어진 집합은 $\{-9,\ -8,\ \cdots,\ -2,\ 0\}$이다.

따라서 구하는 원소의 개수는 9개다.

[다른 풀이]

주어진 등식의 양변에 $\frac{f(x)}{x}$를 곱하면 좌변은 $\frac{x+1}{x}$, 우변은 $f(x)$가 되므로 x와 $f(x)$의 부호가 바뀌는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

ⅰ) $x<-1$일 때,

$x<0$, $f(x)<0$이므로

$\frac{x+1}{f(x)} > x$에서 $\frac{x+1}{x} > f(x)$

$x<-1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{x+1}{x}$의 그래프의 아래쪽에 있으므로 $\frac{x+1}{x} > f(x)$가 성립한다.

$\therefore\ x<-1$

ⅱ) $-1<x<0$일 때,

$x<0$, $f(x)>0$이므로

$\frac{x+1}{f(x)} > x$에서 $\frac{x+1}{x} < f(x)$

$-1<x<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{x+1}{x}$의 그래프의 위쪽에 있으므로 $\frac{x+1}{x} < f(x)$가 성립한다.

$\therefore\ -1<x<0$

ⅲ) $x=0$일 때,

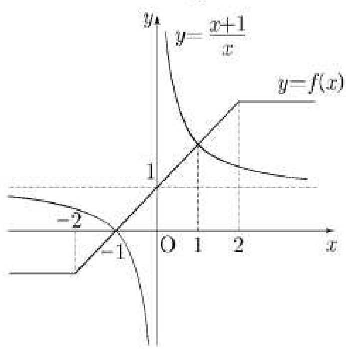
$\frac{x+1}{f(x)}=1$이므로 $\frac{x+1}{f(x)} > x$가 성립한다.

ⅳ) $x>0$일 때,

$x>0$, $f(x)>0$이므로

$\frac{x+1}{f(x)} > x$에서 $\frac{x+1}{x} > f(x)$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=\frac{x+1}{x}$의 그래프는 $x=1$, $x=-1$일 때 만난다.



그림에서 $0<x<1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\frac{x+1}{x}$의

그래프의 아래쪽에 있으므로 $\frac{x+1}{x} > f(x)$이 성립한다.

$\therefore\ 0 < x < 1$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서 주어진 집합은

$x < 1$이고 $x \neq -1$이며 $|x| < 10$을 만족시키는 정수 x의 집합으로

$\{-9,\ -8,\ \cdots,\ -2,\ 0\}$이다.

따라서 구하는 원소의 개수는 9개다.

9) ④

$F(2,\ 0)$이므로 직선 l의 방정식은

$y = m(x-2)$

점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는

직선 $y = m(x-2)$과 포물선 $y^2 = 8x$와의 교점의 x좌표이므로

방정식 $m^2(x-2)^2 = 8x$의 두 근이다.

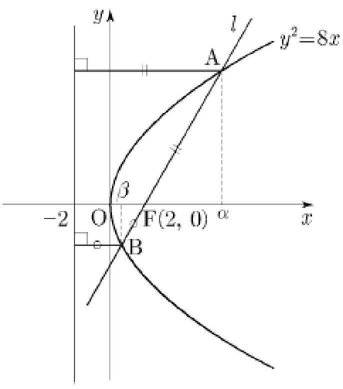
또한, 포물선의 준선의 방정식이 $x = -2$이므로

$\overline{AF} = \alpha + 2$, $\overline{BF} = \beta + 2$

$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = \alpha + \beta + 4$이므로

$\overline{AB} = 14$에서 $\alpha + \beta + 4 = 14$

$\therefore\ \alpha + \beta = 10$ …… ㉠



$m^2(x-2)^2 = 8x$에서

$m^2x^2 - 4(m^2+2)x + 4m^2 = 0$

위의 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = \frac{4(m^2+2)}{m^2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{4(m^2+2)}{m^2} = 10$, $m^2 = \frac{4}{3}$

$\therefore\ m = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because\ m > 0$)

10) ②

$E(X) = 10$이므로

$E(Y) = E(3X) = 3E(X) = 30$

$\sigma(X) = \sigma(>0)$라 하면

$\sigma(Y) = \sigma(3X) = |3|\sigma(X) = 3\sigma$

$P(X \leq k) = P(Y \geq k)$에서

$P\left(Z \leq \frac{k-10}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{k-30}{3\sigma}\right)$

따라서 $\frac{k-10}{\sigma} = -\frac{k-30}{3\sigma}$에서

$3k - 30 = 30 - k$

$\therefore\ k = 15$

11) ①

주머니 A에 있는 검은 공의 개수가 주머니 B에 있는 검은 공의 개수보다 크므로 시행을 마친 후 두 주머니 안에 있는 검은 공의 수가 같으려면 주머니 A에서 적어도 하나의 검은 공을 꺼내어 주머니 B에 넣어야 한다.

ⅰ) 주머니 A에서 검은 공 2개를 꺼내어 주머니 B에 넣는 경우

주머니 B에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내어 주머니 A에 넣어야 두 주머니에 있는 검은 공의 개수가 서로 같아진다. 이때의 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_4C_1}{{}_8C_2} = \frac{8}{35}$

ⅱ) 주머니 A에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내어 주머니 B에 넣는 경우

주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내어 주머니 A에 넣어야 두 주머니에 있는 검은 공의 개수가 서로 같아진다. 이때의 확률은

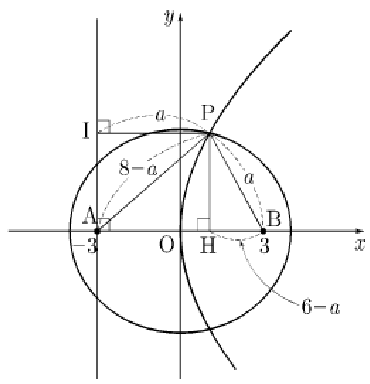
$\frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \frac{4}{21}$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{\frac{8}{35}}{\frac{8}{35} + \frac{4}{21}} = \frac{6}{11}$

12) ④

초점이 B이고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 준선은 $x = -3$이다.



그림과 같이 점 P를 제1사분면 위의 점으로 정하고 $\overline{PB} = a$라 하자.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 직선 $x = -3$에 내린 수선의 발을 I라 하면

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH} = a$이므로

$\overline{BH} = a$이고 $\overline{AH} = 6 - a$이다.

타원의 정의에 의하여 $\overline{PA} + \overline{PB} = 8$이므로 $\overline{PA} = 8 - a$

직각삼각형 PAH와 PBH에서

$\overline{PA}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{PB}^2 - \overline{BH}^2$

$(8-a)^2 - a^2 = a^2 - (6-a)^2$

$\therefore\ a = \frac{25}{7}$

13) ③

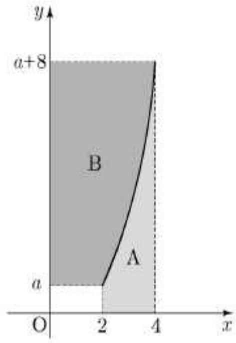
$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(2 + \frac{2k}{n}\right) = \int_2^4 f(x)dx$

$\lim_{n\to\infty} \frac{8}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(a + \frac{8k}{n}\right) = \int_a^{a+8} g(x)dx$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이고 역함수가 존재하므로

구간 $[2,\ 4]$에서 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같이 $(2,\ a)$에서

$(4,\ a+8)$까지 증가하는 모양이다.



$\int_2^4 f(x)dx$의 값은 위 그림의 A부분의 넓이와 같고,

$\int_a^{a+8} g(x)dx$의 값은 위 그림의 B부분의 넓이와 같다.

$\int_2^4 f(x)dx+\int_a^{a+8} g(x)dx=50$에서

$4(a+8)-2a=50$

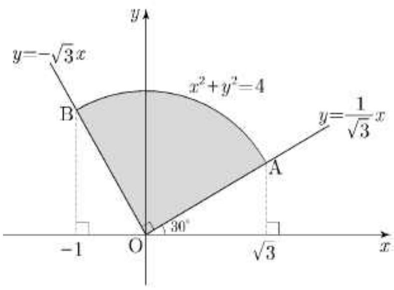
$\therefore\ a=9$

14) ⑤

점 A, B는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이다.

따라서 점 A의 좌표는 $(\sqrt{3},1)$, 점 B의 좌표는 $(-1,\ \sqrt{3})$이고

직선 OA의 방정식은 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, 직선 OB의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x$이다.



따라서 구하는 회전체의 부피를 V라 하면

$V=\pi\int_{-1}^{\sqrt{3}}(4-x^2)dx-\pi\int_{-1}^{0}(-\sqrt{3}x)^2dx-\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2dx$

$=\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{\sqrt{3}}-\pi\left[x^3\right]_{-1}^{0}-\pi\left[\frac{x^3}{9}\right]_0^{\sqrt{3}}$

$=\frac{8(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$

15) ①

두 삼각형 AOB, COD의 넓이를 구할 때, 두 삼각형의 밑변을 각각 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$로 잡으면

점 O에서 직선 $x=t$에 이르는 거리가 두 삼각형의 높이이므로

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$이다.

$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}}{\sin^4 t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{t^4}{4}}{\sin^4 t\left(1-\frac{t^2}{2}+\sqrt{1-t^2}\right)}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4}\cdot\frac{1}{4\left(1-\frac{t^2}{2}+\sqrt{1-t^2}\right)}$

$=1\cdot\frac{1}{4\cdot2}=\frac{1}{8}$

16) ⑤

ㄱ. $(A+2B)(2A-B)=E$이므로

$(A+2B)^{-1}=2A-B$이다.

$\therefore\ (2A-B)(A+2B)=E$

$(A+2B)(2A-B)=(2A-B)(A+2B)$이므로

$AB=BA$

$\therefore\ BA=O$ (참)

ㄴ. $(A+2B)(2A-B)=E$에서

$2A^2-2B^2=E$

$2(A+B)(A-B)=E$

$\therefore\ (A+B)^{-1}=2(A-B)$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $2A^2-2B^2=E$

즉, $A^2=\frac{1}{2}E+B^2$이므로

$A^2+B^2=\frac{1}{2}E$이면

$\left(\frac{1}{2}E+B^2\right)+B^2=\frac{1}{2}E$

$\therefore\ B^2=O$

따라서 $A^2=\frac{1}{2}E+B^2=\frac{1}{2}E$이므로 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

따라서 $AB=O$에서 $B=O$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

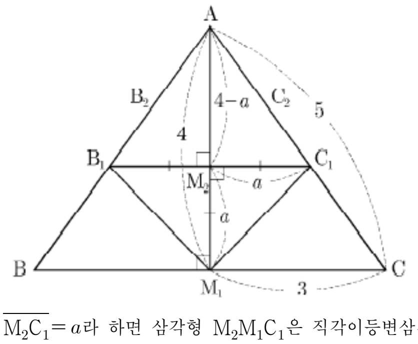
17) ②

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 $\triangle \mathrm{AM_1C}$는 직각삼각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AM_1}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

삼각형 ABC와 삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$이 닮음이므로 $\mathrm{M_2}$는 직선 $\mathrm{AM_1}$ 위에 있고

삼각형 $\mathrm{AM_2C_1}$과 삼각형 $\mathrm{AM_1C}$는 닮음이다.



$\overline{\mathrm{M_2C_1}}=a$라 하면 삼각형 $\mathrm{M_2M_1C_1}$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{M_2M_1}}=a$

$\dfrac{\overline{\mathrm{AM_2}}}{\overline{\mathrm{M_2C_1}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AM_1}}}{\overline{\mathrm{M_1C}}}$ 에서 $\dfrac{4-a}{a}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a=\dfrac{12}{7}$

따라서 수열 $\{S_n\}$은 $S_1=a^2=\dfrac{144}{49}$ 이고

공비가 $\left(\dfrac{a}{3}\right)^2=\dfrac{16}{49}$ 인 등비수열이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{144}{49}}{1-\frac{16}{49}}=\frac{48}{11}$

18) ①

점 B_n이 직선 $x=a_n$과 $y=b_nx$의 교점이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_nb_n$이고

$\overline{\mathrm{OB}_n}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}_n}^2+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}^2}=\sqrt{(a_n)^2+(a_nb_n)^2}=a_n\sqrt{\boxed{1}+b_n^2}$

$\therefore$ (가)$=p=1$

원 T_n이 x축에 접하므로 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=r_n$이다.

$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}$

$=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

$=\overline{\mathrm{OB}_n}+(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}-\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n})$

$=a_n\sqrt{\boxed{1}+b_n^2}+a_nb_n-r_n$

$\overline{\mathrm{OE}_n}=a_n+r_n$

$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OE}_n}$이므로

$a_n\sqrt{1+b_n^2}+a_nb_n-r_n=a_n+r_n$

$\therefore\ r_n=\dfrac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{1+b_n^2}\right)}{2}$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2r_n$

$=\left(b_n+\sqrt{1+b_n^2}\right)\times a_n$

그런데 $b_n=\dfrac{1}{2}\left(n+1-\dfrac{1}{n+1}\right)$이므로

$\sqrt{1+b_n^2}=\dfrac{1}{2}\left(n+1+\dfrac{1}{n+1}\right)$

$\therefore\ b_n+\sqrt{1+b_n^2}=n+1$

$\therefore\ a_{n+1}=\left(b_n+\sqrt{1+b_n^2}\right)\times a_n$

$=\left(\boxed{n+1}\right)\times a_n\ (n\geq 1)$

$\therefore$ (나)$=f(n)=n$

이때 $a_1=2$이고

$a_n=\boxed{n}\times a_{n-1}$

$=\boxed{n(n-1)}\times a_{n-2}$

$\vdots$

$=\boxed{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2}\times a_1$

이므로

$a_n=\boxed{2n!}$

$\therefore$ (다)$=g(n)=2n!$

$\therefore\ p+f(4)+g(4)=1+5+48=54$

19) ③

$\log 1=0$이므로 $\mathrm{A}_1(0,\ 0)$

점 A_n의 x, y좌표가 각각 $\log n$의 지표 $f(n)$, 가수 $g(n)$이므로

점 A_n의 x좌표는 정수이고 y좌표는 1보다 작고 0보다 크거나 같다.

$10<n<1000$일 때, $1<\log n<3$이므로

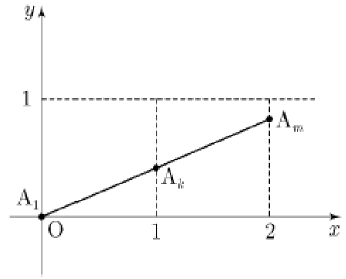
A_k, A_m의 x좌표는 1 또는 2이다.

A_k, A_m의 x좌표가 모두 1 또는 모두 2이면

세 점 A_1, A_k, A_m이 한 직선 위에 있지 않으므로

점 A_k와 A_m의 x좌표는 각각 1, 2이어야 한다. ($\because\ k<m$)

$\therefore\ f(k)=1,\ f(m)=2$ …… ㉠



이때, 두 점 A_1, A_k를 잇는 직선의 기울기와 두 점 A_k, A_m을 잇는 직선의 기울기는 같으므로

$g(k)=\dfrac{g(m)}{2}$가 성립한다.

한편, $\log k=f(k)+g(k)$, $\log m=f(m)+g(m)$이므로

$g(k)=\dfrac{g(m)}{2}$에서 $\log k-1=\dfrac{\log m-2}{2}$

$\therefore\ m=k^2$ …… ㉡

㉠에서 $10<k<100$, $100\leq m<1000$이고

$31^2=961$, $32^2=1024$이므로

조건 ㉠, ㉡을 만족시키는 자연수 k의 범위는

$11\leq k\leq 31$이다.

k가 최대일 때, $m(=k^2)$도 최대가 되므로 $k+m$는

$k=31$일 때, 최댓값 $31+31^2=992$를 갖는다.

20) ⑤

주어진 전개도로 사면체를 만들 때, 전개도의 점 D, E, F는 일치한다.

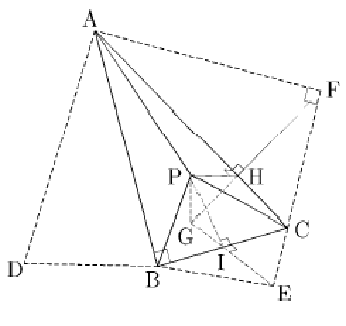
사면체에서 이 세 점을 P라 하자.

사면체 PABC의 점 P에서

면 APC와 면 ABC의 교선 AC에 내린 수선의 발을 H,

점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 G라 할 때,

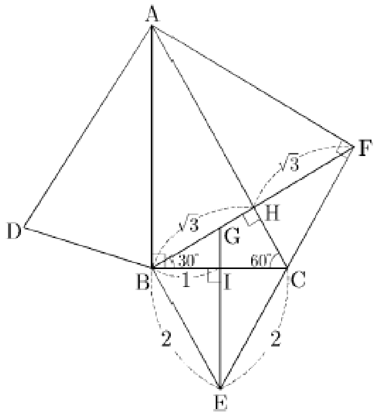
이면각의 정의에 의하여 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HG}}}{\overline{\mathrm{PH}}}$ 이다.



삼각형 PAC와 삼각형 FAC가 합동이므로 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{FH}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$이다.

따라서 삼수선의 정리에 의하여 점 G는 직선 FH 위에 존재한다.

점 P에서 면 PBC와 면 ABC의 교선 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 PBC와 삼각형 EBC가 합동이므로 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{EH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이다.
따라서 삼수선의 정리에 의하여 점 G는 직선 EI 위에 존재한다.



$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CE}}=2$이므로 직각삼각형 ABC, AFC는 합동이다.
따라서 점 F와 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발은 일치한다.
따라서 직선 FH는 점 B를 지난다.

$\cos(\angle\mathrm{ACB})=\dfrac{1}{2}$이므로

$\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$이고 $\angle\mathrm{CBH}=30^\circ$이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{BH}}=2\sin60^\circ=\sqrt{3}$

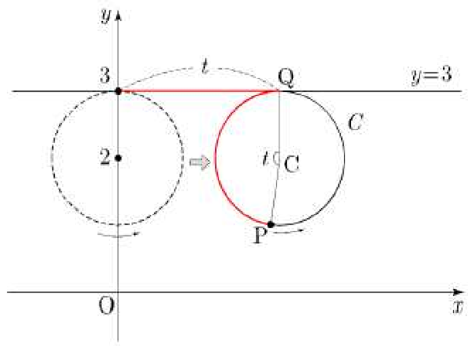
$\overline{\mathrm{BG}}\cos30^\circ=1$에서 $\overline{\mathrm{BG}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{HG}}=\overline{\mathrm{BH}}-\overline{\mathrm{BG}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

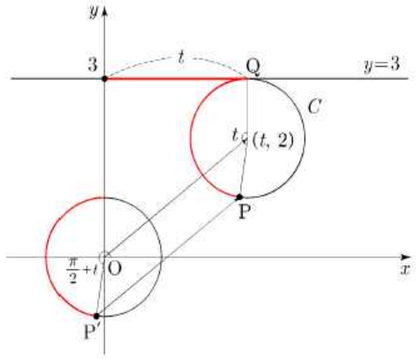
$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HG}}}{\overline{\mathrm{PH}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ ($\because\ \overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{FH}}$)

21) ⑤

원 C가 굴러간 거리가 t일 때, 원의 중심을 C, 점 $(t,3)$을 Q라 하면 주어진 조건에 의하여 $\angle\mathrm{POQ}=t$이다.



원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P′에 대하여 동경 OP′이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\dfrac{\pi}{2}+t$일 때, 점 P는 점 P′을 x축의 방향으로 t만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이다.



따라서 점 P의 좌표를 (x,y)라 할 때,

$x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)+t=-\sin t+t$

$y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)+2=\cos t+2$

이다.
따라서 원 C가 굴러간 거리가 t일 때, 곡선 F 위의 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\sin t}{-\cos t+1}$ 이다.

따라서 구하는 값은

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin\frac{2}{3}\pi}{-\cos\frac{2}{3}\pi+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

22) 50

등차수열의 공차를 d라 하면
$(a_8+a_{12})-(a_2+a_4)=(a_8-a_2)+(a_{12}-a_4)=6d+8d=14d$
$14d=58-16$에서 $d=3$
$a_2+a_4=(a_1+3)+(a_1+9)=16$
$\therefore\ a_1=2$
$\therefore\ a_{17}=a_1+16d=2+48=50$

23) 3

$\sqrt{x+3}=|x|-3$에서
$x+3\geq0$이고 $|x|-3\geq0$이어야하므로
$x=-3$ 또는 $x\geq3$이다.
i) $x=-3$일 때,
$\sqrt{x+3}=|x|-3$이 성립하므로
$x=-3$은 근이 된다.
ii) $x\geq3$일 때,
$|x|-3=x-3$이므로
$\sqrt{x+3}=x-3$
위의 식의 양변을 제곱하면
$x+3=(x-3)^2$
$x^2-7x+6=0$
$x=6$ ($\because\ x\geq3$)
i), ii)에서 구하는 모든 실근의 합은 $-3+6=3$

24) 250

조건 (가)에서 $\displaystyle\int_0^x t^2f'(t)dt=\frac{3}{2}x^4+kx^3$이 모든 실수 x에 대하여

성립하므로

$\int_0^x t^2 f'(t)dt = \frac{3}{2}x^4 + kx^3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^2 f'(x) = 6x^3 + 3kx^2$

위의 식은 모든 실수 x에 대하여 성립해야하므로

$f'(x) = 6x + 3k$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 갖고 함수 $f(x)$가 다항함수이므로

$f'(1) = 6 + 3k = 0$

$\therefore\ k = -2$

$\therefore\ f'(x) = 6x - 6$

$\therefore\ f(x) = \int (6x-6)dx = 3x^2 - 6x + C$

조건 (나)에서 $f(1) = 3 - 6 + C = 7$

$\therefore\ C = 10$

$\therefore\ f(x) = 3x^2 - 6x + 10$

$\therefore\ f(10) = 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 + 10 = 250$

25) 21

$f'(x) = nx^{n-1} \cdot \ln x + x^n \cdot \frac{1}{x} = x^{n-1}(n\ln x + 1)$

$f(\sqrt[n]{e}) = 0$이고 $f'(x)$의 부호를 이용하여 $f(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$x = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$에서 극소이자 최소이다.

$\therefore\ g(n) = f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e}}\right) = -\frac{1}{ne}$

$g(n) \le -\frac{1}{6e}$에서 $-\frac{1}{ne} \le -\frac{1}{6e}$

$\therefore\ n \le 6$

따라서 구하는 자연수의 합은

$1+2+3+4+5+6 = 21$

26) 39

함수 $g(x)$가 구간 $[0, 2]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수이므로

$\mathrm{P}(0 \le X \le 2) = \int_0^2 g(x)dx = 1$이다.

$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx$

$= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 \{f(x-1) + f(1)\}dx$

$= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 \{f(x) + f(1)\}dx$

$= 2\int_0^1 f(x)dx + f(1) = 2\int_0^1 ax^2 dx + a$

$= 2\left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^1 + a$

$= \frac{5}{3}a$

따라서 $\frac{5}{3}a = 1$에서 $a = \frac{3}{5}$이다.

$\therefore\ f(x) = \frac{3}{5}x^2$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{3}{5} \le X \le \frac{8}{5}\right) = \int_{\frac{3}{5}}^{\frac{8}{5}} g(x)dx$

$= \int_{\frac{3}{5}}^{1} g(x)dx + \int_1^{\frac{8}{5}} g(x)dx$

$= \int_{\frac{3}{5}}^{1} f(x)dx + \int_1^{\frac{8}{5}} \{f(x-1) + f(1)\}dx$

$= \int_{\frac{3}{5}}^{1} f(x)dx + \int_0^{\frac{3}{5}} \{f(x) + f(1)\}dx$

$= \int_0^1 f(x)dx + \frac{3}{5}f(1)$

$= \int_0^1 \frac{3}{5}x^2 dx + \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$= \left[\frac{x^3}{5}\right]_0^1 + \frac{9}{25} = \frac{14}{25}$

$\therefore\ p = 25,\ q = 14$

$\therefore\ p + q = 39$

27) 20

$f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{k}{x}$이므로

$f'(x) = -\frac{1}{x^2},\ g'(x) = -\frac{k}{x^2}$

직선 l과 m이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하면

점 P, Q의 x좌표가 모두 2이므로

$\tan\alpha = f'(2) = -\frac{1}{4},\ \tan\beta = g'(2) = -\frac{k}{4}$

두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$|\tan(\beta - \alpha)| = 1$

$\left| \frac{-\frac{k}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{k}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} \right| = 1$

$4|k-1| = |16+k|$

그런데 $k > 1$이므로 $4(k-1) = 16 + k$

$\therefore\ 3k = 20$

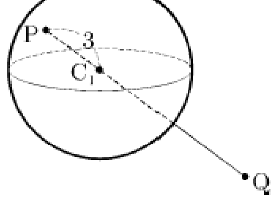
28) 14

구 $(x-6)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 16$는 중심이 $(6, -1, 5)$이고 반지름이 4이다.

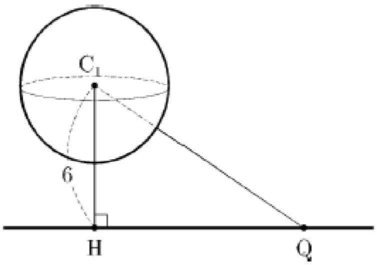
원 $(y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$는 중심이 $(0, 2, 1)$이고 반지름이 3이다.

구의 중심을 $\mathrm{C}_1(6, -1, 5)$, 원의 중심을 $\mathrm{C}_2(0, 2, 1)$라 하고

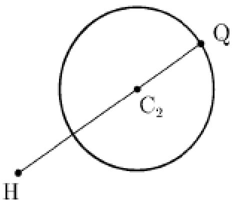
C_1에서 yz평면에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(0, -1, 5)$라 하자.



원위를 움직이는 점 Q를 고정시킬 때, 점 Q에 대하여
$\overline{PQ}$가 최대가 되도록 하는 점 P는 직선 C_1Q 위에 놓인다.
이때, $\overline{PQ}$의 최댓값은 $\overline{PC_1}+\overline{C_1Q}=4+\overline{C_1Q}$이다.
따라서 $\overline{C_1Q}$가 최대일 때, $\overline{PQ}$가 최대가 된다.

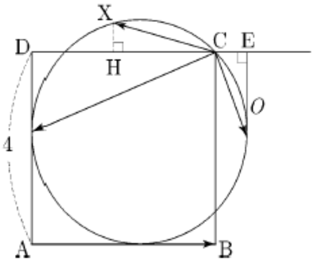


$\overline{C_1Q}=\sqrt{\overline{C_1H}^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{6^2+\overline{HQ}^2}$
따라서 $\overline{HQ}$가 최대일 때, $\overline{C_1Q}$가 최대가 된다.



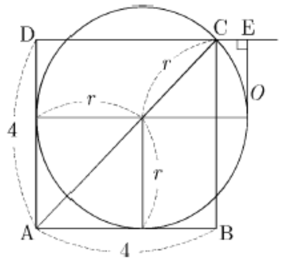
$\overline{HQ}$가 최대가 되도록 하는 점 Q는 직선 HC_2 위에 놓인다.
이때, 최댓값은
$\overline{HC_2}+\overline{C_2Q}=\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}+3=8$이다.
따라서 $\overline{C_1Q}$의 최댓값은
$\sqrt{6^2+\overline{HQ}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이다.
따라서 $\overline{PQ}$의 최댓값은 $4+\overline{C_1Q}=14$이다.

29) 80
점 X에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HX}$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HX})$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ ($\because$ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{HX}$)
점 H는 다음 그림의 선분 DE 위에 존재한다.



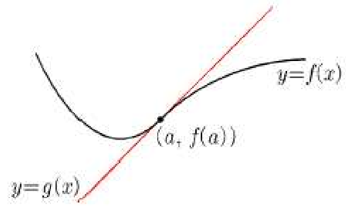
i) 점 H가 점 C의 왼쪽에 위치하는 경우
$\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CH}$의 방향은 서로 반대이다.
따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=-\overline{AB}\cdot\overline{CH}$
ii) 점 H가 점 C인 경우
$\overrightarrow{CH}=\vec{0}$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$
iii) 점 H가 점 B의 오른쪽에 위치하는 경우
$\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CH}$의 방향이 같으므로
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=\overline{AB}\cdot\overline{CH}$

i), ii), iii)에서 점 H가 점 E와 일치할 때,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$는 최댓값 $\overline{AB}\cdot\overline{CE}=4\overline{CE}$를 갖는다.



원의 중심을 O, 반지름을 r이라 하면
$\overline{AC}=\overline{AO}+\overline{OC}=(\sqrt{2}+1)r$
사각형 ABCD가 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로
$\overline{AC}=4\sqrt{2}$이다.
따라서 $(\sqrt{2}+1)r=4\sqrt{2}$에서
$r=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=8-4\sqrt{2}$
따라서 $\overline{CE}=2r-4=12-8\sqrt{2}$이다.
따라서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX}$의 최댓값은
$4(12-8\sqrt{2})=48-32\sqrt{2}$이다.
$\therefore$ $a=48,\ q=32$
$\therefore$ $a+b=80$

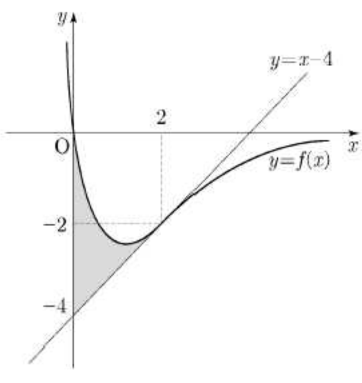
30) 9
조건을 만족시키려면 점 $(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이어야 한다.



$f(x)=-xe^{2-x}$에서
$f'(x)=e^{2-x}(x-1)$
$f''(x)=e^{2-x}(2-x)$
함수 $f(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0		$+$	
$f''(x)$		$+$		0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f''(2)=0$이므로 $a=2$이고
$f'(2)=1$, $f(2)=-2$이므로 $g(x)=x-4$이다.
따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{-xe^{2-x}-(x-4)\}dx$$

$$=\left[xe^{2-x}+e^{2-x}-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_0^2$$

$$=9-e^2$$

$\therefore\ k=9$