2014학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\log_3 \sqrt{8} \times \log_2 9$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2-2AB의 모든 성분의 합은? [2점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

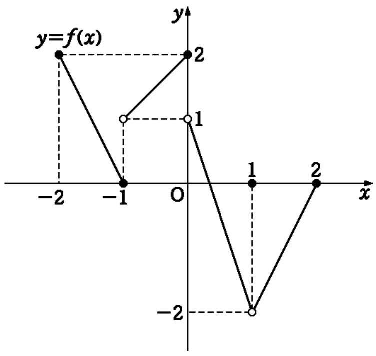
3. $\int_{-2}^{2} (x+|x|+2)\,dx$의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

4. 두 함수 $y=-x^2+4$, $y=2x^2+ax+b$의 그래프가 점 A$(2,\ 0)$에서 만나고, 점 A에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5. $-2 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(f(x)) + \lim_{x \to 0+} f(f(x))$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)+1}{x-2} = 3, \ \lim_{x \to 2} \frac{g(x)-3}{x-2} = 1$$

이 성립할 때, $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)g(x)-f(2)g(2)}{x-2}$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

7. 어떤 제품은 전체 생산량의 30%, 20%, 50%가 각각 세 공장 A, B, C에서 생산되고, 제품의 불량률은 각각 2%, 4%, a%라고 한다. 세 공장 A, B, C에서 생산된 제품 중 임의로 선택한 한 개의 제품이 불량품일 때, 그 제품이 C공장에서 생산된 제품이었을 확률은 $\frac{15}{29}$이다. a의 값은? (단, 세 공장 A, B, C에서는 다른 제품은 생산되지 않는다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 대기의 혼탁 정도를 나타내는 하나의 척도로 주간에 한 목표물을 볼 수 있는 최대거리는 시정거리를 사용한다. 상대습도가 70%일 때, 먼지농도 $d(\mu g/m^3)$와 시정거리 x(m) 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\log x = 3 + \log 1.2 - \log d$$

상대습도가 70%일 때, 시정거리가 3000(m) 이상이 되기 위한 먼지농도의 최댓값은 $d_1(\mu g/m^3)$이다. d_1의 값은? [3점]

① 0.1 ② 0.2 ③ 0.3 ④ 0.4 ⑤ 0.5

9. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n = \int_0^1 x^n(x-1)\,dx \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

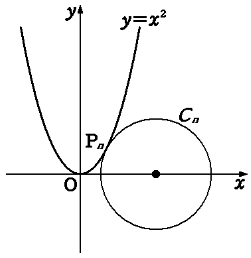
① $-\frac{5}{12}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{6}$ ⑤ $-\frac{1}{12}$

10. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

(가) a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $ab=c$
(다) $a+3b+c=-3$

① -21 ② -18 ③ -15 ④ -12 ⑤ -9

[11~12] 좌표평면에서 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$과 중심이 x축 위에 있는 원 C_n은 다음 조건을 만족시킨다.
(단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$이다.)



(가) 곡선 $y=x^2$과 원 C_n은 점 P_n에서 만난다.
(나) 곡선 $y=x^2$과 원 C_n은 점 P_n에서 공통인 접선을 갖는다.

다음 두 물음에 답하여라.

11. 원 C_1의 중심의 x좌표는? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

12. 원 C_n의 넓이를 $S(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^6}$의 값은? [3점]

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

13. 세 집합 A, B, C는 다음과 같다.

$$A=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,\begin{pmatrix}a-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab\\ b\end{pmatrix},\ x,\ y\text{는 실수}\right\}$$
$$B=\{(x,\ y)\,|\,y=x^2+x+1,\ x,\ y\text{는 실수}\}$$
$$C=\{(x,\ y)\,|\,y=x-1,\ x,\ y\text{는 실수}\}$$

$A\cap B\neq\phi$, $A\cap C\neq\phi$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

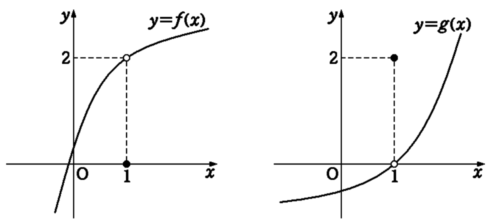
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. 수직선 위의 원점에 위치한 점 A가 있다. 주사위 1개를 던질 때 3의 배수의 눈이 나오면 점 A를 양의 방향으로 3만큼 이동하고, 그 이외의 눈이 나오면 점 A를 음의 방향으로 2만큼 이동하는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 72회 반복할 때, 점 A의 좌표를 확률변수 X라 하자. 확률 $\mathrm{P}(X\geq 11)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

① 0.0228 ② 0.0401 ③ 0.0668
④ 0.1056 ⑤ 0.1587

15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $\dfrac{f(x)+ax}{g(x)+bx}$가 $x=1$에서 연속이면 $a+b=-4$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2-A=O,\ A-B=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

보기

ㄱ. $AB=O$
ㄴ. $A\neq E$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다.
ㄷ. $A+B$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 첫째항이 -8인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{n+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=2^{n+1}(n^2+n+2)\ (n\ge 1)$$

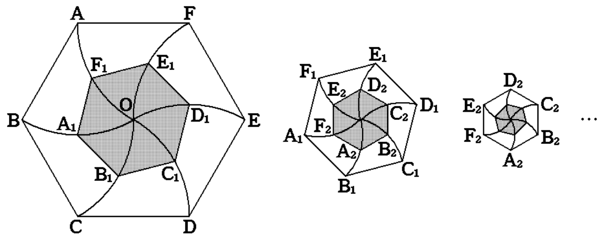
이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식에 의하여
>
> $$a_n-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}=2^n(n^2-n+2)\ (n\ge 2)$$
>
> 이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}-a_n-\frac{2}{n}a_n=\boxed{(가)}$$
>
> 이므로
>
> $$a_{n+1}-\frac{n+2}{n}a_n=\boxed{(가)}$$
>
> 이다. $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면
>
> $$b_{n+1}-b_n=\boxed{(나)}\ (n\ge 2)$$
>
> 이고, $b_2=0$이므로
>
> $$b_n=\boxed{(다)}\ (n\ge 2)$$
>
> 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(4)}{g(5)}+h(6)$의 값은? [4점]

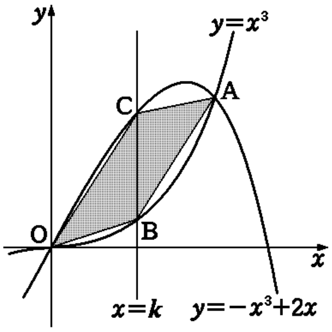
① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

18. 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 길이가 2인 대각선의 교점을 O라 하자. 그림과 같이 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60°만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자.
정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$에서 꼭짓점 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1을 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60°만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하자.
정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$에서 꼭짓점 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60°만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정육각형 $A_nB_nC_nD_nE_nF_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\dfrac{7-3\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{7-2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{4}$ ④ $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{4}$

19. 두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^3+2x$의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 A라 하고, 두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^3+2x$와 직선 $x=k$ $(0<k<1)$의 교점을 각각 B, C라 하자. 사각형 OBAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 실수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. 양수 x에 대하여 x의 정수 부분을 $f(x)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} f(2^k)+\sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)$의 값은? [4점]

① 9850 ② 9950 ③ 10050
④ 10150 ⑤ 10250

21. 자연수 n에 대하여 $S(n)=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$이라 하자. 두 조건

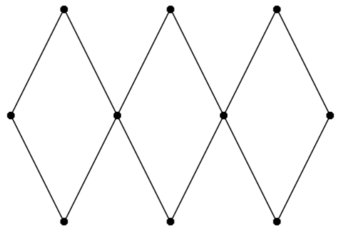
$$A\cup B\cup C=S(n),\ A\cap B=\phi$$

을 만족시키도록 세 집합 A, B, C를 정하는 방법의 수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

단답형

22. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 A라 하자. 행렬 A의 성분 중에서 1과 0의 개수를 각각 a, b라 할 때, $b-a$의 값을 구하여라. [3점]



23. 로그방정식

$$\log_2(3x^2+7x)=1+\log_2(x+1)$$

의 해는 $x=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하여라.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. 방정식 $x+3y+3z=32$를 만족시키는 자연수 x, y, z의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하여라. [3점]

25. 함수 $f(x)=x^3+2x^2-3x+4$가 있다. 등식

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=f(-a)+f(a)$$

를 만족시키는 실수 a에 대하여 $3a^2$의 값을 구하여라. [3점]

26. 함수 $f(x)=3x^2+2x+1$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left\{f\left(1+\frac{1}{2n}\right)+f\left(1+\frac{2}{2n}\right)+f\left(1+\frac{3}{2n}\right)+\ \cdots\ +f\left(1+\frac{n}{2n}\right)\right\}$$

의 값을 구하여라. [4점]

27. 책상 위에 있는 7개의 동전 중 3개는 앞면, 4개는 뒷면이 나와 있다. 이 중 임의로 3개의 동전을 택하여 뒤집어 놓았을 때, 7개의 동전 중 앞면이 나온 동전의 개수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 $7X$의 평균을 구하여라. [4점]

28. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 1$에서 $f(x)=x^2+1$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$이다.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\int_{-n}^{n} f(x)\,dx$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, $a_7=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 첫째항이 20이고 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n+1}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 하자. $\sum_{k=1}^{20} b_k$의 값을 구하여라. [4점]

30. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 정수 부분과 소수 부분을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하자. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(f(n),\ g(n))$이 연립부등식

$$\begin{cases} y \ge \frac{1}{3}x \\ 0 \le y \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

의 영역에 속하도록 하는 자연수 n의 개수를 오른쪽 상용로그표를 이용하여 구하여라. [4점]

x	$\log x$
2.1	0.3222
2.2	0.3424
3.1	0.4914
3.2	0.5051

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2014년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ④

$\log_3 \sqrt{8} \times \log_2 9$

$= \left(\frac{3}{2}\log_3 2\right) \times (2\log_2 3)$

$= 3 \ \left(\because \ \log_3 2 \times \log_2 3 = 1\right)$

2) ①

$A^2 - 2AB$

$= A(A-2B)$

$= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 24이다.

3) ⑤

$\int_{-2}^{2}(x+|x|+2)dx = \int_{-2}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{2}(2x+2)dx \ = 12$

4) ①

$f(x) = -x^2+4$, $g(x) = 2x^2+ax+b$라 하자.

ⅰ) $y=g(x)$의 그래프가 $(2, 0)$을 지나므로

$g(2) = 8+2a+b = 0$

$\therefore \ 2a+b = -8 \ \cdots\cdots$ ㉠

ⅱ) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $(2, 0)$에서 접하므로

$f'(2) = g'(2)$

$f'(x) = -2x$, $g'(x) = 4x+a$이므로

$-2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 + a$

$\therefore \ a = -12 \ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $b = 16$이다.

$\therefore \ a+b = 4$

5) ②

$x \to -1-$일 때, $f(x) \to 0+$이고

$x \to 0+$일 때, $f(x) \to 1-$이므로

$\lim_{x \to -1-} f(f(x)) + \lim_{x \to 0+} f(f(x))$

$= \lim_{t \to 0+} f(t) + \lim_{t \to 1-} f(t)$

$= 1 + (-2) = -1$

6) ③

$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)+1}{x+2} = 3$에서 $f(2) = -1$, $f'(2) = 3$이고

$\lim_{x \to 2}\frac{g(x)-3}{x-2} = 1$에서 $g(2) = 3$, $g'(x) = 1$이다.

$h(x) = f(x)g(x)$라 하면

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$이므로

$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)g(x) - f(2)g(2)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$

$= h'(2)$

$= f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$

$= 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1$

$= 8$

7) ③

제품이 세 공장 A, B, C에서 생산되는 제품일 사건을 각각 A, B, C라 하고 제품이 불량일 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{2}{10}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{5}{10}$이고

$\mathrm{P}(E|A) = \frac{2}{100}$, $\mathrm{P}(E|B) = \frac{4}{100}$, $\mathrm{P}(E|C) = \frac{a}{100}$이다.

$\therefore \ \mathrm{P}(C|E)$

$= \frac{\mathrm{P}(C \cap E)}{\mathrm{P}(E)}$

$= \frac{\mathrm{P}(C \cap E)}{\mathrm{P}(A \cap E) + \mathrm{P}(B \cap E) + \mathrm{P}(C \cap E)}$

$= \frac{\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A) + \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B) + \mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)}$

$= \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{a}{100}}{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{100} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{100} + \frac{5}{10} \cdot \frac{a}{100}}$

$= \frac{5a}{14+5a}$

따라서 $\frac{5a}{14+5a} = \frac{15}{29}$에서 $a = 3$이다.

8) ④

시정거리 x가 3000(m)이상일 때,

$3 + \log 1.2 - \log d_1 \geq \log 3000$

$\log d_1 \leq \log \frac{1.2}{3} = \log 0.4$ ($\because \ \log 3000 = 3 + \log 3$)

$\therefore \ d_1 \leq 0.4$

9) ①

$a_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)dx$이므로

$\sum_{n=1}^{n} a_n$

$= \int_0^1 (x^2-x)dx + \int_0^1 (x^3-x^2)dx + \cdots + \int_0^1 (x^{11}-x^{10})dx$

$= \int_0^1 \{(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^{11}-x^{10})\}dx$

$= \int_0^1 (x^{11}-x)dx$

$= \left[\frac{x^{12}}{12} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{5}{12}$

[다른 풀이]

$a_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n)dx$

$= \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{1}{12}-\frac{1}{2}$

$=-\frac{5}{12}$

10) ①

조건 (가)에 의하여

$b=ar,\ c=ar^2$을 만족시키는 0이 아닌 실수 r이 존재한다.

조건 (나)에서

$a^2r=ar^2$

$\therefore\ a=r$

$\therefore\ b=a^2,\ c=a^3$

조건 (다)에서

$a+3a^2+a^3=-3$

$(a+3)(a^2+1)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ a=-3$

$\therefore\ a+b+c=(-3)+(-3)^2+(-3)^3=-21$

11) ③

원 C_1의 중심을 $\mathrm{C}_1(a,0)$이라 하면

직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1$은 점 $\mathrm{P}_1(1,1)$에서의 곡선 $y=x^2$의 접선에 수직이다.

점 P_1에서의 곡선 $y=x^2$의 접선의 기울기는 2이므로

$2\times\frac{1-0}{1-a}=-1$

$\therefore\ a=3$

12) ④

원 C_n의 중심을 $\mathrm{C}_n(a_n,0)$이라 하면

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n$은 점 $\mathrm{P}_n(n,n^2)$에서의 곡선 $y=x^2$의 접선에 수직이다.

점 P_n에서의 곡선 $y=x^2$의 접선의 기울기는 $2n$이므로

$2n\times\frac{n^2-0}{n-a_n}=-1$

$\therefore\ a_n=2n^3+n$

따라서 원 C_n의 넓이 S_n은

$S_n=\pi\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n}^2$

$=\pi\{(-2n^3)^2+(n^2)^2\}$

$=\pi(4n^6+n^4)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^6}=\lim_{n\to\infty}\pi\times\left(4+\frac{1}{n^2}\right)=4\pi$

13) ②

집합 A의 원소는 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ab \\ b\end{pmatrix}$$

의 해집합이다.

행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재한다고 가정하면

집합 A의 원소는 평면위의 한 점으로 원소의 개수가 1개다.

이 원소는 $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C\neq\varnothing$이므로 집합 B와 집합 C의 원소이어야한다.

즉, 집합 A의 원소는 집합 $A\cap B$의 원소이어야 한다.

그런데 곡선 $y=x^2+x+1$과 직선 $y=x-1$은 서로 만나지 않는다.

즉, $A\cap B=\varnothing$이다.

따라서 집합 A의 원소인 한 점이 $A\cap B$의 원소가 되는 것은 불가능하다.

따라서 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않는다.

$(a-1)\cdot 1-1=0$에서 $a=2$이고

이때, 연립방정식

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b \\ b\end{pmatrix}$를 만족시키는 해가 무수히 많아야하므로

$b=0$이어야 한다.

$\therefore\ a+b=2$

[참고]

집합 A의 원소는 직선 $x+y=0$ 위의 점이다.

14) ②

72회의 시행 중 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 Y라 하면

그 외의 눈이 나오는 횟수는 $72-Y$이므로

$X=3Y-2(72-Y)=5Y-144$이다.

$X\geq 11$에서

$5Y-144\geq 11$

$\therefore\ Y\geq 31$

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\frac{1}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=72\times\frac{1}{3}=24,\ \mathrm{V}(Y)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4^2$이고

72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로

정규분포 $\mathrm{N}(24,4^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\geq 11)=\mathrm{P}(Y\geq 31)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{31-24}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.75)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.75)$

$=0.5-0.4599$

$=0.0401$

15) ②

ㄱ. $\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=2+0=2$이고

$f(1)+g(1)=0+2=2$이므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=2\times 0=0$이고

$f(1)g(1)=0\times 2=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 함수 $\frac{f(x)+ax}{g(x)+bx}$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+ax}{g(x)+bx}=\frac{2+a}{b}\ (b\neq 0)$이고

$\frac{f(1)+a}{g(1)+b}=\frac{a}{2+b}\ (b\neq -2)$이므로

$\frac{2+a}{b}=\frac{a}{2+b}$에서

$4+2a+2b+ab=ab$

$\therefore\ a+b=-2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16) ⑤

ㄱ. $A^2-A=O$에서 $A(A-E)=O$ …… ㉠

$A-B=E$에서 $A-E=B$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $AB=O$ (참)

ㄴ. A의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A^2-A=O$에서

$A^{-1}(A^2-A)=A-E=O$이다.

이는 $A\neq E$라는 것에 모순된다.

따라서 A의 역행렬이 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. $A-B=E$에서 $A=E-B$

$AB=B-B^2$, $BA=B-B^2$이므로

$AB=BA=O$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore\ (A+B)^2=(A-B)^2=E$

$\therefore\ (A+B)^{-1}=A+B$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]

ㄷ. $A-B=E$에서 $A+B=2A-E$

$A^2-A=O$에서

$A^2-A+\frac{1}{4}E=\frac{1}{4}E$

$\left(A-\frac{1}{2}E\right)^2=\frac{1}{4}E$

$(2A-E)^2=E$

$\therefore\ (2A-E)^{-1}=2A-E$

따라서 $A+B$의 역행렬이 존재한다. (참)

17) ③

$a_{n+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=2^{n+1}(n^2+n+2)$ $(n\geq 1)$ …… ㉠

㉠의 n대신 $n-1$을 대입하면

$a_n-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}=2^n(n^2-n+2)$ …… ㉡

이다.

㉠−㉡에 의하여

$a_{n+1}-a_n-\frac{2}{n}a_n=\boxed{2^n(n^2+3n+2)}$ $(n\geq 2)$

이므로 $a_{n+1}-\frac{n+2}{n}a_n=2^n(n+1)(n+2)$

즉, $\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\frac{a_n}{n(n+1)}=2^n$

이다. $b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면

$b_{n+1}-b_n=\boxed{2^n}$ $(n\geq 2)$

이고 $b_2=0$이므로

$b_n=b_2+\sum_{k=2}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$

$=\sum_{k=2}^{n-1}2^k$

$=\frac{4(2^{n-2}-1)}{2-1}$

$=\boxed{2^n-4}$

이다.

$\therefore\ f(n)=2^n(n^2+3n+2)$

$g(n)=2^n$

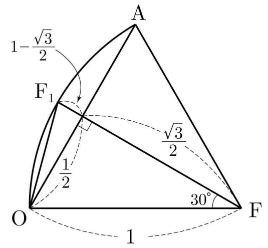
$h(n)=2^n-4$

$\therefore\ \frac{f(4)}{g(5)}+h(6)=\frac{2^4\cdot 30}{2^5}+(2^6-4)=75$

18) ④

$\mathrm{F_1}$이 호 OA를 이등분하므로

$\overline{\mathrm{OF_1}}$은 반지름의 길이가 1이고 중심각이 30°인 부채꼴의 현의 길이이다.



위 그림에서

$\overline{\mathrm{OF_1}}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2-\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{F_1E_1}}=\overline{\mathrm{OF_1}}$이므로

$S_1=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2-\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$이다.

정육각형 ABCDEF에서 정육각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$를 만드는 과정을 반복하고

정육각형 ABCDEF와 정육각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$의 넓이의 비가

$\overline{\mathrm{AF}}^2:\overline{\mathrm{A_1F_1}}^2=1:2-\sqrt{3}$이므로

수열 $\{S_n\}$은 공비가 $2-\sqrt{3}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$

19) ⑤

$x^3=-x^3+2x$에서 $x(x-1)(x+1)=0$이므로 점 A의 x좌표는 1이다.

점 O와 점 A에서 직선 $x=k$에 이르는 거리를 각각 a, b라 하면

(사각형 OBAC의 넓이)

=(△OBC의 넓이)+(△ABC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times a+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\times b$

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$ ($\because\ a+b=1$)

$=\frac{1}{2}\{(-k^3+2k)-k^3\}$

$=-k^3+k$ $(0<k<1)$

$f(k)=-k^3+k(0<k<1)$라 할 때,

$f'(k)=-3k^2+1$이고

$f'(k)=0$에서 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

k	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		↗	극대	↘	

위의 증감표에 의하여 $f(k)$는 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때, 극대이자 최대이다.

따라서 구하는 k의 값은 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

20) ⑤

$\sum_{k=1}^{10} f(2^k)=\sum_{k=1}^{10} 2^k=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2046$

$2^n \le k < 2^{n+1}$일 때, $n \le \log_2 k < n+1$이므로 $f(\log_2 k)=n$이다.

이때, $f(\log_2 k)=n$인 자연수 k의 개수는 $2^{n+1}-2^n=2^n$이다.

$2=2^1$, $1024=2^{10}$이므로

$\sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)=\sum_{n=1}^{9} n\cdot 2^n+10$

$S=\sum_{n=1}^{9} n\cdot 2^n=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+9\cdot 2^9$ ⋯⋯ ㉠

이라 하면

$2S=\sum_{n=1}^{9} n\cdot 2^{n+1}=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+9\cdot 2^{10}$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡에서 $-S=\sum_{n=1}^{9} 2^n-9\cdot 2^{10}$

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+9\cdot 2^9 \\ -2S & = & \qquad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+9\cdot 2^{10} \\ \hline -S & = & 2+2^2+2^3+\cdots+2^9-9\cdot 2^{10} \end{array}$$

$\therefore\ S=9\cdot 2^{10}-\sum_{n=1}^{9} 2^n$

$=9\cdot 2^{10}-\frac{2(2^9-1)}{2-1}$

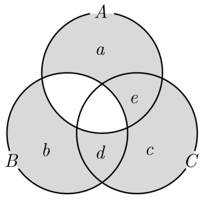
$=8\cdot 2^{10}+2$

$=8194$

$\therefore\ \sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)=8194+10=8204$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} f(2^k)+\sum_{k=2}^{1024} f(\log_2 k)=2046+8204=10250$

21) ②



집합 $S(n)$의 각 원소가 위 벤다이어그램의 a, b, c, d, e의 위치 중 어느 하나에 속하게 될 때, 집합 A, B, C가 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 집합 A, B, C를 정하는 방법의 수 $a_n=5^n$이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$

22) 52

그래프의 꼭짓점의 개수가 10개이므로 행렬 A는 10×10정사각행렬이다.

그래프의 변의 개수가 12개 이므로

행렬 A의 성분 중 1인 것의 개수 $a=2\times 12=24$이고

행렬 A의 성분 중 0인 것의 개수 $b=10^2-24=76$이다.

$\therefore\ b-a=52$

23) 10

$\log_2(3x^2+7x)$가 정의되어야 하므로

$x<-\frac{7}{3}$ 또는 $x>0$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2(x+1)$가 정의되어야 하므로

$x>-1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x>0$이다.

$\log_2(3x^2+7x)=1+\log_2(x+1)$에서

$\log_2(3x^2+7x)=\log_2 2(x+1)$

$3x^2+7x=2(x+1)$

$(3x-1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$ ($\because\ x>0$)

$\therefore\ p=3,\ q=1$

$\therefore\ p^2+q^2=10$

24) 45

$3(y+z)=32-x$

$3(y+z)$가 3의 배수이므로 $32-x$도 3의 배수이어야 한다.

x, y, z가 자연수이므로

$32-x=6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \cdots,\ 30$

이고 이때,

$x=26,\ 23,\ 20,\ \cdots,\ 2$

$y+z=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10$이다.

$y=y'+1$, $z=z'+1$이라 하면

$y'+z'=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$

이고 순서쌍 $(y',\ z')$을 정하는 방법의 가짓수는

${}_2\mathrm{H}_0+{}_2\mathrm{H}_1+{}_2\mathrm{H}_2+\cdots+{}_2\mathrm{H}_8$

$={}_1\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_9\mathrm{C}_8$

$={}_1\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_9\mathrm{C}_8$

$={}_1\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1+\cdots+{}_9\mathrm{C}_1$

$=1+2+3+\cdots+9$

$=\frac{9\cdot 10}{2}=45$

이다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 45개다.

25) 14

$f(x)+f(-x)=4x^2+8$이므로

$\int_{-2}^{2} f(x)dx=f(-a)+f(a)$에서

$\int_{0}^{2} 4(x^2+2)dx=4(a^2+2)$

$\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_0^2=(a^2+2)$

$\therefore\ 3a^2=14$

[참고]

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}\{f(x)+f(-x)\}dx$

26) 33

$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{2n}\right)$

$=8\times\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(x)dx$

$=8\times\int_{1}^{\frac{3}{2}}(3x^2+2x+1)dx$

$=8\times\left[x^3+x^2+x\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$

$=(27+18+12)-24$

$=33$

27) 24

뒤집은 3개의 동전 중 앞면인 것의 개수를 $a(=0,\ 1,\ 2,\ 3)$라 하자.

i) $a=0$일 때, $X=6$이고

이때의 확률은 $\frac{{}_3C_0\times{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$이다.

ii) $a=1$일 때, $X=4$이고

이때의 확률은 $\frac{{}_3C_1\times{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$이다.

iii) $a=2$일 때, $X=2$이고

이때의 확률은 $\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$이다.

iv) $a=3$일 때, $X=0$이고

이때의 확률은 $\frac{{}_3C_3\times{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$이다.

i)~iv)에 의하여 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	6	합계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

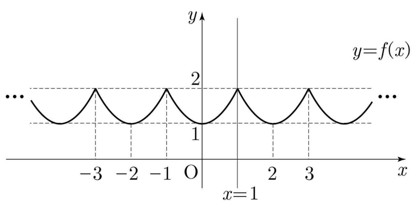
$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\frac{24+72+24}{35}=\frac{24}{7}$

$\therefore\ \mathrm{E}(7X)=24$

28) 29

조건 (가), (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축과 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 2를 주기로 같은 모양이 반복된다.



$\therefore\ \int_{-n}^{n} f(x)dx$

$=n\times\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx=2n\times\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$

$=2n\times\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{8}{3}n$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} ka_k=\frac{8}{3}n$

따라서 $n\geq 2$일 때,

$na_n=\sum_{k=1}^{n} ka_k-\sum_{k=1}^{n-1} ka_k=\frac{8}{3}$

$\therefore\ a_7=\frac{1}{7}\times\frac{8}{3}=\frac{8}{21}$

$\therefore\ p=21,\ q=8$

$\therefore\ p+q=29$

29) 230

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 20이고 공차가 -3인 등차수열이므로

$b_{2k}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2k-1}-a_{2k})$

$=3+3+\cdots+3$

$=3k$

$b_{2k-1}=a_1+(-a_2+a_3)+(-a_4+a_5)+\cdots+(-a_{2k-2}+a_{2k-1})$

$=20+(-3)+(-3)+\cdots+(-3)$

$=23-3k$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{20} b_k=\sum_{k=1}^{10} b_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10} b_{2k}$

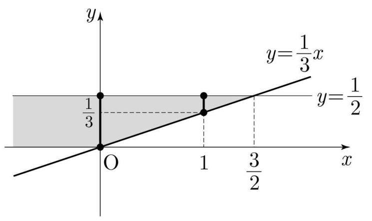
$=\sum_{k=1}^{10}(b_{2k-1}+b_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{10} 23$

$=230$

30) 13

연립부등식 $\begin{cases} y\geq\frac{1}{3}x \\ 0\leq y\leq\frac{1}{2}\end{cases}$ 의 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



n이 자연수이므로 $f(n)$은 음이 아닌 정수이다.

$\therefore\ f(n)=0$ 또는 $f(n)=1$

i) $f(n)=0$일 때, $0\leq g(n)\leq\frac{1}{2}$이므로

$0\leq f(n)+g(n)\leq\frac{1}{2}$

$0\leq\log n\leq\frac{1}{2}$ …… ㉠

상용로그표에 의하여 $\log 3.1<\frac{1}{2}<\log 3.2$이므로

㉠을 만족시키는 자연수 $n=1,\ 2,\ 3$이다.

ii) $f(n)=1$일 때, $\frac{1}{3}\leq g(n)\leq\frac{1}{2}$이므로

$1+\frac{1}{3}\leq f(n)+g(n)\leq 1+\frac{1}{2}$

$1+\frac{1}{3} \le \log n \le 1+\frac{1}{2}$ …… ㉡

상용로그표에 의하여

$1+\log 2.1 < 1+\frac{1}{3} < 1+\log 2.2$,

$1+\log 3.1 < 1+\frac{1}{2} < 1+\log 3.2$이므로 즉,

$\log 21 < 1+\frac{1}{3} < \log 22$,

$\log 31 < 1+\frac{1}{2} < \log 32$이므로

㉡을 만족시키는 자연수 $n=22,\ 23,\ \cdots,\ 31$이다.

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 자연수 n의 개수는 $3+10=13$이다.