제 3 교시 수 학 영 역

'가'형

성명	

수험번호							

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\log_2(4\sqrt{2}-\sqrt{10})-\log_2(4-\sqrt{5})$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

3. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|3\vec{a}-2\vec{b}|=6$일 때, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 1008, 1233과 같이 각 자리의 숫자의 합이 9인 네 자리의 자연수의 개수는? [3점]

① 165 ② 170 ③ 175 ④ 180 ⑤ 185

5. 주머니 속에 1, 2, 3, 4, 5의 수가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 적힌 수를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 25회 반복할 때, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수들 중 두 수의 합이 나머지 한 수와 같은 경우가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X^2의 평균 $\mathrm{E}(X^2)$의 값은? [3점]

① 102 ② 104 ③ 106 ④ 108 ⑤ 110

6. $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$인 두 수 α, β가

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{4},\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\cos(3\alpha+\beta)$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

[7~8] 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\int_0^n f(x)\,dx,\ b_n=\int_{n-1}^n g(x)\,dx\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

다음 두 물음에 답하여라.

7. $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=f(x)+1$일 때, a_3+b_4의 값은? [3점]

① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

8. $f(x)=g(x)$이고 $b_n=2n+3$일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 110 ② 120 ③ 130 ④ 140 ⑤ 150

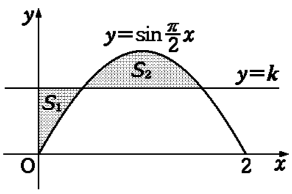
9. 모든 실수 x에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=4$$

가 성립한다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to3}\frac{g(g(x))-1}{x-3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

10. 그림과 같이 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x\,(0\le x\le 2)$와 직선 $y=k\,(0<k<1)$가 있다. 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_2=2S_1$일 때, 상수 k의 값은? [3점]



① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

11. 수직선 위의 원점에 위치한 점 A가 있다. 주사위 1개를 던질 때 3의 배수의 눈이 나오면 점 A를 양의 방향으로 3만큼 이동하고, 그 이외의 눈이 나오면 점 A를 음의 방향으로 2만큼 이동하는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 72회 반복할 때, 점 A의 좌표를 확률변수 X라 하자. 확률 $\mathrm{P}(X\ge 11)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

① 0.0228 ② 0.0401 ③ 0.0668
④ 0.1056 ⑤ 0.1587

12. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2-A=O,\ A-B=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [3점]

보기
ㄱ. $AB=O$
ㄴ. $A\ne E$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다.
ㄷ. $A+B$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

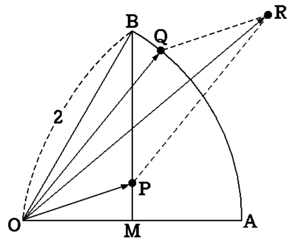
13. 곡선 $x^2+(y-1)^2=1\ (y \geq 1)$과 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① $\frac{1}{2}\pi^2+\frac{5}{3}\pi$ ② $\frac{1}{2}\pi^2+\frac{10}{3}\pi$ ③ $\pi^2+\frac{5}{3}\pi$
④ $\pi^2+\frac{10}{3}\pi$ ⑤ $2\pi^2+\frac{5}{3}\pi$

14. 두 함수 $f(x)=e^x(x^2+ax+b)$, $g(x)=e^{-x}(x^2+ax+b)$는 각각 $x=-3$, $x=2$에서 극댓값을 갖는다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 극솟값을 각각 m_1, m_2라 할 때, m_1+m_2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $-2e$ ② $-e-1$ ③ 0 ④ $e-1$ ⑤ $2e$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB에서 선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점 P는 두 선분 OM과 BM 위를 움직이고, 점 Q는 호 AB 위를 움직인다. $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{3}$

16. 첫째항이 -8인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{n+1}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=2^{n+1}(n^2+n+2)\ (n \geq 1)$$

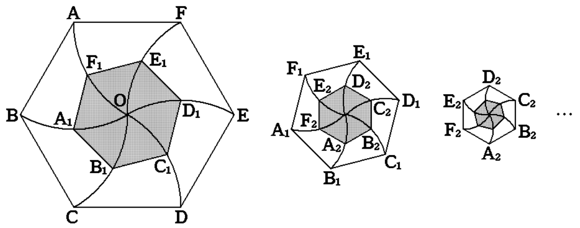
이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식에 의하여
>
> $$a_n-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}=2^n(n^2-n+2)\ (n \geq 2)$$
>
> 이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}-a_n-\frac{2}{n}a_n=\boxed{(가)}$$
>
> 이므로
>
> $$a_{n+1}-\frac{n+2}{n}a_n=\boxed{(가)}$$
>
> 이다. $b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면
>
> $$b_{n+1}-b_n=\boxed{(나)}\ (n \geq 2)$$
>
> 이고, $b_2=0$이므로
>
> $$b_n=\boxed{(다)}\ (n \geq 2)$$
>
> 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(4)}{g(5)}+h(6)$의 값은? [4점]

① 65 ② 70 ③ 75
④ 80 ⑤ 85

17. 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 길이가 2인 대각선의 교점을 O라 하자. 그림과 같이 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자.
정육각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1\mathrm{F}_1$에서 꼭짓점 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1을 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하자.
정육각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2\mathrm{E}_2\mathrm{F}_2$에서 꼭짓점 A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 $60°$만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정육각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

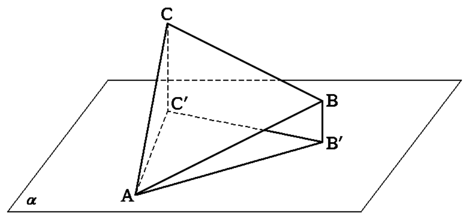


① $\dfrac{7-3\sqrt{3}}{4}$　② $\dfrac{7-2\sqrt{3}}{4}$　③ $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{4}$
④ $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\dfrac{9-2\sqrt{3}}{4}$

18. $0 \le x \le \pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=\pi$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. S_1+S_2의 값은? [4점]

① $\ln\dfrac{3}{2}$　② $\ln\dfrac{4}{3}$　③ $2\ln\dfrac{3}{2}$
④ $2\ln\dfrac{4}{3}$　⑤ $4\ln\dfrac{3}{2}$

19. 그림과 같이 평면 α와 한 점 A에서 만나는 정삼각형 ABC가 있다. 두 점 B, C의 평면 α 위로의 정사영을 각각 B′, C′이라 하자. $\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{B'C'}}=2$, $\overline{\mathrm{C'A}}=\sqrt{3}$일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{3}$　② $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$　③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$
④ $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$

20. 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
> ㄴ. 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.
> ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x)=e^x-1$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=-f(x)+e-1$이다.

$\int_0^3 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $2e-3$ ② $2e-1$ ③ $2e+1$
④ $2e+3$ ⑤ $2e+5$

단답형

22. 좌표평면에서 x축에 대한 대칭변환을 f, 원점을 중심으로 $60°$만큼 회전하는 회전변환을 g라 하자 일차변환 $(g \circ f)^{-1}$을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$이라 할 때, $100(a^2+b^2)$의 값을 구하여라. [3점]

23. 표는 어느 학교의 두 동아리 A, B의 남학생 수와 여학생 수를 나타낸 것이다.

구분 / 동아리	남학생(명)	여학생(명)	합계(명)
A	8	16	24
B	12	12	24

다음은 여름방학이 지난 후 두 동아리 A, B의 변동된 학생 수에 대한 설명이다.

> (가) 동아리 A에서는 남학생 x명이 새로 가입하여 동아리 A의 학생 중에서 남학생의 비율이 y%가 되었다.
> (나) 동아리 B에서는 여학생 x명이 탈퇴하여 동아리 B의 학생 중에서 남학생의 비율이 $(y+25)$%가 되었다.

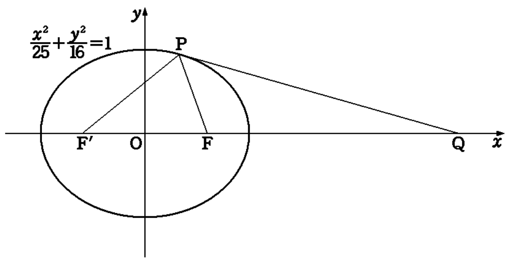
$x+y$의 값을 구하여라. [3점]

24. 한 모서리의 길이가 $6\sqrt{6}$인 정사면체 ABCD에 대하여 등식

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PA}$$

를 만족시키는 점 P가 있다. 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 할 때, 선분 PG의 길이를 구하여라. [3점]

25. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하자. 타원 위의 한 점 P와 x축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{PF}:\overline{PF'}=\overline{QF}:\overline{QF'}=2:3$일 때, $\overline{PQ}^2$의 값을 구하여라.
(단, 점 Q는 타원 외부의 점이다.) [3점]

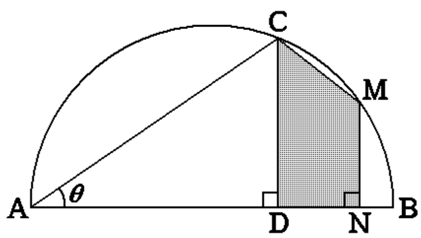


26. 지호와 영수는 가위바위보를 한 번 할 때마다 다음과 같은 규칙으로 사탕을 받는 게임을 한다.

> ㈎ 이긴 사람은 2개의 사탕을 받고, 진 사람은 1개의 사탕을 받는다.
> ㈏ 비긴 경우에는 두 사람 모두 1개의 사탕을 받는다.

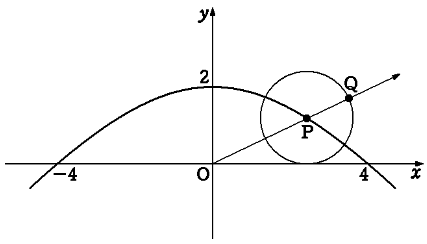
게임을 시작하고 나서 지호가 받은 사탕의 총 개수가 5인 경우가 생길 확률은 $\frac{k}{243}$이다. 자연수 k의 값을 구하여라.
(단, 두 사람이 각각 가위, 바위, 보를 낼 확률은 같다.) [4점]

27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위를 움직이는 점 C가 있다. 호 BC의 길이를 이등분하는 점을 M이라 하고, 두 점 C, M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 D, N이라 하자. $\angle CAB=\theta$라 할 때, 사각형 CDNM의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $16a$의 값을 구하여라.
(단, 점 C는 선분 AB의 양 끝점이 아니다.) [4점]



28. 좌표공간에 여섯 개의 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{D}(-2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{E}(0,\ -2,\ 0)$, $\mathrm{F}(0,\ 0,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 정팔면체 ABCDEF가 있다. 이 정팔면체와 평면 $x+y+z=0$이 만나서 생기는 도형의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하여라. [4점]

29. 그림과 같이 좌표평면에서 세 점 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, $(0,\ 2)$를 지나는 포물선이 있다. $-4 < x < 4$인 범위에서 포물선 위를 움직이는 점을 P라 할 때, 점 P를 중심으로 하고 x축에 접하는 원을 그린 다음, 반직선 OP와 이 원의 교점 중에서 원점 O로부터 더 멀리 있는 점을 Q라 하자. 점 Q가 그리는 도형과 x축 및 직선 $x=-4$, $x=4$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하자. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(f(n),\ g(n))$이 연립부등식

$$\begin{cases} y \ge \frac{1}{3}x \\ 0 \le y \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

의 영역에 속하도록 하는 자연수 n의 개수를 오른쪽 상용로그표를 이용하여 구하여라. [4점]

x	$\log x$
2.1	0.3222
2.2	0.3424
3.1	0.4914
3.2	0.5051

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2014년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ②

$\log_2(4\sqrt{2}-\sqrt{10})-\log_2(4-\sqrt{5})$

$=\log_2\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4-\sqrt{5}}$

$=\log_2\sqrt{2}$

$=\dfrac{1}{2}$

2) ①

$f(x)=\ln x$라 할 때, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$=f'(1)\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{3}$

[다른 풀이]

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x^3-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x^2+x+1}$

$=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

3) ③

$|3\vec{a}-2\vec{b}|^2$

$=(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$

$=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=9\cdot4-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot9$

$=36$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=3$

4) ①

네 자리 자연수의 각 자리의 숫자를 천의 자리부터 차례로 $a,\ b,\ c,\ d$라 하면 구하는 자연수의 개수는

$a+b+c+d=9$이고 $a\neq0$을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와 같다.

$a+b+c+d=9$를 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_4\mathrm{H}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$이다.

이중 $a=0$인 순서쌍의 개수는 $b+c+d=9$를 만족시키는 순서쌍의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=\dfrac{11\cdot10}{2\cdot1}=55$이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $220-55=165$이다.

5) ③

주머니에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수들 중 두 수의 합이 나머지 한 수와 같은 경우는

세 수가 (1, 2, 3) (1, 3, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 5)인 경우이다.

꺼낸 세 수가 위와 같을 확률은 $\dfrac{4}{{}_5\mathrm{C}_3}=\dfrac{2}{5}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \dfrac{2}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=25\times\dfrac{2}{5}=10,$

$\mathrm{V}(X)=25\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=6$

$\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=6+10^2=106$

6) ②

$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$0<\alpha+\beta<\pi,\ 0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}$이고

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \beta-\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{4},\ \beta=\dfrac{5}{12}\pi$

$\therefore\ \cos(3\alpha+\beta)=\cos\dfrac{7}{6}\pi=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7) ⑤

$a_3=\displaystyle\int_0^3\sqrt{x}\,dx=\left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^3=2\sqrt{3}$

$b_4=\displaystyle\int_3^4(\sqrt{x}+1)dx=\left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+x\right]_3^4=\dfrac{19}{3}-2\sqrt{3}$

$\therefore\ a_3+b_4=\dfrac{19}{3}$

8) ④

$a_n-a_{n-1}=\displaystyle\int_0^n f(x)dx-\int_0^{n-1}f(x)dx=\int_{n-1}^n f(x)dx$

이므로 $f(x)=g(x)$일 때, $a_1=b_1$이고 $a_n-a_{n-1}=b_n$이 성립한다.

$\therefore\ a_{10}=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(a_{k+1}-a_k)$

$=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{9}b_{k+1}=\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{10}(2k+3)$ ($\because\ b_n=2n+3$)

$=\dfrac{10(5+23)}{2}=140$

9) ②

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=\dfrac{1}{2}$에서 $f(1)=2,\ f'(1)=\dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore\ g(2)=1,\ g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=2$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=4$에서 $f(2)=3,\ f'(2)=4$이다.

$\therefore\ g(3)=2,\ g'(3)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{4}$

$h(x)=g(g(x))$라 하면

$h'(x)=g'(g(x))g'(x)$이고

$h(3)=g(g(3))=g(2)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{g(g(x))-1}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}$

$=h'(3)$

$=g'(g(3))g'(3)$

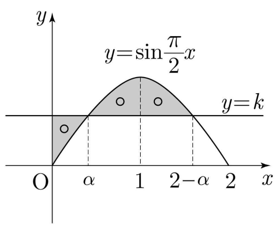
$=g'(2)g'(3)$

$=2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

10) ④

곡선 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$는 $x=1$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$와 직선 $y=k$의 교점을 그림과 같이 $\alpha,\ 2-\alpha$로 놓을 수 있다.



$S_1=\displaystyle\int_0^{\alpha}\left(k-\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$S_2=\displaystyle\int_{\alpha}^{2-\alpha}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-k\right)dx$

$=2\displaystyle\int_{\alpha}^{1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-k\right)dx$

$S_2=2S_1$이므로

$\displaystyle\int_0^{\alpha}\left(k-\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx=\int_{\alpha}^{1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x-k\right)dx$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{\alpha}\left(k-\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_{\alpha}^{1}\left(k-\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$=\displaystyle\int_0^{1}\left(k-\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx=0$

$\therefore\ k=\displaystyle\int_0^{1}\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$=\left[-\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{2}x\right]_0^1$

$=\dfrac{2}{\pi}$

11) ②

72회의 시행 중 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 Y라 하면

그 외의 눈이 나오는 횟수는 $72-Y$이므로

$X=3Y-2(72-Y)=5Y-144$이다.

$X\geq 11$에서

$5Y-144\geq 11$

$\therefore\ Y\geq 31$

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \dfrac{1}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=72\times\dfrac{1}{3}=24,\ \mathrm{V}(Y)=72\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=4^2$이고

72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로

정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\geq 11)=\mathrm{P}(Y\geq 31)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{31-24}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.75)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.75)$

$=0.5-0.4599$

$=0.0401$

12) ⑤

ㄱ. $A^2-A=O$에서 $A(A-E)=O$ …… ㉠

$A-B=E$에서 $A-E=B$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $AB=O$ (참)

ㄴ. A의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A^2-A=O$에서

$A^{-1}(A^2-A)=A-E=O$이다.

이는 $A\neq E$라는 것에 모순된다.

따라서 A의 역행렬이 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. $A-B=E$에서 $A=E-B$

$AB=B-B^2,\ BA=B-B^2$이므로

$AB=BA=O$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore\ (A+B)^2=(A-B)^2=E$

$\therefore\ (A+B)^{-1}=A+B$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]

ㄷ. $A-B=E$에서 $A+B=2A-E$

$A^2-A=O$에서

$A^2-A+\dfrac{1}{4}E=\dfrac{1}{4}E$

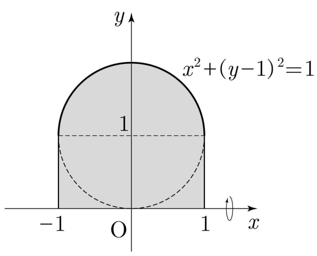
$\left(A-\dfrac{1}{2}E\right)^2=\dfrac{1}{4}E$

$(2A-E)^2=E$

$\therefore\ (2A-E)^{-1}=2A-E$

따라서 $A+B$의 역행렬이 존재한다. (참)

13) ④



$x^2+(y-1)^2=1$에서

$y=1+\sqrt{1-x^2}$ ($\because\ y\geq 1$)

이므로 구하는 회전체의 부피 V는

$V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}y^2dx$

$= \pi \int_{-1}^{1} (1+\sqrt{1-x^2})^2 dx$

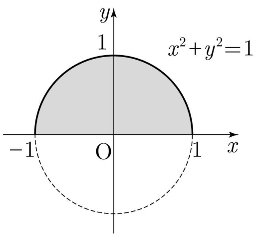
$= \pi \int_{-1}^{1} (2-x^2+2\sqrt{1-x^2}) dx$

$= \pi \int_{-1}^{1} (2-x^2) dx + 2\pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2}) dx$

$= 2\pi \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2\pi \cdot \frac{\pi}{2}$

$= \pi^2 + \frac{10}{3}\pi$

$\left(\because \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}) dx \text{는 반지름의 길이가 1인 반원의 넓이와 같다.} \right)$



14) ②

$f'(x) = e^x(x^2+ax+b) + e^x(2x+a)$

$= e^x\{x^2+(a+2)x+a+b\}$

$g'(x) = -e^{-x}(x^2+ax+b) + e^{-x}(2x+a)$

$= -e^{-x}\{x^2+(a-2)x-a+b\}$

미분가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 각각 $x=-3$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(-3)=0$, $g'(2)=0$이다.

$f'(-3) = e^{-3}\{9-3(a+2)+a+b\} = 0$

$\therefore\ 2a-b=3$ …… ㉠

$g'(2) = -e^{-2}\{4+2(a-2)-a+b\} = 0$

$\therefore\ a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=-1$

$f'(x) = e^x(x^2+3x) = e^x \cdot x(x+3)$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ m_1 = f(0) = e^0 \cdot (0+0-1) = -1$

$g'(x) = -e^{-x}(x^2-x-2) = -e^{-x}(x-2)(x+1)$

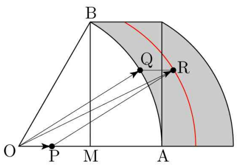
이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore\ m_2 = g(-1) = e^1(1-1-1) = -e$

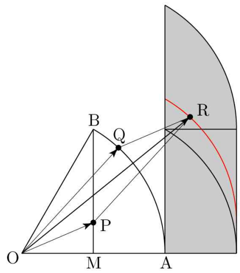
$\therefore\ m_1+m_2 = -e-1$

15) ③

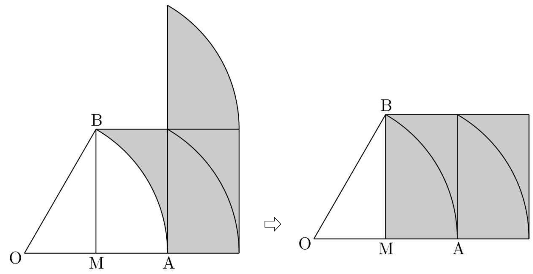
점 P가 선분 OM 위를 움직일 때, 점 R이 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



점 P가 선분 BM 위를 움직일 때, 점 R이 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 점 R이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.



위 영역의 넓이는 가로의 길이가 2이고 세로의 길이가 $\sqrt{3}$인 직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

16) ③

$a_{n+1} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = 2^{n+1}(n^2+n+2)$ $(n \ge 1)$ …… ㉠

㉠의 n대신 $n-1$을 대입하면

$a_n - 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k} = 2^n(n^2-n+2)$ …… ㉡

이다.

㉠−㉡에 의하여

$a_{n+1} - a_n - \frac{2}{n}a_n = \boxed{2^n(n^2+3n+2)}$ $(n \ge 2)$

이므로 $a_{n+1} - \frac{n+2}{n}a_n = 2^n(n+1)(n+2)$

즉, $\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{a_n}{n(n+1)} = 2^n$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n(n+1)}$이라 하면

$b_{n+1} - b_n = \boxed{2^n}$ $(n \ge 2)$

이고 $b_2 = 0$이므로

$b_n = b_2 + \sum_{k=2}^{n-1}(b_{k+1}-b_k) = \sum_{k=2}^{n-1} 2^k = \frac{4(2^{n-2}-1)}{2-1}$

$= \boxed{2^n - 4}$

이다.

$\therefore\ f(n) = 2^n(n^2+3n+2)$

$g(n) = 2^n$

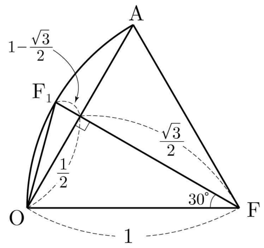
$h(n) = 2^n - 4$

$\therefore\ \frac{f(4)}{g(5)} + h(6) = \frac{2^4 \cdot 30}{2^5} + (2^6-4) = 75$

17) ④

F_1이 호 OA를 이등분하므로

$\overline{OF_1}$은 반지름의 길이가 1이고 중심각이 $30°$인 부채꼴의 현의 길이이다.



위 그림에서

$\overline{OF_1}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2-\sqrt{3}$

$\overline{F_1E_1}=\overline{OF_1}$이므로

$S_1=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2-\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})$이다.

정육각형 ABCDEF에서 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$를 만드는 과정을 반복하고

정육각형 ABCDEF와 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$의 넓이의 비가

$\overline{AF}^2 : \overline{A_1F_1}^2=1:2-\sqrt{3}$이므로

수열 $\{S_n\}$은 공비가 $2-\sqrt{3}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$

18) ③

$f(x)=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ $(\because\ 0\le x\le\pi)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$에서 x축과 만난다.

이때, $f(x)+f(\pi-x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는

점 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ S_1=S_2$

$\therefore\ S_1+S_2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+2}dx$

$t=\sin x+2$라 하면

$x=0$일 때, $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때, $t=3$이고

$dt=\cos x dx$이므로

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+2}dx=2\int_2^3\frac{1}{t}dt$

$=2\Big[\ln x\Big]_2^3=2(\ln 3-\ln 2)=2\ln\frac{3}{2}$

19) ④

정삼각형의 한 변의 길이를 x라 하면

$\overline{AB'}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 BAB'에서 $\overline{BB'}=\sqrt{x^2-5}$

$\overline{C'A}=\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 CAC'에서 $\overline{CC'}=\sqrt{x^2-3}$

점 B에서 선분 CC'에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$\overline{BH}=\overline{B'C'}=2$이므로 직각삼각형 CBH에서 $\overline{CH}=\sqrt{x^2-4}$

$\overline{CC'}=\overline{CH}+\overline{HC'}$이고 $\overline{HC}=\overline{BB'}$이므로

$\sqrt{x^2-3}=\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x^2-4}$

$\sqrt{x^2-4}=t(\ge 0)$이라 하면

$\sqrt{t^2+1}=\sqrt{t^2-1}+t$

$\sqrt{t^2+1}-\sqrt{t^2-1}=t$

위 식의 양변을 제곱하면

$2t^2-2\sqrt{t^4-1}=t^2$

$t^2=2\sqrt{t^4-1}$

위 식의 양변을 제곱하면

$t^4=4t^4-4$

$\therefore\ t^4=\frac{4}{3}$

$\therefore\ t^2=x^2-4=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ x^2=\frac{2+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$

20) ⑤

$f(x)=x\sin x$에서

$f'(x)=\sin x+x\cos x$, $f''(x)=2\cos x-x\sin x$

ㄱ. $f'(0)=0$, $f''(0)=2>0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄴ. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 생각하자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, t\sin t)$에서의 접선의 방정식은

$y=(\sin t+t\cos t)(x-t)+t\sin t$

위 직선이 원점을 자날 때,

$0=(\sin t+t\cos t)(0-t)+t\sin t$

$t^2\cos t=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $\cos t=0$

$t=2n\pi+\frac{\pi}{2}$(n은 정수)일 때, $f'(x)=1$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}, 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=x$이다.

따라서 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다. (참)

ㄷ. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$이고 $f'\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)<0$이므로

$f(a)=0$이고 $f'(x)$의 부호가 $x=a$를 기준으로 양에서 음으로 바뀌도록 하는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$에 존재한다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]

ㄴ. 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$와 점 (t, t)에서 접할 때,

$f(t)=t$이고 $f'(t)=1$이다.

$f(t)=t$에서 $t\sin t=t$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$t=0$일 때, $f'(t)=0$이고

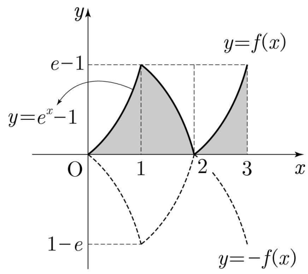
$t=2n\pi+\frac{\pi}{2}$일 때, $f'(t)=1$이므로

함수 $y=f(x)$는 직선 $y=x$와 점 $\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}, 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$에서 접한다.

(참)

21) ①

조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



위 그림에서 $\int_1^3 f(x)dx$는 가로와 세로의 길이가 각각 1, $e-1$인 직사각형의 넓이와 같다.

$\therefore \int_0^3 f(x)dx$

$=\int_0^1 (e^x-1)dx+(e-1)\times 1$

$=[e^x-x]_0^1+e-1$

$=2e-3$

22) 150

변환 f를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

변환 g를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\cos 60 & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

변환 $g\circ f$를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

따라서 변환 $(g\circ f)^{-1}$를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\therefore a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 100(a^2+b^2)=100\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)=150$

[다른 풀이]

$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

$f^{-1}=f$이므로 변환 f^{-1}을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

변환 g^{-1}는 원점을 중심으로 -60°만큼 회전하는 회전변환이므로 변환 g^{-1}을 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}\cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ)\\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

따라서 변환 $(g\circ f)^{-1}$를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\therefore a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 100(a^2+b^2)=100\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)=150$

23) 58

조건 (가), (나)에 의하여

$y=\frac{8+x}{24+x}\times 100$이고

$\frac{12}{24-x}\times 100=\frac{8+x}{24+x}\times 100+25$

즉, $\frac{12}{24-x}\times 4=\frac{8+x}{24+x}\times 4+1$

위 식의 양변에 $(24-x)(24+x)$를 곱하면

$48(24+x)=4(8+x)(24-x)+24^2-x^2$

$5x^2-16x-8\cdot 24=0$

$(5x+24)(x-8)=0$

$\therefore x=8$

$\therefore y=\frac{16}{32}\times 100=50$

$\therefore x+y=58$

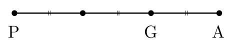
24) 24

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PA}$

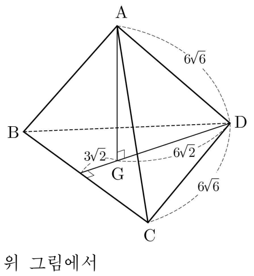
$3\cdot\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{3}=2\overrightarrow{PA}$

$3\overrightarrow{PG}=2\overrightarrow{PA}$

$\therefore \overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$



$\therefore \overline{PG}=2\times\overline{AG}$



위 그림에서

$\overline{AG}=\sqrt{(6\sqrt{6})^2-(6\sqrt{2})^2}=12$

$\therefore \overline{PG}=2\times\overline{AG}=24$

25) 192

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=10$이고, $\overline{PF}:\overline{PF'}=2:3$이므로

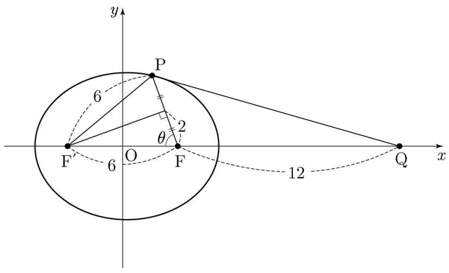
$\overline{PF}=4$, $\overline{PF'}=6$이다.

또한, $\overline{QF}:\overline{QF'}=2:3$에서 $\overline{F'F}:\overline{FQ}=1:2$이고

타원의 정의에 의하여 $\overline{F'F}=2\times\sqrt{25-16}=6$ 이므로 $\overline{FQ}=12$

$\triangle PF'F$는 이등변삼각형이므로

$\angle PFF'=\theta$라 하면 $\cos\theta=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$



삼각형 PFQ에서 코사인정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{FQ}}^2-2\overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{FQ}}\cos(\pi-\theta)$

$=4^2+12^2-2\cdot4\cdot12\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$=192$

26) 182

가위바위보를 한 번 할 때,

지호가 사탕을 2개 받는 경우는 가위바위보에서 이긴 경우이므로 확률은 $\dfrac{1}{3}$이고

사탕을 1개 받는 경우는 가위바위보에서 비기거나 지는 경우이므로 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다.

게임에서 사탕을 2번 받는 횟수를 a, 1번 받는 횟수를 b라 할 때,

$2a+b=5$에서 $(a,\ b)=(2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (0,\ 5)$이다.

i) $(a,\ b)=(2,\ 1)$인 경우 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$

ii) $(a,\ b)=(1,\ 3)$인 경우 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{32}{81}$

iii) $(a,\ b)=(0,\ 5)$인 경우 확률은

${}_5\mathrm{C}_0\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{32}{243}$

i), ii), iii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{2}{9}+\dfrac{32}{81}+\dfrac{32}{243}=\dfrac{182}{243}$

[다른 풀이]

가위바위보를 한 번 할 때,

지호가 사탕을 2개 받는 경우는 가위바위보에서 이긴 경우이므로 확률은 $\dfrac{1}{3}$이고

사탕을 1개 받는 경우는 가위바위보에서 비기거나 지는 경우이므로 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다.

지호가 받은 사탕의 총 개수가 n개인 경우가 생길 확률을 a_n이라 할 때,

지호가 받은 사탕의 총 개수가 $n+2$개인 경우는 사탕을 $n+1$개 가지고 있는 상태에서 가위바위보에서 비기거나 질 때, 또는 사탕을 n개 가지고 있는 상태에서 가위바위보에서 이기는 경우이므로 다음 점화식이 성립한다.

$a_{n+2}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}a_{n+1}$

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$이므로

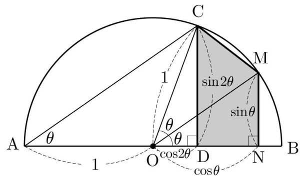
$\{a_{n+1}-a_n\}$은 공비가 $-\dfrac{1}{3}$인 등비수열을 이룬다.

$a_1=\dfrac{2}{3},\ a_2=\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{7}{9}$이므로

$a_5=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\{a_{k+1}-a_k\}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\dfrac{1}{9}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4\right\}}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{182}{243}$

$\therefore\ k=182$

27) 36



반원의 중심을 O라 하면

$\angle\mathrm{COD}=2\theta,\ \angle\mathrm{MON}=\theta$이고

반지름의 길이가 1이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sin2\theta,\ \overline{\mathrm{MN}}=\sin\theta$

$\overline{\mathrm{DN}}=\overline{\mathrm{ON}}-\overline{\mathrm{OD}}=\cos\theta-\cos2\theta$

$\therefore\ S(\theta)=\dfrac{1}{2}(\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{MN}})\overline{\mathrm{DN}}$

$=\dfrac{1}{2}(\sin2\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\cos2\theta)$

$=\dfrac{(\sin2\theta+\sin\theta)(\cos^2\theta-\cos^22\theta)}{2(\cos\theta+\cos2\theta)}$

$=\dfrac{(\sin2\theta+\sin\theta)(\sin^22\theta-\sin^2\theta)}{2(\cos\theta+\cos2\theta)}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}$

$=\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot2+\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)\left\{\left(\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^2\cdot4-\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right\}$

$\cdot\dfrac{1}{2(\cos\theta+\cos2\theta)}$

$=(1\cdot2+1)(1^2\cdot4-1^2)\cdot\dfrac{1}{2(1+1)}=\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ a=\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ 16a=36$

28) 27

주어진 정팔면체와 평면 $x+y+z=0$이

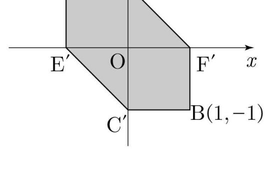
xy평면에서 만나는 점은 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ -1,\ 0)$

yz평면에서 만나는 점은 $\mathrm{C}(0,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{D}(0,\ 1,\ -1)$

zx평면에서 만나는 점은 $\mathrm{E}(-1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{F}(1,\ 0,\ -1)$이다.

따라서 주어진 정팔면체와 평면 $x+y+z=0$이 만나서 생기는 도형은 육각형 ADFBCE이다.

점 C, D, E, F를 xy평면에 정사영한 점을 각각 C', D', E', F'라 하면 육각형 AD'F'BC'E'의 넓이는 3이다.



xy평면과 평면 $x+y+z=0$이 이루는 각을 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{(0,\ 0,\ 1)\cdot(1,\ 1,\ 1)}{1\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$3=S\cos\theta=\dfrac{S}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ S=3\sqrt{3}$

$\therefore\ S^2=27$

29) 259

포물선의 방정식은 $y=2-\dfrac{x^2}{8}$에서 $x^2=-8(y-2)$이므로

포물선의 초점은 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이고 준선은 $y=4$이다.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선 $y=4$에 내린 수선의 발을 H라 하면

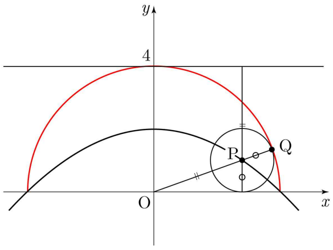
포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PH}}=4-y$

점 P에서 x축에 이르는 거리가 y이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=y$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OQ}}=(4-y)+y=4$

따라서 점 Q는 원점을 중심으로 하고 반지름이 4인 반원 위에 존재한다.



따라서 구하는 부피는 반지름이 4인 구의 부피

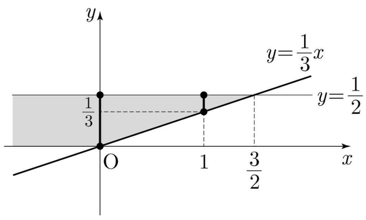
$\dfrac{4}{3}\pi\times4^3=\dfrac{256}{3}\pi$이다.

$\therefore\ p=3,\ q=256$

$\therefore\ p+q=259$

30) 13

연립부등식 $\begin{cases} y\ge\dfrac{1}{3}x \\ 0\le y\le\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 의 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



n이 자연수이므로 $f(n)$은 음이 아닌 정수이다.

$\therefore\ f(n)=0$ 또는 $f(n)=1$

ⅰ) $f(n)=0$일 때, $0\le g(n)\le\dfrac{1}{2}$이므로

$0\le f(n)+g(n)\le\dfrac{1}{2}$

$0\le\log n\le\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

상용로그표에 의하여 $\log3.1<\dfrac{1}{2}<\log3.2$이므로

㉠을 만족시키는 자연수 $n=1,\ 2,\ 3$이다.

ⅱ) $f(n)=1$일 때, $\dfrac{1}{3}\le g(n)\le\dfrac{1}{2}$이므로

$1+\dfrac{1}{3}\le f(n)+g(n)\le1+\dfrac{1}{2}$

$1+\dfrac{1}{3}\le\log n\le1+\dfrac{1}{2}$ …… ㉡

상용로그표에 의하여

$1+\log2.1<1+\dfrac{1}{3}<1+\log2.2$,

$1+\log3.1<1+\dfrac{1}{2}<1+\log3.2$이므로 즉,

$\log21<1+\dfrac{1}{3}<\log22$,

$\log31<1+\dfrac{1}{2}<\log32$이므로

㉡을 만족시키는 자연수 $n=22,\ 23,\ \cdots,\ 31$이다.

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 자연수 n의 개수는 $3+10=13$이다.