제 3 교시 수 학 영 역

'나'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\sqrt[6]{9^5}\times 24^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$에 대하여 $A(X-B)=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은? [2점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

3. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix}k-2 & 3\\ 1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 2\end{pmatrix}$의 해가 존재하지 않도록 하는 상수 k의 값은? [2점]

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\left(\frac{1}{2}+x\right)^4-2\left(\frac{1}{2}\right)^4}{x}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

5. 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르는 모집단에서 임의로 25개의 표본을 뽑았을 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(48 \le \overline{X} \le 54)$의 값을 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

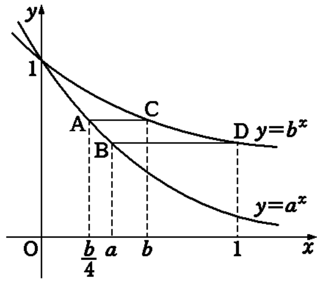
[3점]

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745 ④ 0.8185 ⑤ 0.9104

6. 어느 인터넷 동호회에서 한 종류의 사은품 10개를 정회원 2명, 준회원 2명에게 모두 나누어주려고 한다. 정회원은 2개 이상, 준회원은 1개 이상을 받도록 나누어주는 방법의 수는? (단, 사은품은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

7. 그림과 같이 $0 < a < b < 1$인 두 실수 a, b에 대하여 곡선 $y = a^x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{b}{4}$, a이고, 곡선 $y = b^x$ 위의 두 점 C, D의 x좌표는 각각 b, 1이다. 두 선분 AC와 BD가 모두 x축과 평행할 때, $a^2 + b^2$의 값은? [3점]



① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

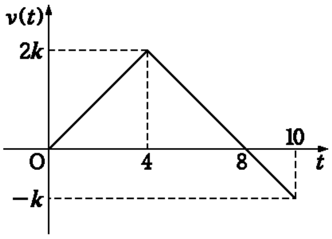
8. 어느 지역에 서식하는 어떤 동물의 개체 수에 대한 변화를 조사한 결과, 지금으로부터 t년 후에 이 동물의 개체 수를 N이라 하면 등식

$$\log N = k + t\log\frac{4}{5}\ \ (\text{단, } k\text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 동물의 현재 개체 수가 5000일 때, 개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 지금으로부터 n년 후이다. 자연수 n의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 그림은 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t초 $(0 \le t \le 10)$에서의 속도 $v(t)$를 나타낸 것이다. 점 P의 시각 t초에서의 위치를 $x(t)$라 할 때, $x(10) = \frac{35}{3}$이다. 출발 후 10초 동안 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 양의 상수이고, 점선은 좌표축에 평행하다.) [3점]



① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

10. 두 실수 x, $y\,(x > y)$가 $x + y = 1$, $xy = -1$을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의하자. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 제 n항을 구하는 과정이다.

> $x + y = 1$, $xy = -1$에서 두 실수 x, y는 방정식
> $t^2 - t + \boxed{(가)} = 0$
> 의 두 근이다. 한편
> $$a_n = \sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}$$
> $$= x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} \cdots\cdots (*)$$
> $(*)$은 첫째항이 x^{n-1}이고 공비가 $\frac{y}{x}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로
> $$a_n = \frac{\boxed{(나)}}{\sqrt{5}}$$

위의 과정에서 (가)에 들어갈 수를 m, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $m + \{f(3)\}^2$의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

11. 수열 $\{a_n\}$을

$a_1 = 20,\ a_{n+1} = a_n - 2n + 9\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

로 정의하자. a_n의 최댓값은? [3점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

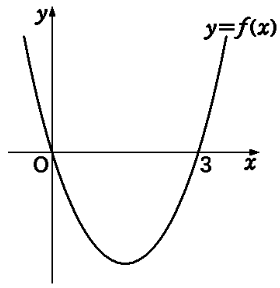
12. $\log_{25}(a-b) = \log_9 a = \log_{15} b$를 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

13. 그림과 같이 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만날 때, 함수

$$S(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 하자. $M - m = 6$일 때, $\lim_{x \to 1} \frac{S(x)}{x-1}$의 값은? [3점]



① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ -2 ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

14. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}(x^2-t)\,dt$에 대하여 직선 $y=6x-k$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

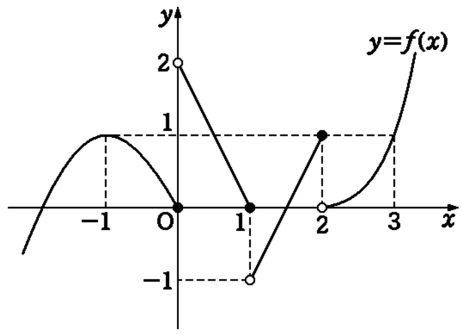
$$f(x)=2x+\int_{0}^{1}\{f(t)+g(t)\}\,dt$$

$$g(x)=3x^2+\int_{0}^{1}\{f(t)-g(t)\}\,dt$$

가 성립할 때, $f(1)+g(2)$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 세 이차정사각행렬 A, B, C가 $(AB)^2 = A^2B^2$, $BA = AC$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

보기
ㄱ. $B^2A = AC^2$
ㄴ. B의 역행렬이 존재하면 $A^2B = A^2C$이다.
ㄷ. AC의 역행렬이 존재하면 $B = C$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}$의 값이 존재한다.
ㄴ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3}$의 값이 존재한다.
ㄷ. $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 일차함수 $f(x) = ax + b\ (0 \le x \le 1)$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

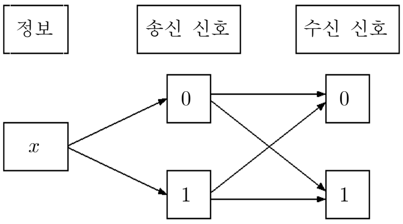
보기
ㄱ. $\frac{a}{2} + b = 1$
ㄴ. $\mathrm{E}(X) = m$일 때, $\mathrm{P}(0 \le X \le m) = \mathrm{P}(m \le X \le 1)$이다.
ㄷ. $\mathrm{E}(X)$의 최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x) = 4x^3 - 4x$이고, $f(x)$의 극댓값이 k일 때, 직선 $y = k$와 곡선 $y = f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{8\sqrt{2}}{15}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{2}}{5}$
④ $\frac{14\sqrt{2}}{15}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{2}}{15}$

21. 그림은 어떤 정보 x를 0과 1의 두 가지 중 한 가지의 송신 신호로 바꾼 다음 이를 전송하여 수신 신호를 얻는 경로를 나타낸 것이다.



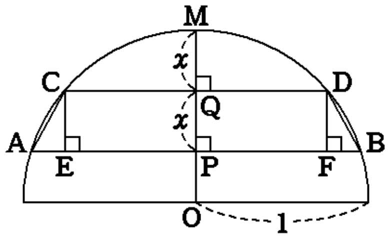
이때 송신 신호가 전송되는 과정에서 수신 신호가 바뀌는 경우가 생기는데, 각각의 경우에 따른 확률은 다음과 같다.

> (가) 정보 x가 0, 1의 송신 신호로 바뀔 확률은 각각 0.4, 0.6 이다.
> (나) 송신 신호 0이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.95, 0.05이다.
> (다) 송신 신호 1이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.05, 0.95이다.

정보 x를 전송한 결과 수신 신호가 1이었을 때, 송신 신호가 1이었을 확률은? [4점]

① $\frac{54}{59}$ ② $\frac{55}{59}$ ③ $\frac{56}{59}$ ④ $\frac{57}{59}$ ⑤ $\frac{58}{59}$

22. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O인 반원의 호를 이등분하는 점을 M이라 하고, 선분 OM 위의 점 P를 지나고 선분 OM에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 선분 PM의 중점 Q를 지나고 선분 OM에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 점 C, D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. $\overline{PM}=2x$일 때, 사다리꼴 ABDC와 직사각형 EFDC의 넓이를 각각 $S(x)$, $T(x)$라 하자. $\lim_{x\to 0+}\frac{T(x)}{S(x)}$의 값은? [4점]



① $\sqrt{2}-1$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$
④ $2(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $2(2-\sqrt{3})$

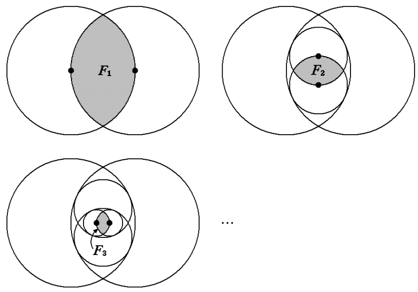
23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

(가) $a_1 = 0$, $b_1 = 2$
(나) n이 짝수이면
$$a_n = a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{n},\ b_n = b_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{n} \text{ 이다.}$$
(다) n이 1보다 큰 홀수이면
$$a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{n},\ b_n = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{n} \text{ 이다.}$$

$a_{41} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① 79 ② 80 ③ 81 ④ 82 ⑤ 83

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자.
F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자.
F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(1+\sqrt{7})$ ② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$ ③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$
④ $2\pi(2+\sqrt{7})$ ⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

단답형

25. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라. [3점]

26. 부등식

$$\log_2(x+y-4)+\log_2(x+y) \le 1+\log_2 x+\log_2 y$$

를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $7y-x$의 최댓값을 구하여라. [3점]

27. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 집합 A의 원소로 이루어진 수열이다. 이 수열이 등식 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{104}{333}$를 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 프로야구 한국시리즈는 두 팀이 출전하여 7번의 경기 중 4번을 먼저 이기는 팀이 우승팀이 된다. A, B 두 팀이 한국시리즈에 출전하여 우승팀이 정해지기까지 치른 경기의 수를 확률변수 X라 하자. 매 경기마다 각 팀이 이길 확률은 모두 $\dfrac{1}{2}$로 같다고 할 때, $\mathrm{E}(16X)$의 값을 구하여라. (단, 두 팀이 경기를 할 때 무승부는 없다고 가정한다.) [4점]

29. 다음과 같이 두 수 0과 1만을 사용하여 제n행에 n자리의 자연수를 크기순으로 모두 나열해 나간다. ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

제1행	1
제2행	10, 11
제3행	100, 101, 110, 111
제4행	1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111
$\cdots$	

제n행에 나열한 모든 수의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=21,\ a_3=422$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{20^n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 세 다항함수 $f(x),\ g(x),\ h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1,\ g(1)=2$
> (나) 모든 실수 $x,\ y$에 대하여
> $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$ 이다.

이때 $\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\}\,dx$의 값을 구하여라. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2013년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ②

$\sqrt[6]{9^5}\times 24^{-\frac{2}{3}}=(3^{10})^{\frac{1}{6}}\times(3\times 2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$=2^{-2}\times 3^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}$

$=\frac{3}{4}$

2) ①

행렬 A의 역행렬이 존재하므로

$A(X-B)=B$에서

$X=A^{-1}B+B=(A^{-1}+E)B$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$이므로

$X=\left\{\begin{pmatrix}-8 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-5 & 19\\ 6 & -3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 17이다.

3) ⑤

주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않아야하므로

행렬 $\begin{pmatrix}k-2 & 3\\ 1 & k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야한다.

따라서 $(k-2)k-3=k^2-2k-3=0$에서 $k=3,\ -1$

$k=3$일 때, $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 2\end{pmatrix}$이므로 연립방정식의 해는 존재하지 않는다.

$k=-1$일 때, $\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ 2\end{pmatrix}$이므로 연립방정식의 해는 $x-y=2$를 만족하는 x, 의 순서쌍으로 무수히 많다.

따라서 구하는 k의 값은 3이다.

[다른 풀이]

연립방정식에서 두 일차식이 나타내는 직선이 평행하면 되므로

$$\frac{k-2}{1}=\frac{3}{k}\neq\frac{-6}{2}$$

가 성립하면 된다.

$k-2=\frac{3}{k}$에서 $k=3,\ -1$이고

$k-2\neq-3$에서 $k\neq-1$이므로

구하는 k의 값은 3이다.

4) ④

$f(x)=2\left(\frac{1}{2}+x\right)^4$이라 하면 $f(0)=2\left(\frac{1}{2}\right)^4$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{1}{2}+x\right)^4-2\left(\frac{1}{2}\right)^4}{x}=f'(0)$$

$f'(x)=8\left(\frac{1}{2}+x\right)^3$이므로 $f'(0)=1$

5) ④

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(48\le\overline{X}\le 54)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

6) ④

정회원을 A, B라 하고 준회원을 C, D라 하자.

A, B, C, D가 받는 사은품의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하면

구하는 방법의 수는

$a\ge 2,\ b\ge 2,\ a+b+c+d=10$ …… ㉠

를 만족하는 자연수해의 개수와 같다.

$a+b+c+d=10$에서

$a'+2=a,\ b'+2=b,\ c'+1=c,\ d'+1=d$

라 하면 ㉠을 만족하는 자연수해의 개수는

$a'+b'+c'+d'=4$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

7) ③

점 A와 C의 y좌표가 일치하므로 $a^{\frac{b}{4}}=b^b$

$\therefore\ a^{\frac{1}{4}}=b\ (\because\ b\neq0)$ …… ㉠

점 B와 D의 y좌표가 일치하므로

$a^a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^a=a^{\frac{1}{4}}$

$a\neq 1$이므로 $a=\frac{1}{4}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ a^2+b^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$

8) ③

$t=0$일 때, 현재 개체 수가 5000이므로

$\log 5000=k+0\cdot\log\frac{4}{5}$

가 성립한다.

$\therefore\ k=3+\log 5$

n년 후 개체 수 N가 1000보다 작을 때,

$\log N=k+n\log\frac{4}{5}\le\log 1000$에서

$3+\log 5+n\log\frac{4}{5}\le 3$

$\log 2=0.3010$이므로

$\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2=0.699$

$\log\frac{4}{5}=\log\frac{8}{10}=3\log 2-1=-0.097$

따라서 $0.699-0.097\times n\le 0$에서

$n\ge\frac{0.699}{0.097}=7.\times\times\times\times$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

9) ①

$x(10)=\int_0^{10} v(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 2k-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot k=7k$

따라서 $7k=\frac{35}{3}$에서 $k=\frac{5}{3}$

따라서 출발 후 10초 동안 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{10}|v(t)|dt=9k=9\cdot\frac{5}{3}=15$

10) ②

$(t-x)(t-y)=t^2-(x+y)t+xy$이고

$x+y=1,\ xy=-1$ …… ㉠

이므로 $m=xy=-1$

$a_n=\dfrac{x^{n-1}\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^n\right)}{1-\frac{y}{x}}=\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$

㉠에서

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=1^2-4(-1)=5$

$\therefore\ x-y=\sqrt{5}$ ($\because\ x>y$)

$\therefore\ a_n=\dfrac{\boxed{x^n-y^n}}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ f(n)=x^n-y^n$

$\therefore\ f(3)=x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(\sqrt{5})^3+3(-1)(\sqrt{5})=2\sqrt{5}$

$\therefore\ m+\{f(3)\}^2=-1+(2\sqrt{5})^2=19$

11) ③

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$

$a_{n+1}-a_n=-2n+9$이므로 $n\ge 5$일 때, $a_{n+1}-a_n<0$이다.

따라서 a_n은 $n=5$일 때 최댓값을 갖는다.

$\therefore\ a_5=20+\sum_{k=1}^{4}(-2k+9)=20+(7+5+3+1)=36$

12) ②

$\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15} b=k$라 하면

$a-b=25^k=5^{2k}$ …… ㉠

$a=9^k=3^{2k}$ …… ㉡

$b=15^k=3^k\cdot 5^k$ …… ㉢

㉠×㉡=㉢^{2}이 성립하므로

$(a-b)a=b^2$

즉, $b^2+ab-a^2=0$

$a>0$이므로 위 식의 양변을 a^2으로 나누면

$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)-1=0$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $a>0,\ b>0$이므로 $\frac{b}{a}>0$이다.

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

13) ①

$S(x)=\int_1^x f(t)dt$에서 $S'(x)=f(x)$

주어진 이차함수의 그래프에서 $f(x)$의 값이 $x=0$을 기준으로 양에서 음으로 바뀌므로 $S(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

또한, $f(x)$의 값이 $x=3$을 기준으로 음에서 양으로 바뀌므로 $S(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ M=S(0)=\int_1^0 f(t)dt$

$m=S(3)=\int_1^3 f(t)dt$

$M-m=6$이므로

$M-m=\int_1^0 f(t)dt-\int_1^3 f(t)dt=-\int_0^3 f(t)dt$

에서 $\int_0^3 f(t)dt=-6$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $f(x)=ax(x-3)$이고

$\int_0^3 f(x)dx=-\frac{a}{6}\cdot 3^3=-\frac{9a}{2}$이므로

$-\frac{9a}{2}=-6$에서 $a=\frac{4}{3}$이다.

$\therefore\ f(x)=\frac{4}{3}x(x-3)$

$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{S(x)}{x-1}=S'(1)$ ($\because\ S(1)=0$)

$=f(1)=\frac{4}{3}\cdot 1\cdot(1-3)=-\frac{8}{3}$

[참고]

$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}|\beta-\alpha|^3$

14) ⑤

$f(x)=\int_1^x(x^2-t)dt=\left[x^2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^x$

$=x^2(x-1)-\frac{1}{2}(x^2-1)$

$=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$

$\therefore\ f'(x)=3x^2-3x$

$f'(x)=6$에서 $x^2-x-2=0$

$\therefore\ x=-1,\ 2$

$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-2$

$f(2)=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

이므로 함수 $f(x)$에 접하는 기울기가 6인 직선의 방정식은

$y=6(x+1)-2=6x+4$ 또는

$y=6(x-2)+\frac{5}{2}=6x-\frac{19}{2}$

이다. 따라서 양수 k의 값은 $\frac{19}{2}$이다.

15) ②

$\int_0^1\{f(t)+g(t)\}dt=C_1,\ \int_0^1\{f(t)-g(t)\}dt=C_2$라 하면

주어진 조건에 의해서 $f(x)=2x+C_1,\ g(x)=3x^2+C_2$

$f(x)+g(x)=3x^2+2x+C_1+C_2$이므로

$$\int_0^1 \{f(t)+g(t)\}dt$$
$$=\int_0^1 \left\{3t^2+2t+C_1+C_2\right\}dt$$
$$=\left[t^3+t^2+(C_1+C_2)t\right]_0^1$$
$$=C_1+C_2+2=C_1$$
$$\therefore\ C_2=-2$$
$$\int_0^1 \{f(t)-g(t)\}dt$$
$$=\int_0^1 \left\{3t^2-2t+C_1-C_2\right\}dt$$
$$=\left[t^3-t^2+(C_1-C_2)t\right]_0^1$$
$$=C_1-C_2=C_2$$
$$\therefore\ C_1=2C_2=-4$$
$$\therefore\ f(x)=2x-4,\ g(x)=3x^2-2$$
$$\therefore\ f(1)+g(2)=(-2)+(10)=8$$

16) ③

ㄱ. 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $h(x)=f(x)f(-x)$라 하면

$h(1)=f(1)f(-1)=0$이고

$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}f(x)f(-x)=(-1)\cdot1=-1$

이므로 $\lim_{x\to1+}h(x)\neq h(1)$이다.

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서

$x\to3+$일 때, $f(x)\to1+$이고

$x\to3-$일 때, $f(x)\to1-$이며

$f(3)=1$이다.

따라서

$\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{t\to1+}f(t)=-1$

$\lim_{x\to3-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$

따라서 $\lim_{x\to3+}f(f(x))\neq\lim_{x\to3-}f(f(x))$이므로

함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17) ⑤

ㄱ. $B^2A=B(BA)=B(AC)$ ($\because$ $BA=AC$)

$=(BA)C=(AC)C$ ($\because$ $BA=AC$)

$=AC^2$ (참)

ㄴ. B^{-1}이 존재하면

$(AB)^2=A^2B^2$에서

$(AB)^2B^{-1}=A^2B^2B^{-1}$

$ABA=A^2B$

$BA=AC$이므로

$ABA=A^2C$

$\therefore\ A^2B=A^2C$ (참)

[다른 풀이]

$A^2B=(A^2B^2)B^{-1}$

$=(AB)^2B^{-1}$ ($\because$ $(AB)^2=A^2B^2$)

$=ABA$

$=A(AC)$ ($\because$ $BA=AC$)

$=A^2C$ (참)

ㄷ. 행렬 AC의 역행렬이 존재하고

$BA=AC$이므로 행렬 BA의 역행렬이 존재한다.

따라서 행렬 A, B 각각의 역행렬이 존재한다.

$(AB)^2=A^2B^2$에서

$A^{-1}(AB)^2B^{-1}=A^{-1}(A^2B^2)B^{-1}$

$\therefore\ AB=BA$

그런데 $BA=AC$이므로

$AB=AC$이다.

따라서 $A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$에서

$B=C$이다. (참)

18) ②

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능한 경우

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$이 성립한다.

즉, $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 이 존재하고 그 값이 $f'(a)$이다.

따라서 $f'(a)$가 존재하는 경우

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}=\lim_{t\to0+}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a)$$
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{2}\left\{\frac{f(a+h)-f(h)}{h}+\frac{f(a-h)-f(h)}{-h}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\{f'(a)+f'(a)\}$$
$$=f'(a)$$
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}=\lim_{t\to0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a)$$

로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 성립한다.

하지만

$f(x)=|x-a|$인 경우 $x=a$에서 미분불가능하지만

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{|h^2|}{h^2}=1$$
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|-|-h|}{h}=0$$

이다.

따라서 ㄱ, ㄷ은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요조건이다.

또한, $h^3=t$라 하면

$h\to0+$일 때, $h^3\to0+$이므로 $t\to0+$이고

$h\to0-$일 때, $h^3\to0-$이므로 $t\to0-$이다.

따라서 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}=\lim_{t\to0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ 이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$ 의 값이 존재하면

$\lim_{t\to0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ 즉, $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 의 값이 존재한다.

따라서 ㄴ은 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건이다.

19) ③

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx=1$이므로

$\int_0^1 (ax+b)dx = \left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^1 = \frac{a}{2}+b=1$ (참)

ㄴ. 확률밀도함수의 그래프가 $x=m$에 대하여 대칭일 때와 같은 특별한 경우일 때만 성립한다.

[반례]

$\mathrm{P}(0 \le x \le 1)=1$이므로

$\mathrm{P}(0 \le x \le m)=\mathrm{P}(m \le x \le 1) \Leftrightarrow \mathrm{P}(0 \le x \le m)=\frac{1}{2}$

$f(x)=2x\ (0 \le x \le 1)$인 경우

$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}\left(0 \le x \le \frac{2}{3}\right)=\int_0^{\frac{2}{3}} 2xdx=\frac{4}{9}$

이므로 $\mathrm{P}(0 \le x \le m) \ne \frac{1}{2}$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(0 \le x \le m) \ne \mathrm{P}(m \le x \le 1)$ (거짓)

ㄷ. $\mathrm{E}(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x(ax+b)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$

$0 \le x \le 1$인 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이어야 하므로

$f(0)=b \ge 0$이고 $f(1)=a+b \ge 0$이다.

ㄱ에서 $\frac{a}{2}+b=1$이므로

$b=1-\frac{a}{2} \ge 0$ 에서 $a \le 2$

$a+b=\frac{a}{2}+1 \ge 0$에서 $a \ge -2$

$\therefore\ -2 \le a \le 2$

$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{a}{3}+\frac{1-\frac{a}{2}}{2}=\frac{a}{12}+\frac{1}{2}$

$\therefore\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{2} \le \mathrm{E}(X) \le \frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

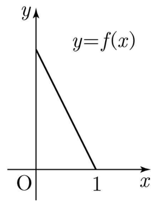
따라서 $\mathrm{E}(X)$의 최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

[다른 풀이]

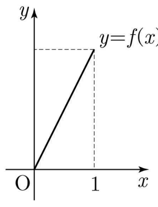
$\mathrm{E}(X)$의 값이 작으려면 0근처 구간에서의 확률이 커야한다.

따라서 $\mathrm{E}(X)$가 최소가 되는 경우는 [그림1]과 같다.

비슷한 방법으로 $\mathrm{E}(X)$가 최대가 되는 경우는 [그림2]와 같다.



[그림1]



[그림2]

$\mathrm{E}(X)$가 최대가 되는 순간과 최소가 되는 순간의 확률밀도함수의 그래프가 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{E}(X)$의 최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

20) ⑤

$f'(x)=4x(x-1)(x+1)$이므로

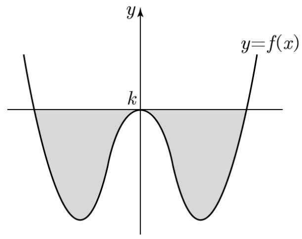
함수 $x=1,\ x=-1$에서 극솟값을 갖고

$x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore\ f(x)=x^4-2x^2+k$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 꼴이고

함수 $y=f(x)$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 부분은 다음과 같다.



$x^4-2x^2+k=k$에서 $x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$이므로 구하는 넓이는

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2x^2-x^4)dx=2\int_0^{\sqrt{2}}(2x^2-x^4)dx$

$=2\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{2}}$

$=2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)$

$=\frac{16\sqrt{2}}{15}$

21) ④

정보 x가 1의 송신신호로 바뀌는 사건을 A라 하고 송신신호가 수신신호 1로 전송되는 사건을 B라 할 때, 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.

주어진 조건에 의해서

$\mathrm{P}(A^C)=0.4=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(A)=0.6=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(B|A^C)=0.05=\frac{1}{20},\ \mathrm{P}(B|A)=0.95=\frac{19}{20}$

이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$

$=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)}$

$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{19}{20}}{\frac{3}{5}\times\frac{19}{20}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{20}}$

$=\frac{57}{59}$

22) ④

$S(x)=\frac{1}{2}x(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}),\ T(x)=x\cdot\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$\frac{T(x)}{S(x)}=\frac{2\cdot\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}}}=\frac{2\cdot\overline{\mathrm{QD}}}{\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{QD}}}$이다.

$\overline{\mathrm{OP}}=1-2x$이므로 직각삼각형 OPB에서

$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{1-(1-2x)^2}=\sqrt{4x-4x^2}$

$\overline{\mathrm{OQ}}=1-x$이므로 직각삼각형 OQD에서

$\overline{\mathrm{QD}}=\sqrt{1-(1-x)^2}=\sqrt{2x-x^2}$

$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{T(x)}{S(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{4x-4x^2}+\sqrt{2x-x^2}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{4-4x}+\sqrt{2-x}}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-2$

23) ③

조건 (나)의 두 식을 더하면 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$

조건 (다)의 두 식을 더하면 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$

그런데 $a_1+b_1=0+2=2$이므로

$a_n+b_n=2$ …… ㉠

조건 (나)에서

$$a_{2n}=a_{2n-1}+\frac{b_{2n-1}}{2n}$$

$$=a_{2n-1}+\frac{2-a_{2n-1}}{2n}\ (\because ㉠)$$

$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot a_{2n-1}+\frac{1}{n}\ \cdots\cdots ㉡$$

조건 (다)에서

$$a_{2n+1}=a_{2n}-\frac{a_{2n}}{2n+1}$$

$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot a_{2n}$$

$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot a_{2n-1}+\frac{1}{n}\right)\ (\because ㉡)$$

$$=\frac{2n-1}{2n+1}\cdot a_{2n-1}+\frac{2}{2n+1}$$

$\therefore\ (2n+1)a_{2n+1}=(2n-1)a_{2n-1}+2$

$\therefore\ c_n=(2n-1)a_{2n-1}$이라 하면 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $a_1=0$이고 공차가 2인 등차수열을 이룬다.

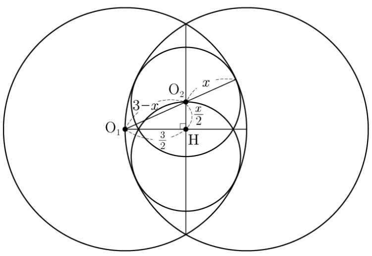
$\therefore\ c_n=(2n-1)a_{2n-1}=2(n-1)$

$$\therefore\ a_{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}$$

$$\therefore\ a_{41}=\frac{40}{41}$$

24) ①

도형 F_1의 두 원의 중심을 연결하는 선분과 도형 F_2의 두 원의 중심을 연결하는 선분은 서로 다른 것을 수직이등분한다.



도형 F_2의 반지름의 길이를 x라 하면 위 그림의 직각삼각형 O_1O_2H에서

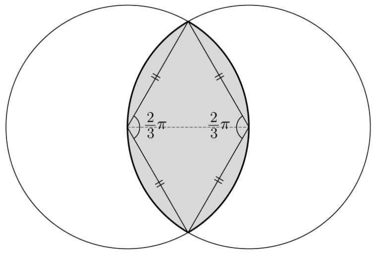
$$(3-x)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$3x^2-24x+27=0$

$x^2-8x+9=0$

$\therefore\ x=4-\sqrt{7}\ (\because\ x<3)$

따라서 서로 닮음인 도형 F_1과 F_2의 닮음비는 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$이다.



위 그림에서 $l_1=2\times\left(3\times\frac{2}{3}\pi\right)=4\pi$이므로

수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4π이고 공비가 $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4\pi}{1-\frac{4-\sqrt{7}}{3}}=2\pi(1+\sqrt{7})$$

25) 160

$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_k(x^2)^k\left(\frac{2}{x}\right)^{6-k}={}_6\mathrm{C}_k\,2^{6-k}\cdot x^{3k-6}$$

이다.

$3k-6=3$에서 $k=3$이므로

구하는 x^3의 계수는

${}_6\mathrm{C}_3 2^3=160$

26) 32

진수조건에 의해서

$x+y-4>0,\ x+y>0,\ x>0,\ y>0$

$\therefore\ x+y-4>0,\ x>0,\ y>0$ …… ㉠

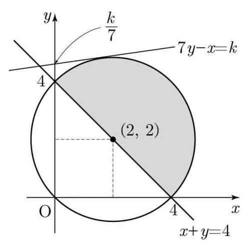
$\log_2(x+y-4)+\log_2(x+y)\le 1+\log_2 x+\log_2 y$

$\Leftrightarrow\ (x+y-4)(x+y)\le 2xy$ 이고 ㉠

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2-4x-4y\le 0$이고 ㉠

$\Leftrightarrow\ (x-2)^2+(y-2)^2\le 8$이고 ㉠

따라서 주어진 부등식을 만족하는 점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



$7y-x=k$라 할 때, $\frac{k}{7}$은 직선 $7y-x=k$의 y절편이므로

k는 위의 그림과 같이 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$과 직선 $7y-x=k$가 접할 때, 최대가 된다.

$\frac{|7\cdot 2-2-k|}{\sqrt{7^2+1^2}}=2\sqrt{2}$에서 $|k-12|=20$이므로

구하는 k의 최댓값은 32이다.

27) 103

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{104}{333}=\frac{312}{999}=0.\dot{3}1\dot{2}$$

$\therefore$ $\{a_n\}$: 3, 1, 2, 3, 1, 2, $\cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}}{1-\frac{1}{5^3}}=\frac{41}{62}$$

$\therefore$ $p=62,\ q=41$

$\therefore$ $p+q=103$

28) 93

최소 4경기 이상 치러야 우승팀이 결정된다.

$\therefore$ $\mathrm{P}(X\le 3)=0$

i) $X=4$인 경우는 어느 한 팀이 4경기를 연달아 이기는 경우이다.

$$\therefore \mathrm{P}(X=4)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

ii) $X=5$인 경우는 어느 한 팀이 4경기를 치루는 동안 3승 1패를 하고 5번째 경기에서 이기는 경우이다.

$$\therefore \mathrm{P}(X=5)=2\times\left\{{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}$$

iii) $X=6$인 경우는 어느 한 팀이 5경기를 치루는 동안 3승 2패를 하고 6번째 경기에서 이기는 경우이다.

$$\therefore \mathrm{P}(X=6)=2\times\left\{{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{2}\right\}=\frac{5}{16}$$

iv) $X=7$인 경우는 두 팀이 6경기를 치루면서 3승 3패를 하는 경우이다.

$$\therefore \mathrm{P}(X=6)={}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{16}$$

i)~iv)에서

$$\mathrm{E}(16X)=16\times\mathrm{E}(X)=16\left(\frac{4}{8}+\frac{5}{4}+\frac{6\cdot 5}{16}+\frac{7\cdot 5}{16}\right)=93$$

29) 379

$a_1=1$

$a_2=2\times 10+1$

$a_3=4\times 10^2+2\times(10+1)$

$a_4=8\times 10^3+4\times(10^2+10+1)$

$\vdots$

$\therefore$ $a_n=2^{n-1}\times 10^{n-1}+2^{n-2}\times(10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+10+1)$

$$=(20)^{n-1}+2^{n-2}\times\frac{10^{n-1}-1}{10-1}$$

$$=\frac{19}{18}(20)^{n-1}-\frac{1}{9}\cdot 2^{n-2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{20^n}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{19}{360}-\frac{1}{36}\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}=\frac{19}{360}$$

$\therefore$ $p=360,\ q=19,\ p+q=379$

30) 18

$f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$f(1)=h(y)$

$f(1)=1$이고 위 식은 모든 실수 y에 대하여 성립해야하므로

$h(x)$는 상수함수이다.

$\therefore$ $h(x)=1$

따라서 ㉠의 식은

$f(xy+1)=xg(y)+1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $y=1$을 대입하면

$f(x+1)=xg(1)+1$

$g(1)=2$이므로

$f(x+1)=2x+1$

$\therefore$ $f(x)=2x-1$ $\cdots\cdots$ ㉢

따라서 $f(xy+1)=2(xy+1)-1=2xy+1$이므로

㉡에서 $2xy+1=xg(y)+1$

따라서 $g(y)=2y$ 즉, $g(x)=2x$이다.

$\therefore$ $f(x)+g(x)+h(x)=4x$

$$\therefore \int_0^3\{f(x)+g(x)+h(x)\}dx=\int_0^3 4x\,dx=\left[2x^2\right]_0^3=18$$