2013학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $\sqrt[6]{9^5} \times 24^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

2. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(2x-\pi)^2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

3. 곡선 $x^2+xy+y^2=7$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

4. $\lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$의 값은? [3점]

① $\pi+1$ ② $\pi+2$ ③ $\pi+3$
④ $\pi+4$ ⑤ $\pi+5$

5. 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르는 모집단에서 임의로 25개의 표본을 뽑았을 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(48 \le \overline{X} \le 54)$의 값을 구한 것은? [3점]

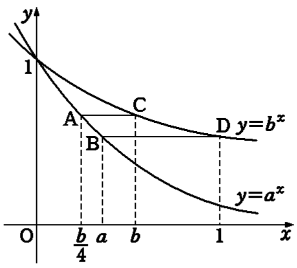
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

6. 어느 인터넷 동호회에서 한 종류의 사은품 10개를 정회원 2명, 준회원 2명에게 모두 나누어주려고 한다. 정회원은 2개 이상, 준회원은 1개 이상을 받도록 나누어주는 방법의 수는? (단, 사은품은 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

7. 그림과 같이 $0<a<b<1$인 두 실수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표는 각각 $\frac{b}{4}$, a이고, 곡선 $y=b^x$ 위의 두 점 C, D의 x좌표는 각각 b, 1이다. 두 선분 AC와 BD가 모두 x축과 평행할 때, a^2+b^2의 값은?



[3점]

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

8. 어느 지역에 서식하는 어떤 동물의 개체 수에 대한 변화를 조사한 결과, 지금으로부터 t년 후에 이 동물의 개체 수를 N이라 하면 등식

$$\log N = k + t\log\frac{4}{5} \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 동물의 현재 개체 수가 5000일 때, 개체 수가 처음으로 1000보다 적어지는 때는 지금으로부터 n년 후이다. 자연수 n의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

9. 행렬 $M=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점A(1, 2)가 옮겨지는 점을 B, 행렬 M^3으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 C(2, 0)이 옮겨지는 점을 D라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{BD}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 두 실수 x, $y\,(x>y)$가 $x+y=1$, $xy=-1$을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의하자. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 제n항을 구하는 과정이다.

> $x+y=1$, $xy=-1$에서 두 실수 x, y는 방정식
>
> $t^2-t+\boxed{(가)}=0$
>
> 의 두 근이다. 한편
>
> $$a_n=\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}y^{k-1}$$
> $$=x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1}\cdots\cdots(*)$$
>
> $(*)$은 첫째항이 x^{n-1}이고 공비가 $\dfrac{y}{x}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로
>
> $$a_n=\frac{\boxed{(나)}}{\sqrt{5}}$$

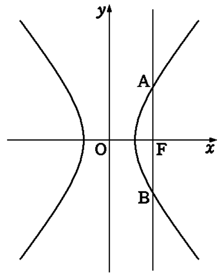
위의 과정에서 (가)에 들어갈 수를 m, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $m+\{f(3)\}^2$의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

11. 포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=3:1$일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $\dfrac{26}{3}$ ② $\dfrac{28}{3}$ ③ 10 ④ $\dfrac{32}{3}$ ⑤ $\dfrac{34}{3}$

12. 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\,c$일 때, a와 b 사이의 관계식은? (단, $a>0$, $b>0$, $c>0$) [3점]



① $a=b$ ② $a=\sqrt{2}\,b$ ③ $2a=3b$
④ $a=\sqrt{3}\,b$ ⑤ $a=2b$

13. 모든 실수 x에서 정의된 함수

$$f(x)=2\sin 2x+4\sin x-4\cos x+1$$

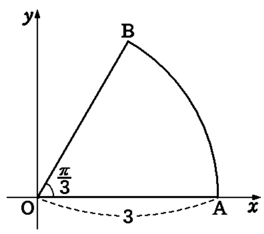
의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① $4-4\sqrt{2}$ ② $4-3\sqrt{2}$ ③ $4-2\sqrt{2}$
④ $5-2\sqrt{2}$ ⑤ $5-\sqrt{2}$

14. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)=\int_1^x (x^2-t)\,dt$에 대하여 직선 $y=6x-k$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, 양수 k의 값은? [3점]

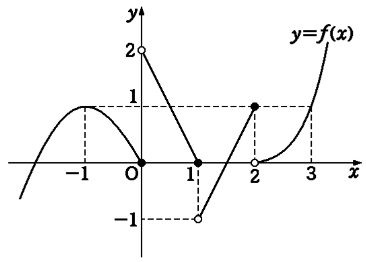
① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

15. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O와 점 A(3, 0)을 잇는 선분 OA를 반지름으로 하고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다. 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}$일 때, 일차변환 f에 의하여 부채꼴 OAB가 옮겨진 도형을 D라 하자. 도형 D의 내부와 부채꼴 OAB의 내부의 공통부분을 나타내는 도형을 E_1이라 하고, 일차변환 f에 의하여 도형 E_1이 옮겨진 도형을 E_2라 하자. 두 도형 E_1, E_2의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은? [4점]



① $\frac{3}{8}\pi$ ② $\frac{7}{16}\pi$ ③ $\frac{1}{2}\pi$ ④ $\frac{9}{16}\pi$ ⑤ $\frac{5}{8}\pi$

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 세 이차정사각행렬 A, B, C가 $(AB)^2=A^2B^2$, $BA=AC$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

보기

ㄱ. $B^2A=AC^2$
ㄴ. B의 역행렬이 존재하면 $A^2B=A^2C$이다.
ㄷ. AC의 역행렬이 존재하면 $B=C$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$의 값이 존재한다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin x}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(x)\ge 0$

ㄴ. $f'(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2-2\ln 2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{(\ln x)^6}{x^2}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? $\left(\text{단, } \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^6}{x^2}=0\text{이다.}\right)$ [4점]

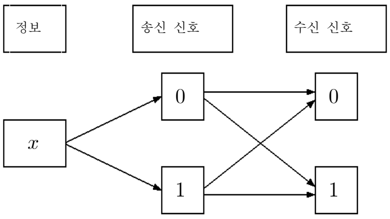
ㄱ. $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다.

ㄴ. $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $x>0$에서 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림은 어떤 정보 x를 0과 1의 두 가지 중 한 가지의 송신 신호로 바꾼 다음 이를 전송하여 수신 신호를 얻는 경로를 나타낸 것이다.



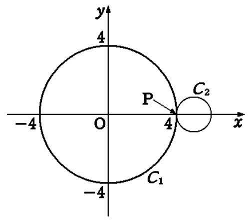
이때 송신 신호가 전송되는 과정에서 수신 신호가 바뀌는 경우가 생기는데, 각각의 경우에 따른 확률은 다음과 같다.

(가) 정보 x가 0, 1의 송신 신호로 바뀔 확률은 각각 0.4, 0.6 이다. (나) 송신 신호 0이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.95, 0.05이다. (다) 송신 신호 1이 수신 신호 0, 1로 전송될 확률은 각각 0.05, 0.95이다.

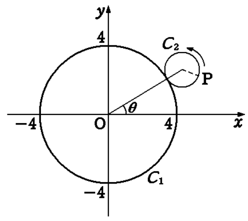
정보 x를 전송한 결과 수신 신호가 1이었을 때, 송신 신호가 1이었을 확률은? [4점]

① $\frac{54}{59}$ ② $\frac{55}{59}$ ③ $\frac{56}{59}$ ④ $\frac{57}{59}$ ⑤ $\frac{58}{59}$

22. [그림 1]과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 큰 원 C_1과 반지름의 길이가 1인 작은 원 C_2가 점 (4, 0)에서 외접하고 있다. 이때 작은 원 위의 한 점을 P라 하자. [그림 2]와 같이 원 C_2가 원 C_1에 접한 상태로 굴러갈 때, 두 원의 중심을 연결한 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자. θ의 값이 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때, 점 (4, 0)에서 출발한 점 P가 움직인 거리는? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

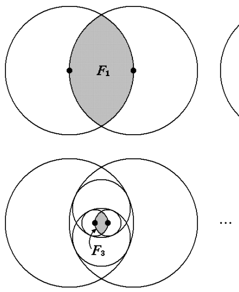
23. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

(가) $a_1 = 0,\ b_1 = 2$ (나) n이 짝수이면 $a_n = a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{n},\ b_n = b_{n-1} - \frac{b_{n-1}}{n}$ 이다. (다) n이 1보다 큰 홀수이면 $a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{n},\ b_n = b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{n}$ 이다.

$a_{41} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① 79 ② 80 ③ 81 ④ 82 ⑤ 83

24. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자. F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자. F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(1+\sqrt{7})$
② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$
③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$
④ $2\pi(2+\sqrt{7})$
⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

단답형

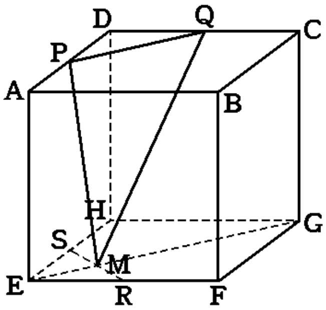
25. 분수방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-12}=\frac{2}{5}$의 모든 실근의 합을 구하여라.

[3점]

26. 좌표공간 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 6,\ 7)$에서 두 점 $\mathrm{B}(1,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{C}(5,\ -3,\ 8)$을 지나는 직선까지의 거리를 d라 할 때, d^2의 값을 구하여라. [3점]

27. 두 곡선 $y=\ln x+3$, $y=\ln\frac{1}{x}+3$과 직선 $x=e$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 V이다. $\frac{V}{\pi}$의 값을 구하여라. [4점]

28. 그림과 같은 정육면체 ABCD−EFGH에서 네 모서리 AD, CD, EF, EH의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하고, 두 선분 RS와 EG의 교점을 M이라 하자. 평면 PMQ와 평면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan^2\theta+\sec^2\theta$의 값을 구하여라. [4점]



29. 다음과 같이 두 수 0과 1만을 사용하여 제n행에 n자리의 자연수를 크기순으로 모두 나열해 나간다. ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

제1행	1
제2행	10, 11
제3행	100, 101, 110, 111
제4행	1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111
⋯	

제n행에 나열한 모든 수의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=21$, $a_3=422$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{20^n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $g(1)=2$
> (나) 모든 실수 x, y에 대하여
> $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$ 이다.

이때 $\int_0^3\{f(x)+g(x)+h(x)\}dx$의 값을 구하여라. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2013년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ②

$\sqrt[6]{9^5}\times 24^{-\frac{2}{3}}=(3^{10})^{\frac{1}{6}}\times(3\times 2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$=2^{-2}\times 3^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}$

$=\frac{3}{4}$

2) ①

$\frac{\pi}{2}-x=t$라 하면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{(2x-\pi)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{(-2t)^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{4t^2}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{4}$$

3) ②

$x^2+xy+y^2=7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\cdot\frac{dy}{dx}+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

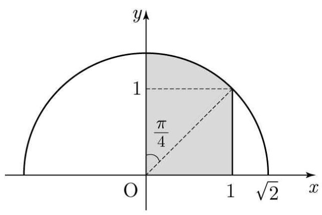
$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}$

따라서 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\cdot 2+1}{2+2\cdot 1}=-\frac{5}{4}$

4) ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=4\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$$



위 그림에서

$$\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\pi+2$

5) ④

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르므로

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(48\le\overline{X}\le 54)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

6) ④

정회원을 A, B라 하고 준회원을 C, D라 하자.

A, B, C, D가 받는 사은품의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하면

구하는 방법의 수는

$a\ge 2,\ b\ge 2,\ a+b+c+d=10$ …… ㉠

를 만족하는 자연수해의 개수와 같다.

$a+b+c+d=10$에서

$a'+2=a,\ b'+2=b,\ c'+1=c,\ d'+1=d$

라 하면 ㉠을 만족하는 자연수해의 개수는

$a'+b'+c'+d'=4$를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$

7) ③

점 A와 C의 y좌표가 일치하므로 $a^{\frac{b}{4}}=b^b$

$\therefore\ a^{\frac{1}{4}}=b\ (\because\ b\ne 0)$ …… ㉠

점 B와 D의 y좌표가 일치하므로 $a^a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^a=a^{\frac{1}{4}}$

$a\ne 1$이므로 $a=\frac{1}{4}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $b=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ a^2+b^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$

8) ③

$t=0$일 때, 현재 개체 수가 5000이므로

$\log 5000=k+0\cdot\log\frac{4}{5}$

가 성립한다.

$\therefore\ k=3+\log 5$

n년 후 개체 수 N가 1000보다 작을 때,

$\log N=k+n\log\frac{4}{5}\le\log 1000$에서

$3+\log 5+n\log\frac{4}{5}\le 3$

$\log 2=0.3010$이므로

$\log 5=\log\frac{10}{2}=1-\log 2=0.699$

$\log\frac{4}{5}=\log\frac{8}{10}=3\log 2-1=-0.097$

따라서 $0.699-0.097\times n\le 0$에서

$n\ge\frac{0.699}{0.097}=7.\times\times\times\times$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

9) ①

$M=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$

$M^2=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}$

$M^3=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$이므로

$\mathrm{B}(-1,\ -1)$

$M^3\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$이므로

$D(2,\ 0)$

$\therefore\ \overrightarrow{OB}=(-1,\ -1),\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(3,\ 1)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{BD}|}$

$=\dfrac{(-1,\ -1)\cdot(3,\ 1)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}$

$=\dfrac{-4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}$

$=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

10) ②

$(t-x)(t-y)=t^2-(x+y)t+xy$이고

$x+y=1,\ xy=-1$ …… ㉠

이므로 $m=xy=-1$

$a_n=\dfrac{x^{n-1}\left(1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^n\right)}{1-\dfrac{y}{x}}=\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$

㉠에서

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=1^2-4(-1)=5$

$\therefore\ x-y=\sqrt{5}\ (\because\ x>y)$

$\therefore\ a_n=\dfrac{\boxed{x^n-y^n}}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ f(n)=x^n-y^n$

$\therefore\ f(3)=x^3-y^3$

$=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(\sqrt{5})^3+3(-1)(\sqrt{5})$

$=2\sqrt{5}$

$\therefore\ m+\{f(3)\}^2=-1+(2\sqrt{5})^2=19$

11) ④

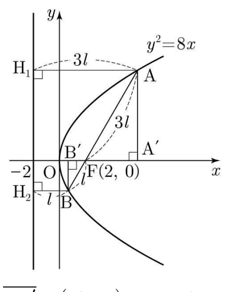
점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A$'$, B$'$이라 하고 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

$\overline{BF}=l$이라 하면 $\overline{AF}=3l$이고

포물선의 정의에 의해서 $\overline{AH_1}=3l,\ \overline{BH_2}=l$

따라서 점 A, B의 x좌표는 각각 $3l-2,\ l-2$이다.

△FAA$'$과 △FBB$'$은 닮음이고 닮음비는 $3:1$이다.



$\overline{FA'}=(3l-2)-2=3l-4$이고

$\overline{FB'}=2-(l-2)=4-l$이므로

$\overline{FA'}:\overline{FB'}=3:1$에서

$3l-4:4-l=3:1$

따라서 $3(4-l)=3l-4$에서 $l=\dfrac{8}{3}$

$\therefore\ \overline{AB}=4l=\dfrac{32}{3}$

12) ①

쌍곡선이 x축에 대하여 대칭이고 $\overline{AB}=\sqrt{2}c$이므로

점 A의 y좌표는 $\dfrac{\sqrt{2}c}{2}=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$이다.

그런데 $c=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

점 A의 좌표는 $\left(\sqrt{a^2+b^2},\ \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)$ …… ㉠

이다.

㉠을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하면

$\dfrac{a^2+b^2}{a^2}-\dfrac{a^2+b^2}{2b^2}=1$

양변에 $2a^2b^2$을 곱하여 정리하면

$2b^4-a^2b^2-a^4=0$

$(2b^2+a^2)(b^2-a^2)=0$

$\therefore\ a^2=b^2\ (\because\ a,\ b$는 실수$)$

$\therefore\ a=b\ (\because\ a>0,\ b>0)$

13) ①

$\sin x-\cos x=t$라 하면

$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로

$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$이고

$t^2=\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x=1-\sin 2x$이므로

$\sin 2x=1-t^2$이다.

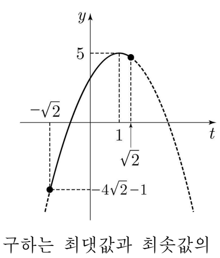
$\therefore\ f(x)=2\sin 2x+4\sin x-4\cos x+1$

$=2(1-t^2)+4t+1$

$=-2(t-1)^2+5\ (-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$

따라서 $f(x)$는 $t=1$일 때 최댓값 5를 갖고

$t=-\sqrt{2}$일 때, 최솟값 $-4\sqrt{2}-1$을 갖는다.



따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $4-4\sqrt{2}$이다.

14) ⑤

$f(x)=\displaystyle\int_1^x(x^2-t)dt=\left[x^2t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^x$

$=x^2(x-1)-\dfrac{1}{2}(x^2-1)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f'(x)=3x^2-3x$

$f'(x)=6$에서 $x^2-x-2=0$

$\therefore\ x=-1,\ 2$

$f(-1)=-1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=-2$

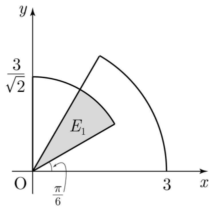
$f(2)=8-6+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

이므로 함수 $f(x)$에 접하는 기울기가 6인 직선의 방정식은
$y=6(x+1)-2=6x+4$ 또는
$y=6(x-2)+\frac{5}{2}=6x-\frac{19}{2}$
이다. 따라서 양수 k의 값은 $\frac{19}{2}$이다.

15) ④

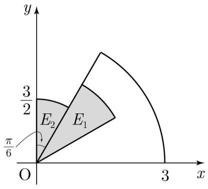
$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

이므로 일차변환 f는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 회전하는 회전이동과 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 닮음변환의 합성변환이다.
따라서 도형 E_1은 다음 그림과 같다.



$\therefore\ S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{8}\pi$
도형 E_2는 도형 E_1이 변환 f에 의해서 옮겨진 것이므로
도형 E_2의 넓이는 도형 E_1의 넓이의 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$배이다.
$\therefore\ S_2=\frac{3}{16}\pi$
$\therefore\ S_1+S_2=\frac{9}{16}\pi$

[참고]
도형 E_2는 다음 그림과 같다.



[참고]
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$
이고 $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$이므로
$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$라 하면
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
이 성립한다.
따라서 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환은 회전변환과 닮음변환의 합성변환이다.

16) ③

ㄱ. 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로 함수 $f(x-1)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)
ㄴ. $h(x)=f(x)f(-x)$라 하면
$h(1)=f(1)f(-1)=0$이고
$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}f(x)f(-x)=(-1)\cdot1=-1$
이므로 $\lim_{x\to1+}h(x)\neq h(1)$이다.
따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)
ㄷ. 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서
$x\to3+$일 때, $f(x)\to1+$이고
$x\to3-$일 때, $f(x)\to1-$이며
$f(3)=1$이다.
따라서
$\lim_{x\to3+}f(f(x))=\lim_{t\to1+}f(t)=-1$
$\lim_{x\to3-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=0$
따라서 $\lim_{x\to3+}f(f(x))\neq\lim_{x\to3-}f(f(x))$이므로
함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 불연속이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17) ⑤

ㄱ. $B^2A=B(BA)=B(AC)$ ($\because\ BA=AC$)
$=(BA)C=(AC)C$ ($\because\ BA=AC$)
$=AC^2$ (참)
ㄴ. B^{-1}이 존재하면
$(AB)^2=A^2B^2$에서
$(AB)^2B^{-1}=A^2B^2B^{-1}$
$ABA=A^2B$
$BA=AC$이므로
$ABA=A^2C$
$\therefore\ A^2B=A^2C$ (참)
[다른 풀이]
$A^2B=(A^2B^2)B^{-1}$
$=(AB)^2B^{-1}$ ($\because\ (AB)^2=A^2B^2$)
$=ABA$
$=A(AC)$ ($\because\ BA=AC$)
$=A^2C$ (참)
ㄷ. 행렬 AC의 역행렬이 존재하고
$BA=AC$이므로 행렬 BA의 역행렬이 존재한다.
따라서 행렬 A, B 각각의 역행렬이 존재한다.
$(AB)^2=A^2B^2$에서
$A^{-1}(AB)^2B^{-1}=A^{-1}(A^2B^2)B^{-1}$
$\therefore\ AB=BA$
그런데 $BA=AC$이므로 $AB=AC$이다.
따라서 $A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$에서
$B=C$이다. (참)

18) ②

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능한 경우

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$이 성립한다.

즉, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 이 존재하고 그 값이 $f'(a)$이다.

따라서 $f'(a)$가 존재하는 경우

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}=\lim_{t\to+0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{2}\left\{\frac{f(a+h)-f(h)}{h}+\frac{f(a-h)-f(h)}{-h}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{f'(a)+f'(a)\}$$

$$=f'(a)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}=\lim_{t\to0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a)$$

로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 성립한다.

하지만 $f(x)=|x-a|$인 경우 $x=a$에서 미분불가능하지만

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{|h^2|}{h^2}=1$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|-|-h|}{h}=0$$

이다.

따라서 ㄱ, ㄷ은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요조건이다.

또한, $h^3=t$라 하면

$h\to0+$일 때, $h^3\to0+$이므로 $t\to0+$이고

$h\to0-$일 때, $h^3\to0-$이므로 $t\to0-$이다.

따라서 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$ 이므로

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$ 의 값이 존재하면

$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$ 즉, $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 의 값이 존재한다.

따라서 ㄴ은 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위한 필요충분조건이다.

[참고]

ㄱ의 식은 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수를 의미하고

ㄷ의 식은 함수 $f(x)$의 구간 $[a+h,\ a-h]$에서의 평균변화율의 극한을 의미한다.

19) ⑤

ㄱ. 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 $0\le\sin2x\le1$이고 $1\le1+\sin x\le2$이므로

$f(x)=\dfrac{\sin2x}{1+\sin x}\ge0$이다. (참)

ㄴ. $f(0)=0,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$이므로 롤의 정리에 의해서

$f'(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다. (참)

ㄷ. 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $\sin2x\ne0$이므로

열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)>0$이다.

ㄴ에서 $f(0)=0,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$이다.

$1+\sin x=t$라 하면 $\cos x dx=dt$이고

$x=0$일 때, $t=1$이고 $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때, $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{1+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}dx$$

$$=\int_1^2\frac{2(t-1)}{t}dt$$

$$=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$$

$=2\left[t-\ln t\right]_1^2=2(1-\ln 2)$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]

ㄴ. $f'(x)=\dfrac{2\cos2x(1+\sin x)-\sin2x\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$f'(0)=2,\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$이므로 중간값의 정리에 의하여

$f'(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다. (참)

20) ③

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x^2}=\infty,\ \lim\limits_{x\to0+}(\ln x)^6=\infty$이므로 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(\ln x)^6}{x^2}=\infty$이다.

$$f'(x)=\frac{6(\ln x)^5\cdot\frac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x)^6\cdot2x}{(x^2)^2}=\frac{2x(\ln x)^5(3-\ln x)}{x^4}$$

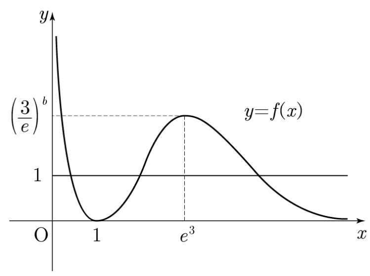
이므로 $f'(x)=0$에서 $x=1,\ x=e^3$이고

$f(x)$의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	∞	↘	0	↗	$\left(\dfrac{3}{e}\right)^6$	↘

또한, $x>0$인 x에 대하여 $f(x)\ge0$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^6}{x^2}=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. (참)

ㄴ. (거짓)

ㄷ. $e<3$이므로 $\left(\dfrac{3}{e}\right)^6>1$이다. 따라서 위의 그림과 같이 방정식

$f(x)=1$을 만족하는 실근의 개수는 3이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21) ④
정보 x가 1의 송신신호로 바뀌는 사건을 A라 하고
송신신호가 수신신호 1로 전송되는 사건을 B라 할 때,
구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.
주어진 조건에 의해서

$\mathrm{P}(A^C)=0.4=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A)=0.6=\frac{3}{5}$

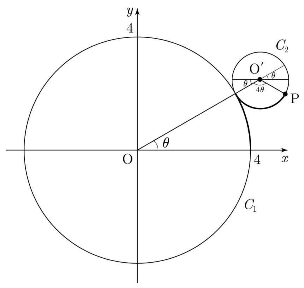
$\mathrm{P}(B|A^C)=0.05=\frac{1}{20}$, $\mathrm{P}(B|A)=0.95=\frac{19}{20}$

이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$
$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$$
$$=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)}$$
$$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{19}{20}}{\frac{3}{5}\times\frac{19}{20}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{20}}=\frac{57}{59}$$

22) ③
점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 위치벡터를 $(x,\ y)$라 하면
θ가 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때, 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$이다.



원 C_2의 중심을 O′이라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=(5\cos\theta,\ 5\sin\theta)$,
$\overrightarrow{\mathrm{O'P}}=(\cos(\pi+5\theta),\ \sin(\pi+5\theta))=(-\cos5\theta,\ -\sin5\theta)$
이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}=(5\cos\theta-\cos5\theta,\ 5\sin\theta-\sin5\theta)$

$\therefore\ \frac{dx}{d\theta}=-5\sin\theta+5\sin5\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=5\cos\theta-5\cos5\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$=(-5\sin\theta+5\sin5\theta)^2+(5\cos\theta-5\cos5\theta)^2$$
$$=50-50(\sin\theta\sin5\theta+\cos\theta\cos5\theta)$$
$$=50-50\cos4\theta$$
$$=50-50(1-2\sin^2 2\theta)$$
$$=100\sin^2 2\theta$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}10\sin2\theta d\theta=\Big[-5\cos2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=10$$

23) ③
조건 (나)의 두 식을 더하면 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$
조건 (다)의 두 식을 더하면 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$
그런데 $a_1+b_1=0+2=2$이므로
$a_n+b_n=2$ …… ㉠
조건 (나)에서

$$a_{2n}=a_{2n-1}+\frac{b_{2n-1}}{2n}$$
$$=a_{2n-1}+\frac{2-a_{2n-1}}{2n}\ (\because ㉠)$$
$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot a_{2n-1}+\frac{1}{n}\ \cdots\cdots ㉡$$

조건 (다)에서

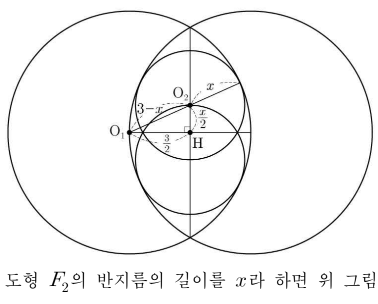
$$a_{2n+1}=a_{2n}-\frac{a_{2n}}{2n+1}$$
$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot a_{2n}$$
$$=\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(\frac{2n-1}{2n}\cdot a_{2n-1}+\frac{1}{n}\right)\ (\because ㉡)$$
$$=\frac{2n-1}{2n+1}\cdot a_{2n-1}+\frac{2}{2n+1}$$

$\therefore\ (2n+1)a_{2n+1}=(2n-1)a_{2n-1}+2$
$\therefore\ c_n=(2n-1)a_{2n-1}$이라 하면 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $a_1=0$이고 공차가 2인 등차수열을 이룬다.
$\therefore\ c_n=(2n-1)a_{2n-1}=2(n-1)$

$\therefore\ a_{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}$

$\therefore\ a_{41}=\frac{40}{41}$

24) ①
도형 F_1의 두 원의 중심을 연결하는 선분과 도형 F_2의 두 원의 중심을 연결하는 선분은 서로 다른 것을 수직이등분한다.



도형 F_2의 반지름의 길이를 x라 하면 위 그림의 직각삼각형 $\mathrm{O_1O_2H}$에서

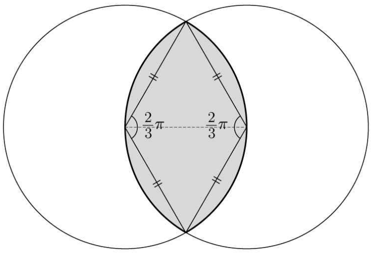
$(3-x)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$

$3x^2-24x+27=0$

$x^2-8x+9=0$

$\therefore\ x=4-\sqrt{7}\ (\because\ x<3)$

따라서 서로 닮음인 도형 F_1과 F_2의 닮음비는 $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$이다.



위 그림에서 $l_1=2\times\left(3\times\dfrac{2}{3}\pi\right)=4\pi$이므로

수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 4π이고 공비가 $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{4\pi}{1-\frac{4-\sqrt{7}}{3}}=2\pi(1+\sqrt{7})$

25) 17

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-12}=\dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow\ 5(x-12)+5x=2x(x-12),\ x\neq 0,\ x\neq 12$

$\Leftrightarrow\ x^2-17x+30=0,\ x\neq 0,\ x\neq 12$

$\Leftrightarrow\ x=2,\ x=15$

따라서 구하는 모든 실근의 합은 $2+15=17$

26) 69

두 점 $\mathrm{B}(1,\ -1,\ 2)$, $\mathrm{C}(5,\ -3,\ 8)$을 지나는 직선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은

$\dfrac{x-1}{5-1}=\dfrac{y-(-1)}{-3-(-1)}=\dfrac{z-2}{8-2}$

즉, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$이다.

따라서 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}=t$(실수)라 하면

직선 l 위의 점은 P는 $(2t+1,\ -t-1,\ 3t+2)$로 표현되고

$\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값이 d이다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(2t-3)^2+(-t-7)^2+(3t-5)^2$

$=14t^2-28t+83$

$=14(t-1)^2+69$

≥ 69

$\therefore\ d^2=69$

[다른 풀이]

위 풀이에서 $\overline{\mathrm{AP}}$가 최소가 될 때는 $\overline{\mathrm{AP}}\perp l$인 경우이다.

직선 l의 방향벡터를 $\vec{h}=(2,\ -1,\ 3)$로 놓으면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{h}=0$이므로

$(2t-3,\ -t-7,\ 3t-5)\cdot(2,\ -1,\ 3)$

$=4t-6+t+7+9t-15$

$=14t-14=0$

$\therefore\ t=1$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-1,\ -8,\ -2)$

$\therefore\ d^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(-1)^2+(-8)^2+(-2)^2=69$

27) 12

$\ln x+3=\ln\dfrac{1}{x}+3$에서 $2\ln x=0\ \therefore\ x=1$

따라서 두 곡선은 $(1,\ 3)$에서 만난다.

$\therefore\ V=\pi\displaystyle\int_1^e\left\{(\ln x+3)^2-\left(\ln\frac{1}{x}+3\right)^2\right\}dx$

$=12\pi\displaystyle\int_1^e\ln x\cdot dx$

$=12\pi\Big[x\ln x-x\Big]_1^e=12\pi$

$\therefore\ \dfrac{V}{\pi}=12$

28) 17

$\overline{\mathrm{PQ}}/\!/\overline{\mathrm{EG}}$이므로 평면 PMQ는 평면 PEGQ에 포함된다.

따라서 θ는 평면 PEGQ와 평면 EFGH가 이루는 예각이다.

정육면체의 한 변의 길이를 4라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{EG}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{QG}}=\overline{\mathrm{PE}}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

이므로 사각형 PEGQ는 등변사다리꼴이다.

점 Q에서 변 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면 그림에서

$\overline{\mathrm{QI}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

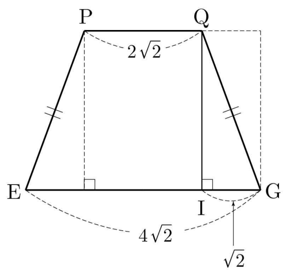
점 Q에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 K라 하면 점 Q에서 평면 EFGH에 이르는 거리가 4이므로 $\overline{\mathrm{QK}}=4$

삼수선의 정리에 의해서 $\angle\mathrm{QIK}=\theta$이므로

$\sin\theta=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \tan^2\theta+\sec^2\theta=2\sec^2\theta-1=2\times 9-1=17$



29) 379

$a_1=1$

$a_2=2\times 10+1$

$a_3=4\times 10^2+2\times(10+1)$

$a_4=8\times 10^3+4\times(10^2+10+1)$

$\vdots$

$\therefore\ a_n=2^{n-1}\times 10^{n-1}+2^{n-2}\times(10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+10+1)$

$=(20)^{n-1}+2^{n-2}\times\dfrac{10^{n-1}-1}{10-1}$

$=\dfrac{19}{18}(20)^{n-1}-\dfrac{1}{9}\cdot 2^{n-2}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{20^n}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{19}{360}-\frac{1}{36}\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}=\frac{19}{360}$

$\therefore\ p=360,\ q=19,\ p+q=379$

30) 18

$f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
$f(1)=h(y)$
$f(1)=1$이고 위 식은 모든 실수 y에 대하여 성립해야하므로
$h(x)$는 상수함수이다.
$\therefore\ h(x)=1$
따라서 ㉠의 식은
$f(xy+1)=xg(y)+1$ …… ㉡
㉡의 양변에 $y=1$을 대입하면
$f(x+1)=xg(1)+1$
$g(1)=2$이므로
$f(x+1)=2x+1$
$\therefore\ f(x)=2x-1$ …… ㉢
따라서 $f(xy+1)=2(xy+1)-1=2xy+1$이므로
㉡에서 $2xy+1=xg(y)+1$
따라서 $g(y)=2y$ 즉, $g(x)=2x$이다.
$\therefore\ f(x)+g(x)+h(x)=4x$
$\therefore\ \int_0^3\{f(x)+g(x)+h(x)\}dx=\int_0^3 4xdx=\left[2x^2\right]_0^3=18$