제 3 교시 수 학 영 역

'나'형 | 성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 자연수 n에 대하여

$$a_n = \sqrt{4n+1-2\sqrt{4n^2+2n}}\ ,\ b_n = \sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　③ 1　④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 함수 $f(x) = x\lim_{n\to\infty}\frac{2-x^{2n}}{2+x^{2n}}$에 대하여

$\lim_{x\to-1-} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to1-} f(x) = \beta$ 라 할 때, $\alpha\beta$의 값은? [2점]

① -4　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 4

3. 0이 아닌 서로 다른 세 실수 p, q, r에 대하여 삼차함수 $f(x) = (x-p)(x-q)(x-r)$라 할 때,

$\frac{p^2}{f'(p)} + \frac{q^2}{f'(q)} + \frac{r^2}{f'(r)}$의 값은? [3점]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

4. 이차정사각행렬 A가 $A^2 - 2A = E$와 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 행렬 A^2의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

[3점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

5. 정육면체 모양의 주사위 한 개를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 나온 순서대로 x, y, z라 할 때, $x-y+z=7$이 될 확률은?

[3점]

① $\frac{5}{72}$　② $\frac{1}{12}$　③ $\frac{7}{72}$　④ $\frac{1}{9}$　⑤ $\frac{1}{8}$

6. 이산확률변수 X가 값 x를 가질 확률이

$$P(X=x)=\frac{{}_6C_x}{k}$$

(단, $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이고 k는 상수이다.)
일 때, 확률변수 X의 기댓값을 m이라 하면
$mk^2=2^a\times3^b\times7^c$이다. 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

7. 지질학에서 암석의 연대를 측정하는 방법 중 하나로 포타슘−40 은 방사선 분해과정을 거쳐 일정한 비율로 아르곤−40으로 바뀌는 점을 이용한 포타슘−아르곤연대측정법을 사용한다. 암석이 생성되어 t년이 되었을 때, 포타슘−40과 아르곤−40의 양을 각각 $P(t)$, $A(t)$라 하면

$$2^t=\left\{1+8.3\times\frac{A(t)}{P(t)}\right\}^c \text{ (단, } c\text{는 상수이다.)}$$

이 성립한다고 하자. 이 방법으로 암석의 연대를 측정하였을 때 포타슘−40의 양이 아르곤−40의 양의 20배인 암석이 생성된 것은 k년 전이다. k의 값은? (단, $\log1.415=0.15$, $\log2=0.30$으로 계산한다.) [3점]

① $\frac{1}{3}c$ ② $\frac{1}{2}c$ ③ $2c$ ④ $3c$ ⑤ $4c$

8. 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 S라 하자. S의 부분집합인 세 사건 $A,\ B,\ C$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $A\cup B\cup C=S$ (나) 사건 $A\cap B$와 사건 C는 서로 배반이다. (다) 사건 A와 사건 B는 서로 독립이다.

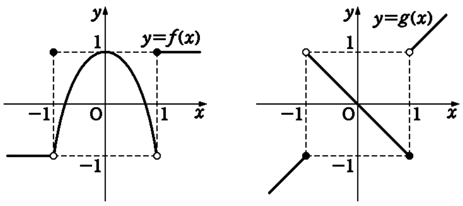
$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\mathrm{C})=\frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{C})+\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{C})$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

9. 곡선 $y=x^4+x^2$과 직선 $y=\frac{2}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 a_n이라 하자. $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n+1}\right)$이라 할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{11}{15}$ ② $\frac{22}{15}$ ③ $\frac{11}{5}$ ④ $\frac{44}{15}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

10. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to -1} f(x)g(x) = -1$

ㄴ. $\lim_{x\to 1} f(x)g(x) = 1$

ㄷ. 함수 $y=f(x)g(x)$의 불연속점의 개수는 2개이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

11. 이차함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to 2} g(x) = f'(2)$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)g'(x)=f'(x)-g(x)$

ㄷ. $x>2$일 때, $g(x)<f'(x)$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

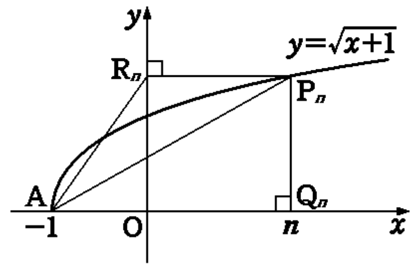
12. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_2 \dfrac{1}{y} = 1 \\ \log_9 3x + \log_{\frac{1}{2}} y = 1 - \dfrac{k}{2} \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha \le \beta$를 만족시키는 정수 k의 최댓값은? [3점]

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

13. 무리함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$과 자연수 n에 대하여 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $P_n(n, f(n))$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_n, y축에 내린 수선의 발을 R_n이라 하자. 점 $A(-1, 0)$에 대하여 사각형 $AQ_nP_nR_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 AQ_nP_n의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n+T_n}{S_n-T_n}$의 값은? [3점]



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

14. 함수 $f(x)$를

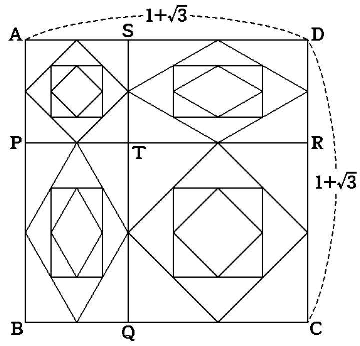
$$f(x)=\begin{cases}-x(x-1) & (0 \le x < 1)\\ -\frac{1}{4^n}(x-n)(x-n-1) & (n \le x < n+1)\end{cases}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이라 정의하자. $S_n=\int_0^{n+1} f(x)\,dx$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 $1+\sqrt{3}$인 정사각형 ABCD 가 있다. 두 변 AB와 BC를 $1:\sqrt{3}$으로 내분하는 점을 각각 P, Q 라 하고, 두 변 CD와 DA를 $\sqrt{3}:1$로 내분하는 점을 각각 R, S라 하자. 이때, 두 선분 PR, QS의 교점을 T라 하고, 네 사각형 APTS, PBQT, TQCR, STRD를 만든다.
먼저 사각형 APTS의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_1, 사각형 A_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_2, 사각형 A_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_3라 하자. 또, 사각형 PBQT의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_1, 사각형 B_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_2, 사각형 B_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_3라 하자. 또, 사각형 TQCR의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_1, 사각형 C_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_2, 사각형 C_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_3라 하자. 또, 사각형 STRD의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_1, 사각형 D_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_2, 사각형 D_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_3라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 사각형 $A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n$의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 각각 $A_{n+1},\ B_{n+1},\ C_{n+1},\ D_{n+1}$이라 하자. 사각형 $A_n,\ B_n,\ C_n,\ D_n$의 넓이를 각각 $a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=p+q\sqrt{3}$ 을 만족시키는 두 유리수 $p,\ q$의 합 $p+q$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

16. 이차정사각행렬 A, B가 $A^2B^3=O$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

보기
ㄱ. 행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $2A-B=E$이면 $(AB)^{2012}=O$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 자연수 n에 대하여 집합 A_n, B_n을

$$A_n=\{(n,\ k)\mid k\le n^2+n,\ k\text{는 자연수}\}$$

$$B_n=\left\{(n,\ k)\ \middle|\ k\le \frac{1}{2}n+5,\ k\text{는 자연수}\right\}$$

라 하자. 집합 A_n-B_n의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}a_n$의 값은? [4점]

① 2883 ② 2886 ③ 2889
④ 2892 ⑤ 2895

18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{[\log 3^k]}{k}\le[\log 3^n]\qquad\cdots\cdots\ (*)$$

이 성립함을 증명한 것이다.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

〈증명〉
(1) $n=1$일 때, (좌변)$=[\log 3]$, (우변)$=[\log 3]$이므로 (*)이 성립한다.
(2) 임의의 자연수 i에 대하여

$$a_i=\sum_{k=1}^{i}\frac{[\log 3^k]}{k},\ \ b_i=(i+1)(a_{i+1}-a_i)$$

라 하면 $b_i=\boxed{(가)}$이다.
이때, $n\le m$ (m은 자연수)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
$a_i\le[\log 3^i]$ (단, i는 m 이하의 자연수이다.)
이제, $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m}b_k=(m+1)a_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}a_k-a_1$$

이므로 $(m+1)a_{m+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k+\boxed{(나)}$
그런데 $[\log 3^k]+[\log 3^{m+1-k}]\le[\log 3^{m+1}]$이므로

$$\begin{aligned}(m+1)a_{m+1}&\le\sum_{k=1}^{m}[\log 3^k]+\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]\\&=\sum_{k=1}^{m}\left([\log 3^k]+[\log 3^{m+1-k}]\right)+\boxed{(다)}\\&\le m[\log 3^{m+1}]+[\log 3^{m+1}]\\&=(m+1)[\log 3^{m+1}]\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{m+1}\le[\log 3^{m+1}]$
그러므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
따라서 (1)과 (2)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(i)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(n)+g(n)-h(n)=9$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

19. 양의 실수 x에 대하여 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{[x]+1}$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
> ㄴ. $\lim_{x\to 2} f(x)=\dfrac{1}{2}$
> ㄷ. $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $x\{f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\}$를 만족시킨다. $f(1)=4$, $g(0)=1$일 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① 20 ② 24 ③ 38 ④ 32 ⑤ 36

21. 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{9^n x^{18}}{(9+x^{2p})^n}$에 대하여 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한 자연수 p의 개수는? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

22. $0<a<\dfrac{1}{2}$일 때, 곡선 $y=x^2$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$에서 그은 접선 l이 x축의 점 A에서 만난다. 접선 l을 x축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m이라 하고, 직선 m이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 또, 점 A를 지나고 접선 l에 수직인 직선을 n이라 할 때, 직선 n이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $S(a)$의 극댓값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{3}}{144}$ ② $\dfrac{1}{48}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{72}$ ④ $\dfrac{1}{12}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

23. $0<a<b<1$일 때, 직선 $y=1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $y=-1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR의 기울기를 각각 α, β, γ, δ라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]

① $\delta<\alpha<\beta<\gamma$ ② $\gamma<\alpha<\delta<\beta$
③ $\gamma<\alpha<\beta<\delta$ ④ $\gamma<\alpha=\delta<\beta$
⑤ $\alpha=\delta<\beta<\gamma$

24. 1보다 큰 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)=a^{2x}$, $g(x)=a^{x+1}-2$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를 $h(x)=|f(x)-g(x)|$라 하자. $y=h(x)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$일 때 $y=h(x)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.
ㄴ. $a=4$일 때 $x_1<x_2<\frac{1}{2}$이면 $h(x_1)>h(x_2)$이다.
ㄷ. $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나는 a의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

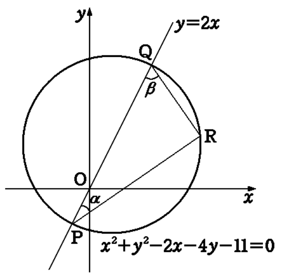
25. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{10}-a_1=27$, $S_{10}=a_{10}$일 때, S_{10}의 값을 구하여라. [2점]

26. $2\sum_{k=1}^{5} x_k+3\sum_{k=6}^{10} x_k=8$을 만족시키는 서로 다른 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10})$의 개수를 구하여라.
(단, x_i는 음이 아닌 정수이고 $i=1, 2, 3, \cdots, 10$이다.) [3점]

27. 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 도함수이고, $h(x)$는 $g(x)$의 도함수라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$이 성립할 때, $f(-1)$의 값을 구하여라. [4점]

28. 그림과 같이 좌표평면 위에서 원 $x^2+y^2-2x-4y-11=0$과 직선 $y=2x$가 만나는 두 점을 P, Q라 하고 직선 $y=2x$ 위에 있지 않은 원 위의 한 점을 R라 하자.

$\angle\mathrm{QPR}=\alpha$, $\angle\mathrm{RQP}=\beta$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}$가 $8A^2=4A+7E$를 만족시킬 때, 삼각형 PQR의 넓이는 S이다. S^2의 값을 구하여라.(단, E는 단위행렬이다.) [4점]



29. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(n)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(3)=10$
> (나) $f(n+2)=2f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$
> (다) $f(n+10)=f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\sum_{n=1}^{100} f(n)=2170$일 때, $f(100)$의 값을 구하여라. [4점]

30. 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2$이고, $g'(x)=2x$이다. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때, $f(0)-g(0)$의 값들의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2012년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ⑤

$a_n = \sqrt{(2n+1)+2n-2\sqrt{2n(2n+1)}}$
$= \sqrt{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})^2}$
$= \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}$
$b_n = \sqrt{(n+1)+n-2\sqrt{n(n+1)}}$
$= \sqrt{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}$
$= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$
$= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) ④

$|x|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-x^{2n}}{2+x^{2n}} = -1$,
$|x|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-x^{2n}}{2+x^{2n}} = 1$이므로
$\alpha = \lim\limits_{x\to-1-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1-}(-x) = 1$
$\beta = \lim\limits_{x\to1-} f(x) = \lim\limits_{x\to1-} x = 1$
$\therefore\ \alpha\beta = 1$

3) ⑤

$f'(x) = (x-q)(x-r)+(x-r)(x-p)+(x-p)(x-q)$
이므로
$\frac{p^2}{f'(p)}+\frac{q^2}{f'(q)}+\frac{r^2}{f'(r)}$
$= \frac{p^2}{(p-q)(p-r)}+\frac{q^2}{(q-r)(q-p)}+\frac{r^2}{(r-p)(r-q)}$
$= \frac{p^2(q-r)-q^2(p-r)+r^2(p-q)}{(p-q)(p-r)(q-r)}$
이때,
$p^2(q-r)-q^2(p-r)+r^2(p-q)$
$= p^2(q-r)-(q^2-r^2)p+q^2r-qr^2$
$= (q-r)\{p^2-(q+r)p+qr\}$
$= (p-q)(p-r)(q-r)$
이므로 $\frac{p^2}{f'(p)}+\frac{q^2}{f'(q)}+\frac{r^2}{f'(r)} = 1$

4) ②

$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ …… ㉠
이므로 $A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = A\cdot A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$
그런데 $A^2 = 2A+E$이므로
$A^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (2A+E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$= 2A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$= 2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$
$\therefore\ A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $A\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&7\\4&10\end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix}3&7\\4&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}^{-1}$
$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&7\\4&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}$
$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&-2\\-4&-2\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 5이다.
$A^2 = 2A+E$이고 행렬 E의 모든 성분의 합이 2이므로
행렬 A^2의 모든 성분의 합은 $2\times5+2 = 12$

[다른 풀이]
행렬 A의 모든 성분의 합은 $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합과 같다.
위 풀이의 ㉠, ㉡에서
$A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = A\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} = A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$이고
$\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$이므로
$A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ 즉, $2A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$에서
$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$
따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 5

5) ①

$x-y = 7-z$
ⅰ) $z=6$일 때, $x-y=1$이고
이때, 순서쌍 (x, y)를 정하는 방법의 수는 5가지
ⅱ) $z=5$일 때, $x-y=2$이고
이때, 순서쌍 (x, y)를 정하는 방법의 수는 4가지
ⅲ) $z=4$일 때, $x-y=3$이고
이때, 순서쌍 (x, y)를 정하는 방법의 수는 3가지
ⅳ) $z=3$일 때, $x-y=4$이고
이때, 순서쌍 (x, y)를 정하는 방법의 수는 2가지
ⅴ) $z=2$일 때, $x-y=5$이고
이때, 순서쌍 (x, y)를 정하는 방법의 수는 1가지
ⅰ)~ⅴ)에서 구하는 확률은
$\frac{1+2+3+4+5}{6\times6\times6} = \frac{5}{72}$

6) ③

$\sum\limits_{x=1}^{6}\mathrm{P}(X=x) = \frac{1}{k}\sum\limits_{x=1}^{6}{}_6\mathrm{C}_x = \frac{1}{k}(2^6-1) = 1$이므로
$k = 2^6-1 = 63 = 3^2\times7$
$\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{x=1}^{6}x\cdot\mathrm{P}(X=x)$

$=\dfrac{1}{k}\sum_{x=1}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_x = \dfrac{2^6}{k}\sum_{x=1}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{2^6}{k}\sum_{x=0}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$

$=\dfrac{2^6}{k}\cdot 3$

$\left(\because\right.$ 이항분포 $\mathrm{B}\left(6, \dfrac{1}{2}\right)$를 따르는 확률변수의 확률질량함수는 ${}_6\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$이고

평균은 $\left.\sum_{x=0}^{6} x \cdot {}_6\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = 6\times\dfrac{1}{2} = 3\right)$

따라서 $m=\dfrac{2^6}{k}\cdot 3$에서 $k^2m = 2^6\cdot 3k = 2^6\cdot 3^3\cdot 7$

$\therefore\ a=6,\ b=3,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=10$

[다른 풀이]

항등식 $(x+1)^n=\sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i x^i$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$n(x+1)^{n-1}=\sum_{i=1}^{n} i\times{}_n\mathrm{C}_i x^{i-1}$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$n\cdot 2^{n-1}=\sum_{i=1}^{n} i\times{}_n\mathrm{C}_i$

$\therefore\ \sum_{i=1}^{6} x\times{}_6\mathrm{C}_x = 6\cdot 2^5 = 3\cdot 2^6$

7) ②

$\dfrac{A(t)}{P(t)}=\dfrac{1}{20}$이므로

$2^k=\left\{1+8.3\times\dfrac{1}{20}\right\}^c=1.415^c$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$k\times\log 2 = c\times\log 1.415$

$\therefore\ k=\dfrac{\log 1.415}{\log 2}c=\dfrac{0.15}{0.30}c=\dfrac{1}{2}c$

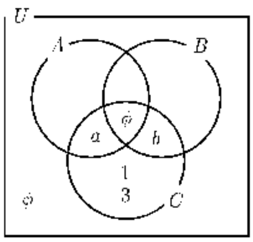
8) ④

조건 (다)에 의해서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

조건 (가), (나)에 맞게 벤다이어그램을 그리면 다음과 같다.



조건 (가)에 의해서

$(A\cup B)^C = C-(A\cup B)=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$이고

조건 (나)에 의해서

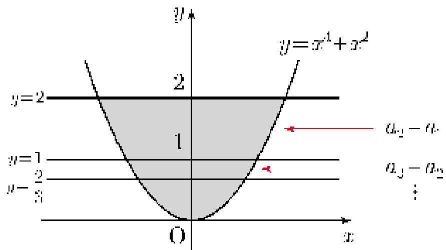
$\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A|C)+\mathrm{P}(B|C)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{2}$

9) ④

$a_n - a_{n+1}$은 곡선 $y=x^4+x^2$와 직선 $y=\dfrac{2}{n}$, $y=\dfrac{2}{n+1}$로 둘러싸인 부분의 넓이므로

그림과 같이 S는 곡선 $y=x^4+x^2$과 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



$x^4+x^2=2$에서 $(x^2+2)(x^2-1)=0$이므로 곡선 $y=x^4+x^2$과 $y=2$는

$\therefore\ S=\int_{-1}^{1}\{2-(x^4+x^2)\}dx$

$=2\left[2x-\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=2\left(2-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}\right)$

$=\dfrac{44}{15}$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

그런데 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n+1}-a_n)$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1$

10) ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=(-1)\times(-1)=1$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=(-1)\times 1=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to-1}f(x)g(x)$은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=(-1)\times(-1)=1$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=1\times1=1$

$\therefore\ \lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$ (참)

ㄷ. ㄱ에 의해서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

$f(1)g(1)=1\times-1=-1$이고

ㄴ에서 의해서 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$의 불연속점은 2개다. (참)

11) ③

ㄱ. $x \neq 2$일 때, $(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$에서

$$g(x)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$f(x)$는 미분가능한 함수이므로

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2) \text{ (참)}$$

ㄴ. $f(x)-f(2)$는 이차함수이고 $x=2$일 때 0이므로 $x-2$라는 인수를 갖는다. 따라서 $g(x)$는 일차함수이다. 따라서 $g(x)$는 미분가능하다.

이때, $(x-2)g(x)=f(x)-f(2)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)+(x-2)g'(x)=f'(x)$

$\therefore\ (x-2)g'(x)=f'(x)-g(x)$ (참)

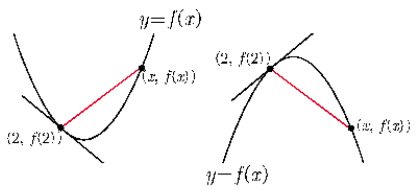
ㄷ. ㄴ에서 $g(x)$가 일차함수이므로 $g'(x)$는 0이 아닌 상수이다.

따라서 $(x-2)g'(x)$는 일차함수로 부호가 $x=2$기준으로 음에서 양 또는 양에서 음으로 바뀐다.

문제의 조건만으로 $g'(x)$의 부호를 판단할 수 없으므로 $x>2$일 때, $g(x)<f'(x)$인지 $g(x)>f'(x)$인지 판단을 할 수 없다. (거짓)

[다른 풀이]

ㄷ. $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$는 $(x, f(x))$와 $(2, f(2))$를 잇는 선분의 기울기와 같다.



$f'(x)<g(x)$ $\qquad$ $f'(x)>g(x)$

$x>2$일 때, 위 그림에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형이

아래로 볼록한 경우 $g(x)>f'(x)$,

위로 볼록한 경우 $g(x)<f'(x)$가 됨을 알 수 있다.

문제에서 $f(x)$가 위로 볼록한지 아래로 볼록한지 주어지지 않았으므로 $x>2$에서 $g(x)$와 $f'(x)$의 크기를 비교할 수 없다.

12) ③

$\log_3 x=X,\ \log_2 y=Y$라 하면 주어진 연립방정식은

$$\log_3 x+\log_2\frac{1}{y}=1$$

$\Leftrightarrow X-Y=1$ …… ㉠

$$\log_9 3x+\log_{\frac{1}{2}} y=1-\frac{k}{2}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(1+\log_3 x)-\log_2 y=1-\dfrac{k}{2}$

$\Leftrightarrow X-2Y=1-k$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $X=k+1,\ Y=k$

따라서 $\log_3\alpha=k+1,\ \log_2\beta=k$에서

$\alpha=3^{k+1},\ \beta=2^k$

$\alpha\le\beta \Leftrightarrow 3^{k+1}\le 2^k \Leftrightarrow 3\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}=\dfrac{3}{2}<3,\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\dfrac{9}{4}<3,\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}=\dfrac{8}{27}>3$

이므로 $\alpha\le\beta$를 만족하는 정수 k의 최댓값은 -3이다.

13) ③

$$\triangle \mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AQ}_n}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{1}{2}(n+1)\sqrt{n+1}$$

$$\triangle \mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{1}{2}n\sqrt{n+1}$$

이므로

$$S_n=\triangle \mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n+\triangle \mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n=\frac{1}{2}(2n+1)\sqrt{n+1}$$

$$T_n=\frac{1}{2}(n+1)\sqrt{n+1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n+T_n}{S_n-T_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(3n+2)\sqrt{n+1}}{\frac{1}{2}n\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)=3$$

14) ②

$-\dfrac{1}{4^n}(x-n)(x-n-1)$에 $n=0$을 대입하면 $-x(x-1)$이므로

음이 아닌 정수 n에 대하여

$$f(x)=-\frac{1}{4^n}(x-n)(x-n-1)\ (n\le x<n+1)$$

이다. 이때,

$a_n=\displaystyle\int_n^{n+1}f(x)dx$ 이라 하면

$$S_n=\int_0^{n+1}f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)dx$$

$$=a_0+a_1+\cdots+a_n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_i$$

그런데

$$a_n=\int_n^{n+1}\left\{-\frac{1}{4^n}(x-n)(x-n-1)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4^n}\quad\therefore\ \left(\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4^n}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{9}$$

15) ⑤

사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형은 원래 사각형의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}\square\mathrm{APTS}}{1-\frac{1}{2}}=\square\mathrm{APTS}$$

마찬가지 방법으로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\square\mathrm{PBQT},\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n=\square\mathrm{TQCR},\ \sum_{n=1}^{\infty}d_n=\square\mathrm{STRD}$

그림에서 $\overline{\mathrm{AS}}=\overline{\mathrm{AP}}=1,\ \overline{\mathrm{SD}}=\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{3}$ 이므로

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=(1+3)-(\sqrt{3}+\sqrt{3})=4-2\sqrt{3}$$

$\therefore\ p=4,\ q=-2$

$\therefore\ p+q=2$

16) ③

ㄱ. 만약 AB의 역행렬이 존재하면 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이므로
행렬 A와 B의 역행렬이 모두 존재해야한다.
이때, $A^2B^3=O$의 양변의 앞쪽에 $(A^{-1})^2$를 뒤쪽에 $(B^{-1})^3$을 곱하면
좌변은 $(A^{-1})^2A^2B^3(B^{-1})^3=E$
우변은 $(A^{-1})^2O(B^{-1})^3=O$
이 되어 등식이 성립하지 않는다.
따라서 행렬 AB의 역행렬은 존재하지 않는다. (참)
ㄴ. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이라 하면
A의 역행렬은 존재하고
$B^2=O$이므로 $A^2B^3=O$을 만족하지만
$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$로 $AB\neq BA$이다. (거짓)
[참고]
$B\neq O$이고 $B^n=O$ $(n\geq 3)$이면
B^{-1}이 존재하지 않으므로 행렬 B는 $B^2=kB$꼴로 나타낼 수 있다. (∵ 케일리해밀턴정리)
이때, $B^n=kB^{n-1}=k^2B^{n-2}=\cdots=k^{n-1}B$이므로 $B^n=O$에서
$k=0$이다.
∴ $B^2=kB=O$이다.

ㄷ. $2A-B=E$이면 $B=2A-E$에서
$AB=A(2A-E)=2A^2-A$
$BA=(2A-E)A=2A^2-E$
이므로 $AB=BA$이다.
∴ $(AB)^{2012}=A^{2012}B^{2012}=A^{2010}(A^2B^3)B^{2009}=O$ (참)
[참고]
행렬 B가 행렬 A에 대한 다항식꼴로 나타내어질 때, $AB=BA$가 성립한다.
예) $B=A^2-A+E$이면
$AB=A(A^2-A+E)=A^3-A^2+A$
$BA=(A^2-A+E)A=A^3-A^2+A$
이므로 $AB=BA$

17) ①
$n^2+n\leq \frac{1}{2}n+5$에서
$2n^2+n-10=(2n+5)(n-2)\leq 0$
따라서 $n\leq 2$일 때, $n^2+n\leq\frac{1}{2}n+5$가 성립한다.
따라서 $A_n\subset B_n(n=1,\ 2)$이고 $B_n\subset A_n(n=3,4,\ \cdots)$이다.
따라서 $A_n-B_n=\varnothing\,(n=1,\ 2)$이므로 $a_n=0$이고
$n\geq 3$일 때, $a_n=n(A_n)-n(B_n)=n^2+n-\left[\frac{1}{2}n+5\right]$이다.
그런데
n이 짝수일 때, $\left[\frac{1}{2}n+5\right]=\frac{1}{2}n+5$
n이 홀수일 때, $\left[\frac{1}{2}n+5\right]=\frac{1}{2}n+5-\frac{1}{2}$
이므로
$\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=3}^{20}\left(n^2+n-\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)$
$=\sum_{n=3}^{20}(n^2+n)-\sum_{n=3}^{20}\left(\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)$

이때, $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$이므로
$\sum_{n=3}^{20}(n^2+n)=\left\{\sum_{n=1}^{20}(n^2+n)-\sum_{n=1}^{2}(n^2+n)\right\}$
$=\frac{1}{3}(20\cdot 21\cdot 22-2\cdot 3\cdot 4)$
$=\frac{1}{3}(9240-24)=3072$
이고
$\sum_{n=3}^{20}\left(\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)=\sum_{n=3}^{20}\left(\frac{1}{2}n+5\right)-9\cdot\frac{1}{2}$
(∵ 3~20까지 자연수 중 홀수는 9개)
$=\left(\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{2}n-\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{2}n\right)+18\times 5-9\cdot\frac{1}{2}$
$=\left(105-\frac{3}{2}\right)+90-\frac{9}{2}$
$=189$
이므로 $\sum_{n=1}^{20}a_n=3072-189=2883$

18) ②
$a_{i+1}-a_i=\sum_{k=1}^{i+1}\frac{[\log 3^k]}{k}-\sum_{k=1}^{i}\frac{[\log 3^k]}{k}=\frac{[\log 3^{i+1}]}{i+1}$ 이므로
$b_i=(i+1)(a_{i+1}-a_i)=(i+1)\cdot\frac{[\log 3^{i+1}]}{i+1}=[\log 3^{i+1}]$
∴ (가)$=[\log 3^{i+1}]$
$\sum_{k=1}^{m}b_k=(m+1)a_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}a_k-a_1$이므로
(나)$=\sum_{k=1}^{m}b_k+a_1=\sum_{k=1}^{m}[\log 3^{k+1}]+[\log 3]$ (∵ (가))
$=\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]$
$\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]=\sum_{k=1}^{m}[\log 3^{m+1-k}]+[\log 3^{m+1}]$이므로
$\sum_{k=1}^{m}[\log 3^k]+\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]=\sum_{k=1}^{m}([\log 3^k]-[\log 3^{m+1-k}])+[\log 3^{m+1}]$
∴ (다) $=[\log 3^{m+1}]$
∴ $f(n)=[\log 3^{n+1}]$, $g(n)=\sum_{k=1}^{n+1}[\log 3^k]$, $h(n)=[\log 3^{n+1}]$
∴ $f(n)+g(n)-h(n)=\sum_{k=1}^{n+1}[\log 3^k]$
$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ 3^6=729,\ 3^7=2187$이므로
$\sum_{k=1}^{7}[\log 3^k]=0+0+1+1+2+2+3=9$
∴ $n=7-1=6$

19) ④
ㄱ. $f(1)=0$
$\lim_{x\to 1}|x-1|=0$이고
$\lim_{x\to 2-0}([x]+1)=1$, $\lim_{x\to 2+0}([x]+1)=2$
이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이다.
따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 2}|x-1|=1$이고

$\lim_{x\to 2-}([x]+1)=2$, $\lim_{x\to 2+}([x]+1)=3$이므로

$\lim_{x\to 2-}f(x)=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 2+}f(x)=\frac{1}{3}$

따라서 $\lim_{x\to 2}f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄷ. $x-1<[x]\le x$이므로

$x>1$일 때, $\frac{x-1}{x+1}\le f(x)<\frac{x-1}{x}$

그런데 $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20) ①

$x\{f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\}$에서

$x\times\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}=2\{f(x)+g(y)\}$

$f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 연속이고 미분가능하다.

따라서

$\lim_{y\to 0}\left\{x\times\frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}\right\}=xf'(x)$,

$\lim_{y\to 0}2\{f(x)+g(y)\}=2\{f(x)+g(0)\}=2\{f(x)+1\}$

$\therefore\ xf'(x)=2\{f(x)+1\}$

$f(x)$가 최고차항의 계수가 a인 n차 함수라 하면

$xf'(x)$의 최고차항의 계수는 an이고

$2\{f(x)+1\}$의 최고차항의 계수는 $2a$이므로

$n=2$이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$x(2ax+b)=2(ax^2+bx+c+1)$에서

$b=0$, $c=-1$

또한 $f(1)=a+b+c=a+0-1=4$에서

$a=5$

$\therefore\ f(x)=5x^2-1$

$\therefore\ f'(x)=10x$

$\therefore\ f'(2)=20$

[다른 풀이]

$xf'(x)=2\{f(x)+1\}$에서

$\frac{f'(x)}{f(x)+1}=\frac{2}{x}$

위 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln\,(f(x)+1)=2\ln x+C$

$f(1)=4$이므로 $C=\ln 5$

따라서 $\ln\,(f(x)+1)=\ln 5x^2$에서

$f(x)+1=5x^2$ 즉, $f(x)=5x^2-1$

21) ④

$x=0$일 때, $f(x)=0$

$x\ne 0$일 때, $0<\frac{9}{9+x^{2p}}<1$이므로

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n x^{18}}{(9+x^{2p})^n}=x^{18}\times\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{9+x^{2p}}\right)^n$

$=x^{18}\times\frac{\frac{9}{9+x^{2p}}}{1-\frac{9}{9+x^{2p}}}=x^{18}\times\frac{9}{x^{2p}}=9x^{2(9-p)}$

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$이려면 $9-p>0$ 즉, $p<9$이어야 한다.

따라서 자연수 p는 1, 2, ⋯ , 8의 총 8개다.

22) ①

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로

접선 l의 방정식은 $y-a^2=2a(x-a)$즉, $y=2ax-a^2$

이고 점 $\mathrm{A}\left(\frac{a}{2},\,0\right)$이다.

이때,

직선 m의 방정식은 $y=-2ax+a^2$

직선 n의 방정식은 $y=-\frac{1}{2a}\left(x-\frac{a}{2}\right)=-\frac{x}{2a}+\frac{1}{4}$

이므로 점 $\mathrm{B}(0,\,a^2)$, 점 $\mathrm{C}\left(0,\,\frac{1}{4}\right)$이다.

$\therefore\ S(a)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}-a^2\right)\times\frac{a}{2}=\frac{a(1-4a^2)}{16}$ $\left(\because\ 0<a<\frac{1}{2}\right)$

$S'(a)=\frac{1-12a^2}{16}=0$에서 $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}$이므로

$S(a)$는 $a=-\frac{\sqrt{3}}{6}$에서 극솟값을 $a=\frac{\sqrt{3}}{6}$에서 극댓값을 갖는다.

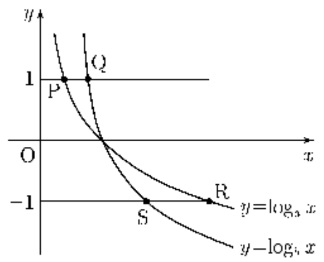
따라서 구하는 값은

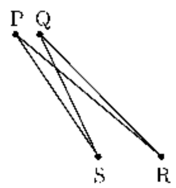
$S\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{1}{16}\times\frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{144}$

23) ②

함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$의 그래프와 직선 $y=1$, $y=-1$를 그려 점 P, Q, R, S를 표시하면 다음과 같다.





위 그림에서 $\overline{\mathrm{PQ}}<\overline{\mathrm{SR}}$이므로 $\gamma<\alpha<\sigma<\beta$

24) ③

$f(x)-g(x)=a^{2x}-a^{x+1}+2$

따라서 $a^x=t$라 하면

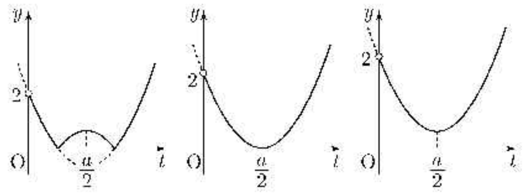
$f(x)-g(x)=t^2-at+2$

이차방정식 $t^2-at+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8=0$에서 $a=2\sqrt{2}$ $(\because\ a>1)$

$y=t^2-at+2$는 대칭축이 $t=\frac{a}{2}$이고 y절편이 2인 이차함수이므로

a의 크기에 따라서 $y=|t^2-at+2|$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



$a > 2\sqrt{2}$ $a = 2\sqrt{2}$ $1 < a < 2\sqrt{2}$

이때, $t = a^x$는 모든 실수에서 임의의 양수로의 일대일대응이고
$x_1 < x_2$에 대하여 $t_1 < t_2$를 만족한다. …… ㉠
ㄱ. $a = 2\sqrt{2}$일 때, $y = |t^2 - at + 2|$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 (접하므로)
$y = h(x)$의 그래프도 x축과 한 점에서 만난다. ($\because$ ㉠) (참)
ㄴ. $a = 4$일 때,
$t^2 - 4t + 2 = 0$에서 $t = 2 \pm \sqrt{2}$이므로
$y = |t^2 - at + 2|$의 그래프는 $0 < t < 2 - \sqrt{2}$에서 감소하고
$2 - \sqrt{2} < t < 2$에서 감소한다. …… ㉡
$x < \frac{1}{2}$일 때, $0 < t < 4^{\frac{1}{2}} = 2$이므로 ㉠, ㉡에 의해서 $h(x_1)$, $h(x_2)$의 대소를 비교할 수 없다.
ㄷ. $y = t^2 - at + 2$의 그래프가 직선 $y = 1$과 접할 때, $y = h(x)$의 그래프와 직선 $y = 1$이 오직 한 점에서 만나게 된다.
$t^2 - at + 2 = 1$에서 $t^2 - at + 1 = 0$
위의 방정식은 $a = 2$일 때 중근을 가지므로 $a = 2$일 때,
$y = h(x)$의 그래프와 직선 $y = 1$이 오직 한 점에서 만나게 된다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

25) 15
수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_{10} - a_1 = 9d = 27$
$\therefore\ d = 3$
$S_{10} = a_{10} = S_{10} - S_9$에서 $S_9 = 0$
따라서 $a_1 + a_9 = 2a_5 = 0$에서 $a_5 = 0$
$\therefore\ S_{10} = a_{10} = a_5 + 5d = 15$
[다른 풀이]
$S_9 = \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 0$에서 $a_1 = -4d = -12$
$\therefore\ S_{10} = a_{10} = a_1 + 9d = 15$

26) 145
$\sum_{k=1}^{5} x_k = X$, $\sum_{k=6}^{10} x_k = Y$라 하면
X, Y가 음이 아닌 정수이므로
$2X + 3Y = 8$에서 $(X, Y) = (1, 2), (4, 0)$
i) $(X, Y) = (1, 2)$을 만족하는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10})$을 정하는 방법의 수는
${}_5H_1 \times {}_5H_2 = {}_5C_1 \times {}_6C_2 = 75$
ii) $(X, Y) = (4, 0)$을 만족하는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10})$을 정하는 방법의 수는
${}_5H_4 \times {}_5H_0 = {}_8C_4 = 70$
i), ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $75 + 70 = 145$

27) 54
$f'(x) = g(x)$, $g'(x) = h(x)$
$f(x) + h(x) = 2g(x) + x^4 + 1$에서
좌변 $f(x) + h(x)$의 최고차항은 $f(x)$의 최고차항과 같고
$g(x)$의 차수는 $f(x)$보다 작으므로 우변 $2g(x) + x^4 + 1$의 최고차항은 x^4이다.
따라서 $f(x)$는 최고차항이 x^4인 사차함수이다.
$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$라 하면
$g(x) = f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$
$h(x) = g'(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$
이고
$f(x) + h(x) = x^4 + ax^3 + (b + 12)x^2 + (6a + c)x + 2b + d$ …… ㉠
$2g(x) + x^4 + 1 = x^4 + 8x^3 + 6ax^2 + 4bx + 2c + 1$ …… ㉡
㉠, ㉡의 계수를 비교하면
$a = 8$, $b + 12 = 6a$, $6a + c = 4b$, $2b + d = 2c + 1$
$\therefore\ a = 8$, $b = 36$, $c = 96$, $d = 121$
$\therefore\ f(-1) = 1 - a + b - c + d = 1 - 8 + 36 - 96 + 121 = 54$

28) 60
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2$
직선 $y = 2x$는 원의 중심 $(1, 2)$를 지나므로
선분 PQ는 원의 지름이 된다.
따라서 $\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$이므로
$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$
$\therefore\ A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$이므로
$8A^2 = 4A + 7E$에서
$\begin{pmatrix} 8 & 16\sin\alpha\cos\alpha \\ 16\sin\alpha\cos\alpha & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sin\alpha + 7 & 4\cos\alpha \\ 4\cos\alpha & 4\sin\alpha + 7 \end{pmatrix}$
$4\sin\alpha + 7 = 8$에서 $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$
$\therefore\ \overline{PR} = \overline{PQ}\cos\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{15}$
$\overline{QR} = \overline{PQ}\sin\alpha = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$
$\therefore\ S = \frac{1}{2}\overline{PR} \cdot \overline{QR} = 2\sqrt{15}$
$\therefore\ S^2 = (2\sqrt{15})^2 = 60$

[다른 풀이]
$8A^2 = 4A + 7E$ 즉, $A^2 - \frac{1}{2}A - \frac{7}{8}E = O$를 만족하는 $A = kE$꼴의 이차정사각행렬은 존재하지 않으므로 $A^2 - \frac{1}{2}A - \frac{7}{8}E = O$는 행렬 A의 케일리해밀턴정리에 의해 유도된 다항식과 일치한다.
따라서 $2\sin\alpha = \frac{1}{2}$에서 $\sin\alpha = \frac{1}{4}$

29) 32
조건 (가), (나)에서 $f(3) = f(1+2) = 2f(1) = 10$에서 $f(1) = 5$
$\therefore\ \sum_{n=1}^{5} f(2n-1) = 5(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 5 \times 31$
$f(2) = a$라 하면 조건(나)에서

$\sum_{n=1}^{5} f(2n) = a(1+2+2^2+2^3+2^4) = a \times 31$

조건 (다)에 의해서

$\sum_{n=1}^{100} f(n) = 10 \times \sum_{n=1}^{10} f(n)$

$= 10 \times \sum_{n=1}^{5} \{f(2n-1)+f(2n)\}$

$= 10 \times (a+5) \times 31$

$= 2170$

$\therefore\ a = 2$

$f(100) = f(10) = 2^4 f(2) = 2^4 \times a = 32$

30) 28

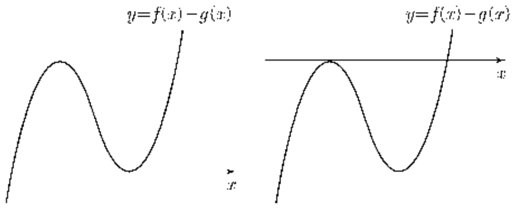
$f'(x) - g'(x) = 6x^2 - 2x$이므로

$f(x) - g(x) = 2x^3 - x^2 + C$이다.

$y = f(x)$와 $y = g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나므로

방정식 $f(x) - g(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(x) - g(x)$는 삼차함수이므로 방정식 $f(x) - g(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 함수 $f(x) - g(x)$의 (극솟값)$=0$또는 (극댓값)$=0$이어야 한다.



$f'(x) - g'(x) = 2x(3x-1) = 0$에서 $x = 0$또는 $x = \frac{1}{3}$이므로

$f(0) - g(0) = C = 0$또는 $f\left(\frac{1}{3}\right) - g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} + C = 0$

$\therefore\ C = 0$또는 $C = \frac{1}{27}$

$\therefore\ \frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{27} = \frac{1}{27}$

$\therefore\ p = 27,\ q = 1,\ p + q = 28$