2012학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 자연수 n에 대하여

$$a_n=\sqrt{4n+1-2\sqrt{4n^2+2n}}\ ,\ b_n=\sqrt{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 함수 $f(x)=x\ln x$에 대하여 등식 $f(e^2)-f(e)=e(e-1)f'(c)$를 만족시키는 c가 열린 구간 (e, e^2)에 존재한다. $\ln c$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{e}$ ② $\frac{e+2}{e}$ ③ $\frac{2}{e-1}$
④ $\frac{e}{e-1}$ ⑤ $\frac{2e}{e+1}$

3. 자연수 n에 대하여 $S_n=\frac{3}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+2k}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}(S_n+1)$의 값은? [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

4. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 x, y좌표가 각각 $x=t-\sin 2t$, $y=1-\cos 2t$일 때, 점 P의 속력의 최댓값은? (단, $t\ge 0$) [3점]

① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

5. $0<x<2\pi$에서 삼각방정식

$$3\sin x+3\sin x\cos 2x-6\sin x\cos x-\cos x+1=0$$

의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{5}{2}\pi$ ② 3π ③ $\frac{7}{2}\pi$ ④ 4π ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

6. 이산확률변수 X가 값 x를 가질 확률이

$$P(X=x)=\frac{{}_6C_x}{k}$$

(단, $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이고 k는 상수이다.)
일 때, 확률변수 X의 기댓값을 m이라 하면 $mk^2=2^a\times3^b\times7^c$이다. 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 합 $a+b+c$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

7. 지질학에서 암석의 연대를 측정하는 방법 중 하나로 포타슘-40은 방사선 분해과정을 거쳐 일정한 비율로 아르곤-40으로 바뀌는 점을 이용한 포타슘-아르곤연대측정법을 사용한다. 암석이 생성되어 t년이 되었을 때, 포타슘-40과 아르곤-40의 양을 각각 $P(t)$, $A(t)$라 하면

$$2^t=\left\{1+8.3\times\frac{A(t)}{P(t)}\right\}^c \text{ (단, } c\text{는 상수이다.)}$$

이 성립한다고 하자. 이 방법으로 암석의 연대를 측정하였을 때 포타슘-40의 양이 아르곤-40의 양의 20배인 암석이 생성된 것은 k년 전이다. k의 값은?
(단, $\log1.415=0.15$, $\log2=0.30$으로 계산한다.) [3점]

① $\frac{1}{3}c$ ② $\frac{1}{2}c$ ③ $2c$ ④ $3c$ ⑤ $4c$

8. 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 S라 하자. S의 부분집합인 세 사건 $A,\ B,\ C$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $A\cup B\cup C=S$
(나) 사건 $A\cap B$와 사건 C는 서로 배반이다.
(다) 사건 A와 사건 B는 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\mathrm{C})=\frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{C})+\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{C})$의 값은? [3점]

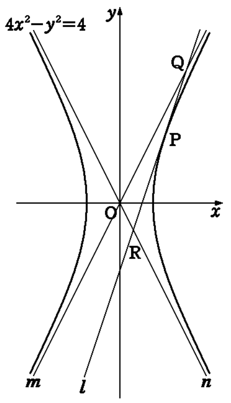
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

9. 좌표평면 위에서 원점을 중심으로 하여 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전시키는 회전변환에 의하여 점 A가 옮겨지는 점을 B라 하고, 원점을 중심으로 하여 $-\frac{7}{12}\pi$만큼 회전시키는 회전변환에 의하여 점 B가 옮겨지는 점을 C라 하자. 점 B의 x좌표가 -1이고, 점 C는 x축 위의 점일 때, 점 A의 x좌표와 y좌표의 곱은? [3점]

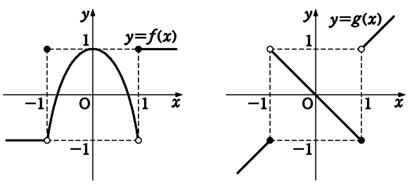
① $2-2\sqrt{3}$ ② $4-2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}-1$ ④ $2+2\sqrt{3}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

10. 그림과 같이 쌍곡선 $4x^2-y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ 2)$에서의 접선을 l이라 하고, 이 쌍곡선의 두 점근선 중 기울기가 양수인 것을 m, 기울기가 음수인 것을 n이라 하자. l과 m의 교점을 Q, l과 n의 교점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{QR}}=k\overline{\mathrm{PQ}}$를 만족시키는 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $1+\sqrt{2}$



11. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



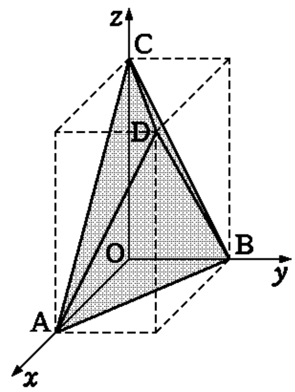
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to-1} g(f(x))=1$
ㄴ. $\lim_{x\to-1} f(g(x))=-1$
ㄷ. 함수 $y=f(g(x))$의 불연속점의 개수는 2개이다.

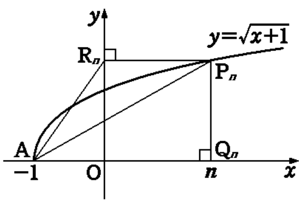
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

12. 좌표공간 위의 네 점 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 4)$, $D(2,\ 2,\ 4)$에 대하여 그림과 같이 사면체 DABC의 꼭짓점 D에서 삼각형 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 DH의 길이는? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3



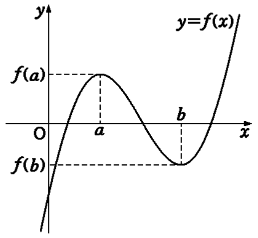
13. 무리함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$과 자연수 n에 대하여 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P_n}(\mathrm{n},\ \mathrm{f}(\mathrm{n}))$에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{Q_n}$, y축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{R_n}$이라 하자.



점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$에 대하여 사각형 $\mathrm{AQ_nP_nR_n}$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{AQ_nP_n}$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n+T_n}{S_n-T_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

14. 그림과 같이 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가지는 삼차함수 $f(x)$가 있다.$(0<a<b)$

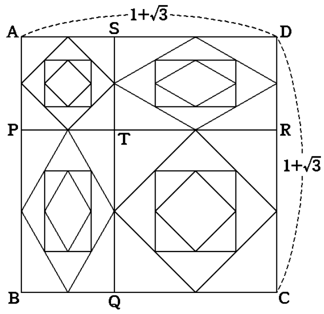


함수 $g(x)=e^{-x^2}f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $g'(0)>0$
ㄴ. $f'(a)+g'(a)>0$
ㄷ. $g(b)g'(b)>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 $1+\sqrt{3}$인 정사각형 ABCD 가 있다. 두 변 AB 와 BC 를 $1:\sqrt{3}$으로 내분하는 점을 각각 P, Q 라 하고, 두 변 CD 와 DA 를 $\sqrt{3}:1$로 내분하는 점을 각각 R, S 라 하자. 이때, 두 선분 PR, QS 의 교점을 T 라 하고, 네 사각형 APTS, PBQT, TQCR, STRD 를 만든다.
먼저 사각형 APTS 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_1, 사각형 A_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_2, 사각형 A_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 A_3라 하자. 또, 사각형 PBQT 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_1, 사각형 B_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_2, 사각형 B_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 B_3라 하자. 또, 사각형 TQCR 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_1, 사각형 C_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_2, 사각형 C_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 C_3라 하자. 또, 사각형 STRD 의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_1, 사각형 D_1의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_2, 사각형 D_2의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 D_3라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n의 네 변의 중점을 연결하여 만든 사각형을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}이라 하자. 사각형 A_n, B_n, C_n, D_n의 넓이를 각각 a_n, b_n, c_n, d_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=p+q\sqrt{3}$을 만족시키는 두 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

16. 이차정사각행렬 A, B가 $A^2B^3=O$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?
(단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

ㄱ. 행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $2A-B=E$이면 $(AB)^{2012}=O$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 자연수 n에 대하여 집합 A_n, B_n을

$$A_n=\{(n,\ k)\mid k\le n^2+n,\ k\text{는 자연수}\}$$

$$B_n=\left\{(n,\ k)\ \middle|\ k\le \frac{1}{2}n+5,\ k\text{는 자연수}\right\}$$

라 하자. 집합 A_n-B_n의 원소의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은? [4점]

① 2883 ② 2886 ③ 2889
④ 2892 ⑤ 2895

18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{[\log 3^k]}{k}\le[\log 3^n] \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 증명한 것이다.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

<증명>
(1) $n=1$일 때, (좌변)$=[\log 3]$,(우변)$=[\log 3]$이므로 (*)이 성립한다.
(2) 임의의 자연수 i에 대하여

$$a_i=\sum_{k=1}^{i}\frac{[\log 3^k]}{k},\ b_i=(i+1)(a_{i+1}-a_i)$$

라 하면 $b_i=\boxed{(가)}$이다.
이때, $n\le m$ (m은 자연수)일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
$a_i\le[\log 3^i]$ (단, i는 m 이하의 자연수이다.)
이제, $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m}b_k=(m+1)a_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}a_k-a_1$$

이므로 $(m+1)a_{m+1}=\sum_{k=1}^{m}a_k+\boxed{(나)}$
그런데 $[\log 3^k]+[\log 3^{m+1-k}]\le[\log 3^{m+1}]$이므로

$$\begin{aligned}(m+1)a_{m+1}&\le\sum_{k=1}^{m}[\log 3^k]+\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]\\&=\sum_{k=1}^{m}\left([\log 3^k]+[\log 3^{m+1-k}]\right)+\boxed{(다)}\\&\le m[\log 3^{m+1}]+[\log 3^{m+1}]\\&=(m+1)[\log 3^{m+1}]\end{aligned}$$

$\therefore\ a_{m+1}\le[\log 3^{m+1}]$
그러므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.
따라서 (1)과 (2)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(i)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $f(n)+g(n)-h(n)=9$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

19. 좌표평면 위를 움직이는 두 점 $\mathrm{A}(2+\sin\theta,\ 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin\theta)$, $\mathrm{B}(\cos\theta,\ -\sqrt{3}\cos\theta)$와 점 $\mathrm{C}(1,\ 0)$에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하고, $\overline{\mathrm{CM}}$이 최대일 때 점 M을 D, $\overline{CM}$이 최소일 때 점 M을 E라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $0 \le \theta < 2\pi$) [4점]

> ㄱ. 점 M이 그리는 도형은 타원이다.
> ㄴ. $\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{CE}}=2\sqrt{3}$
> ㄷ. $\angle\mathrm{DOE}=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{6}$이다.
> (단, O는 원점이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{x}\ln x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{e}$이다.
> ㄴ. $2011^{2012} > 2012^{2011}$
> ㄷ. 열린 구간 $(0,\ e)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ \mathrm{e})$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 접선 l에 수직인 직선과 곡선 $y=e^{-x}$이 만나는 점을 R라 하자. 직선 PQ, 직선 QR과 곡선 $y=e^{-x}$으로 둘러싸인 도형을 x축 둘레로 회전한 회전체의 부피는? [4점]

① $\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{5}{6e^2}\right)$ ② $\pi\left(\frac{e^2}{3}-\frac{5}{6e^2}\right)$ ③ $\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2e^2}\right)$
④ $\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{5}{6e^2}\right)$ ⑤ $\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{2}{3e^2}\right)$

22. $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=2$인 삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하고, $\angle\mathrm{BAM}=\alpha$, $\angle\mathrm{CAM}=\beta$라 하자.
$\cos 2\alpha=\frac{1}{4}$일 때, $8\cos(2\alpha-\beta)$의 값은? [4점]

① $\sqrt{15}$ ② 4 ③ $\sqrt{17}$
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{19}$

23. $0<a<b<1$일 때, 직선 $y=1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $y=-1$이 $y=\log_a x$의 그래프와 $y=\log_b x$의 그래프와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 직선 PS, PR, QS, QR의 기울기를 각각 α, β, γ, δ라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]

① $\delta<\alpha<\beta<\gamma$
② $\gamma<\alpha<\delta<\beta$
③ $\gamma<\alpha<\beta<\delta$
④ $\gamma<\alpha=\delta<\beta$
⑤ $\alpha=\delta<\beta<\gamma$

24. 1보다 큰 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=a^{2x},\ g(x)=a^{x+1}-2$$

가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를 $h(x)=|f(x)-g(x)|$ 라 하자. $y=h(x)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$일 때 $y=h(x)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.

ㄴ. $a=4$일 때 $x_1<x_2<\frac{1}{2}$이면 $h(x_1)>h(x_2)$이다.

ㄷ. $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나는 a의 값이 존재한다.

① ㄱ
② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

25. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{10}-a_1=27$, $S_{10}=a_{10}$일 때, S_{10}의 값을 구하여라. [2점]

26. $2\sum_{k=1}^{5}x_k+3\sum_{k=6}^{10}x_k=8$ 을 만족시키는 서로 다른 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$의 개수를 구하여라.(단, x_i는 음이 아닌 정수이고 $i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$이다.) [3점]

27. 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 두 집합 A, B를 각각

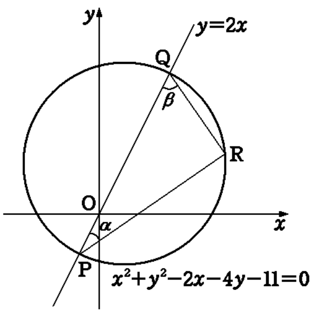
$$A=\left\{x \,\middle|\, \frac{(x-2)^2}{(x-4)(x-6)}\le 0\right\},\ B=\{x\mid (x-6)f(x)\ge 0\}$$

라 하면 두 집합 A와 B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A\cap B=\{2\}\cup\{x\mid 5\le x<6\}$
(나) $A^C\cap B^C=\{x\mid 3<x\le 4\}$

$f(10)$의 값을 구하여라. [4점]

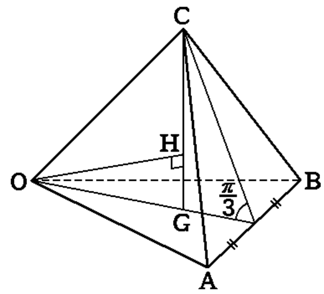
28. 그림과 같이 좌표평면 위에서 원 $x^2+y^2-2x-4y-11=0$과 직선 $y=2x$가 만나는 두 점을 P, Q라 하고 직선 $y=2x$ 위에 있지 않은 원 위의 한 점을 R라 하자. $\angle QPR=\alpha$, $\angle RQP=\beta$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}$가 $8A^2=4A+7E$를 만족시킬 때, 삼각형 PQR의 넓이는 S이다. S^2의 값을 구하여라.(단, E는 단위행렬이다.) [4점]



29. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 3 이상인 모든 자연수 n에 대하여
$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{a_n}{2+a_n}=\frac{b_n}{2-b_n}$을 만족시킬 때,
$\frac{1}{\pi^3}\lim_{n\to\infty}n^3(a_n+b_n)(a_n-b_n)$의 값을 구하여라. [4점]

30. 그림과 같이 사면체 OABC에서 삼각형 OAB와 삼각형 CAB는 모두 정삼각형이고, 삼각형 OAB와 삼각형 CAB가 이루는 이면각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다. 정삼각형 OAB의 무게중심을 G, 점 O에서 선분 CG에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 라 할 때, $\overrightarrow{OH}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$를 만족시키는 세 상수 p, q, r에 대하여 $28(p+q+r)$의 값을 구하여라.

[4점]



※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2012년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ⑤

$a_n = \sqrt{(2n+1)+2n-2\sqrt{2n(2n+1)}}$

$= \sqrt{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})^2}$

$= \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}$

$b_n = \sqrt{(n+1)+n-2\sqrt{n(n+1)}}$

$= \sqrt{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}$

$= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) ④

$f'(c)=\ln c+1$

$\dfrac{f(e^2)-f(e)}{e(e-1)}=\dfrac{2e^2-e}{e(e-1)}=\dfrac{2e-1}{e-1}=1+\dfrac{e}{e-1}$

$\therefore\ \ln c=\dfrac{e}{e-1}$

3) ②

$S_n=\dfrac{3}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n+2k}=\dfrac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+2\left(\dfrac{k}{n}\right)}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+2\left(\dfrac{k}{n}\right)}$

$=\int_0^1 3\sqrt{1+2x}\,dx$

$=\left[(1+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=3^{\frac{3}{2}}-1$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(S_n+1)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n+1=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

4) ①

$\dfrac{dx}{dt}=1-2\cos 2t,\ \dfrac{dy}{dt}=2\sin 2t$이므로

점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(1-2\cos 2t)^2+4\sin^2 2t}$

$=\sqrt{5-4\cos 2t}\le 3$ ($\because\ -4\le 4\cos 2t\le 4$)

이므로 구하는 속력의 최댓값은 3이다.

5) ②

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$이므로

(준식)$=6\sin x\cos^2 x-6\sin x\cos x-\cos x+1$

$=6\sin\cos x(\cos x-1)-(\cos x-1)$

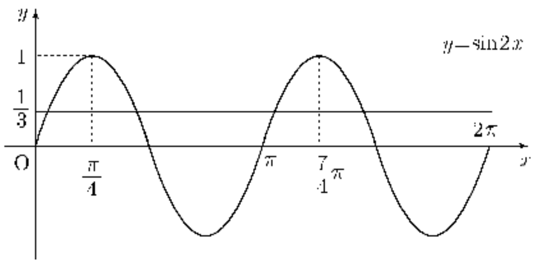
$=(\cos x-1)(6\sin x\cos x-1)$

$=(\cos x-1)(3\sin 2x-1)$

$=0$

$0<x<2\pi$이므로 $\cos x\ne 1$

$\therefore\ \sin 2x=\dfrac{1}{3}$



위의 그림에서 $\sin 2x=\dfrac{1}{3}$를 만족하는 실근은 $0<x<2\pi$범위에서 4개이고, 이 중 두근은 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대칭이고 남은 두 근은 $x=\pi+\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이므로

구하는 모든 실근의 합은 $2\left\{\dfrac{\pi}{4}+\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}=3\pi$

6) ③

$\sum\limits_{x=1}^{6}\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{x=1}^{6}{}_6\mathrm{C}_x=\dfrac{1}{k}(2^6-1)=1$이므로

$k=2^6-1=63=3^2\times 7$

$\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{x=1}^{6}x\cdot\mathrm{P}(X=x)$

$=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{x=1}^{6}x\cdot{}_6\mathrm{C}_x=\dfrac{2^6}{k}\sum\limits_{x=1}^{6}x\cdot{}_6\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=\dfrac{2^6}{k}\sum\limits_{x=0}^{6}x\cdot{}_6\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$

$=\dfrac{2^6}{k}\cdot 3$

($\because$ 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \dfrac{1}{2}\right)$를 따르는 확률변수의 확률질량함수는 ${}_6\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$이고

평균은 $\sum\limits_{x=0}^{6}x\cdot{}_6\mathrm{C}_x\left(\dfrac{1}{2}\right)^6=6\times\dfrac{1}{2}=3$)

따라서 $m=\dfrac{2^6}{k}\cdot 3$에서 $k^2m=2^6\cdot 3k=2^6\cdot 3^3\cdot 7$

$\therefore\ a=6,\ b=3,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=10$

[다른 풀이]

항등식 $(x+1)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i x^i$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$n(x+1)^{n-1}=\sum\limits_{i=1}^{n}i\times{}_n\mathrm{C}_i x^{i-1}$

위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$n\cdot 2^{n-1}=\sum\limits_{i=1}^{n}i\times{}_n\mathrm{C}_i$

$\therefore\ \sum\limits_{i=1}^{6}x\times{}_6\mathrm{C}_x=6\cdot 2^5=3\cdot 2^6$

7) ②

$\dfrac{A(t)}{P(t)}=\dfrac{1}{20}$ 이므로

$2^k=\left\{1+8.3\times\frac{1}{20}\right\}^c=1.415^c$

위 식의 양변에 상용로그를 취하면

$k\times\log 2=c\times\log 1.415$

$\therefore\ k=\frac{\log 1.415}{\log 2}c=\frac{0.15}{0.30}c=\frac{1}{2}c$

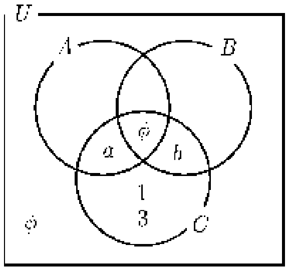
8) ④

조건 (다)에 의해서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

조건 (가), (나)에 맞게 벤다이어그램을 그리면 다음과 같다.



조건 (가)에 의해서

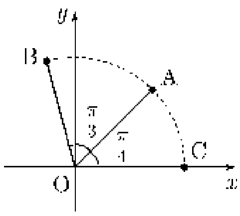
$(A\cup B)^C=C-(A\cup B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$이고

조건 (나)에 의해서

$\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(A|C)+\mathrm{P}(B|C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

9) ⑤



점 $\mathrm{A}(a,b)$라 하면

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b\\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\end{pmatrix}$$

에서 점 B의 좌표는 $\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=-1$ …… ㉠

점 B를 $-\frac{7}{12}\pi=-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$만큼 회전이동시키는 것은 점 A를 $-\frac{\pi}{4}$만큼 회전이동시키는 것과 같으므로

$$\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

에서 점 C의 y좌표는 $-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0$ …… ㉡

㉡에서 $a=b$이고 이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a=-1$에서 $a=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

$\therefore\ ab=a^2=(\sqrt{3}+1)^2=4+2\sqrt{3}$

10) ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ …… ㉠

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$ …… ㉡

㉡을 제곱하여 정리하면 $a^2y^2=b^2x^2$ …… ㉢

㉠에서 $y=\frac{(x_1x-a^2)b^2}{a^2y_1}$이고 이것을 ㉢에 대입하면

$\frac{(x_1x-a^2)^2b^4}{a^2y_1^2}=b^2x^2$

즉, $(b^2x_1^2-a^2y_1^2)x^2-(2a^2b^2x_1)x+a^4b^4=0$ …… ㉣

그런데 (x_1, y_1)은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점이므로

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$에서 $x_1^2b^2+y_1^2a^2=a^2b^2$이므로

㉣은 $x^2-2x_1x+a^2b^2=0$

근과 계수와의 관계에서 위 방정식의 두 근의 합은 $2x_1$으로 일정하다.

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서 그은 접선이 두 점근선과 점 Q, R에서 만날 때, 선분 $\overline{\mathrm{QR}}$의 중점은 점 P가 된다. 즉, $\overline{\mathrm{QR}}=2\overline{\mathrm{PQ}}$

11) ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=(-1)\times(-1)=1$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=(-1)\times 1=-1$

$\therefore\ \lim_{x\to-1}f(x)g(x)$은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=(-1)\times(-1)=1$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=1\times1=1$

$\therefore\ \lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$ (참)

ㄷ. ㄱ에 의해서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

$f(1)g(1)=1\times-1=-1$이고

ㄴ에서 의해서 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)\neq f(1)g(1)$

따라서 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$의 불연속점은 2개다. (참)

12) ④

평면 ABC의 x, y, z절편이 각각 2, 2, 4이므로

평면 ABC의 방정식은 $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$

즉, $2x+2y+z-4=0$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{DH}}$는 점 D에서 평면 $2x+2y+z-4=0$에 이르는 거리이므로
$\overline{\mathrm{DH}}=\dfrac{|2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 4-4|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\dfrac{8}{3}$

13) ③

$\triangle \mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AQ}_n}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\dfrac{1}{2}(n+1)\sqrt{n+1}$

$\triangle \mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\dfrac{1}{2}n\sqrt{n+1}$

이므로

$S_n=\triangle \mathrm{AQ}_n\mathrm{P}_n+\triangle \mathrm{AP}_n\mathrm{R}_n=\dfrac{1}{2}(2n+1)\sqrt{n+1}$

$T_n=\dfrac{1}{2}(n+1)\sqrt{n+1}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n+T_n}{S_n-T_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(3n+2)\sqrt{n+1}}{\frac{1}{2}n\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)=3$

14) ①

$g(x)=e^{-x^2}f(x)$에서
$g'(x)=-2xe^{-x^2}f(x)+e^{-x^2}f'(x)$
ㄱ. $g'(0)=f'(0)$이고
그림에서 $f'(0)>0$이므로 $g'(0)>0$ (참)
ㄴ. 그림에서 $f(a)>0,\ f'(a)=0$ 이므로
$f'(a)+g'(a)=-2ae^{-a^2}f(a)<0$ (거짓)
ㄷ. $f(b)<0,\ f'(b)=0$이므로
$g(b)=e^{-b^2}f(b)<0$
$g'(b)=-2be^{-b^2}f(b)>0$
$\therefore\ g(b)g'(b)<0$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

15) ⑤

사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형은 원래 사각형의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{\frac{1}{2}\square\mathrm{APTS}}{1-\frac{1}{2}}=\square\mathrm{APTS}$

마찬가지 방법으로

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\square\mathrm{PBQT},\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n=\square\mathrm{TQCR},\ \sum_{n=1}^{\infty}d_n=\square\mathrm{STRD}$

그림에서 $\overline{\mathrm{AS}}=\overline{\mathrm{AP}}=1,\ \overline{\mathrm{SD}}=\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{3}$이므로

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n+c_n-d_n)=(1+3)-(\sqrt{3}+\sqrt{3})=4-2\sqrt{3}$
$\therefore\ p=4,\ q=-2$
$\therefore\ p+q=2$

16) ③

ㄱ. 만약 AB의 역행렬이 존재하면 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$이므로
행렬 A와 B의 역행렬이 모두 존재해야한다.
이때, $A^2B^3=O$의 양변의 앞쪽에 $(A^{-1})^2$를 뒤쪽에 $(B^{-1})^3$을 곱하면
좌변은 $(A^{-1})^2A^2B^3(B^{-1})^3=E$
우변은 $(A^{-1})^2O(B^{-1})^3=O$
이 되어 등식이 성립하지 않는다.
따라서 행렬 AB의 역행렬은 존재하지 않는다. (참)
ㄴ. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이라 하면
A의 역행렬은 존재하고
$B^2=O$이므로 $A^2B^3=O$을 만족하지만
$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$로 $AB\neq BA$이다. (거짓)
[참고]
$B\neq O$이고 $B^n=O\ (n\geq 3)$이면
B^{-1}이 존재하지 않으므로 행렬 B는 $B^2=kB$꼴로 나타낼 수 있다. (∵ 케일리해밀턴정리)
이때, $B^n=kB^{n-1}=k^2B^{n-2}=\cdots=k^{n-1}B$이므로 $B^n=O$에서
$k=0$이다.
$\therefore\ B^2=kB=O$이다.
ㄷ. $2A-B=E$이면 $B=2A-E$에서
$AB=A(2A-E)=2A^2-A$
$BA=(2A-E)A=2A^2-E$
이므로 $AB=BA$이다.
$\therefore\ (AB)^{2012}=A^{2012}B^{2012}=A^{2010}(A^2B^3)B^{2009}=O$ (참)
[참고]
행렬 B가 행렬 A에 대한 다항식꼴로 나타내어질 때, $AB=BA$가 성립한다.
예) $B=A^2-A+E$이면
$AB=A(A^2-A+E)=A^3-A^2+A$
$BA=(A^2-A+E)A=A^3-A^2+A$
이므로 $AB=BA$

17) ①

$n^2+n\leq\dfrac{1}{2}n+5$에서
$2n^2+n-10=(2n+5)(n-2)\leq 0$
따라서 $n\leq 2$일 때, $n^2+n\leq\dfrac{1}{2}n+5$가 성립한다.
따라서 $A_n\subset B_n(n=1,\ 2)$이고 $B_n\subset A_n(n=3,\ 4,\ \cdots)$이다.
따라서 $A_n-B_n=\varnothing(n=1,\ 2)$이므로 $a_n=0$이고
$n\geq 3$일 때, $a_n=n(A_n)-n(B_n)=n^2+n-\left[\dfrac{1}{2}n+5\right]$이다.
그런데
n이 짝수일 때, $\left[\dfrac{1}{2}n+5\right]=\dfrac{1}{2}n+5$
n이 홀수일 때, $\left[\dfrac{1}{2}n+5\right]=\dfrac{1}{2}n+5-\dfrac{1}{2}$
이므로

$\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=3}^{20}\left(n^2+n-\left[\dfrac{1}{2}n+5\right]\right)$
$=\sum_{n=3}^{20}(n^2+n)-\sum_{n=3}^{20}\left(\left[\dfrac{1}{2}n+5\right]\right)$

이때, $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$이므로

$\sum_{n=3}^{20}(n^2+n)=\left\{\sum_{n=1}^{20}(n^2+n)-\sum_{n=1}^{2}(n^2+n)\right\}$
$=\dfrac{1}{3}(20\cdot 21\cdot 22-2\cdot 3\cdot 4)$

$= \frac{1}{3}(9240-24)=3072$

이고

$\sum_{n=3}^{20}\left(\left[\frac{1}{2}n+5\right]\right)=\sum_{n=3}^{20}\left(\frac{1}{2}n+5\right)-9\cdot\frac{1}{2}$

($\because$ 3~20까지 자연수 중 홀수는 9개)

$=\left(\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{2}n-\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{2}n\right)+18\times5-9\cdot\frac{1}{2}$

$=\left(105-\frac{3}{2}\right)+90-\frac{9}{2}=189$

이므로 $\sum_{n=1}^{20}a_n=3072-189=2883$

18) ②

$a_{i+1}-a_i=\sum_{k=1}^{i+1}\frac{[\log 3^k]}{k}-\sum_{k=1}^{i}\frac{[\log 3^k]}{k}=\frac{[\log 3^{i+1}]}{i+1}$ 이므로

$b_i=(i+1)(a_{i+1}-a_i)=(i+1)\cdot\frac{[\log 3^{i+1}]}{i+1}=[\log 3^{i+1}]$

$\therefore$ (가)$=[\log 3^{i+1}]$

$\sum_{k=1}^{m}b_k=(m+1)a_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}a_k-a_1$이므로

(나)$=\sum_{k=1}^{m}b_k+a_1=\sum_{k=1}^{m}[\log 3^{k+1}]+[\log 3]$ ($\because$ (가))$=\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]$

$\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]=\sum_{k=1}^{m}[\log 3^{m+1-k}]+[\log 3^{m+1}]$이므로

$\sum_{k=1}^{m}[\log 3^k]+\sum_{k=1}^{m+1}[\log 3^k]=\sum_{k=1}^{m}\left([\log 3^k]-[\log 3^{m+1-k}]\right)+[\log 3^{m+1}]$

$\therefore$ (다) $=[\log 3^{m+1}]$

$\therefore\ f(n)=[\log 3^{n+1}],\ g(n)=\sum_{k=1}^{n+1}[\log 3^k],\ h(n)=[\log 3^{n+1}]$

$\therefore\ f(n)+g(n)-h(n)=\sum_{k=1}^{n+1}[\log 3^k]$

$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ 3^6=729,\ 3^7=2187$이므로

$\sum_{k=1}^{7}[\log 3^k]=0+0+1+1+2+2+3=9$

$\therefore\ n=7-1=6$

19) ⑤

$(1,\ \sqrt{3})+\left(\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\right)$

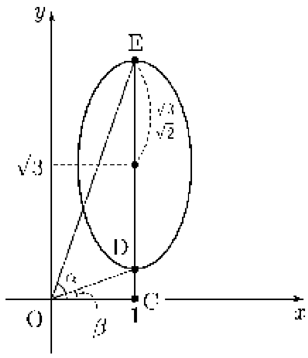
$X=\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta),\ Y=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\theta-\cos\theta)$라 하면

$3X^2+Y^2=\frac{3}{4}(2\sin^2\theta+2\cos^2\theta)=\frac{3}{2}$

즉, $\frac{X^2}{\frac{1}{2}}+\frac{Y^2}{\frac{3}{2}}=1$ …… ㉠

따라서 $(X,\ Y)$는 타원위에 존재한다.

ㄱ. 중점 M은 ㉠을 x축 방향으로 1만큼 y축 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동시킨 것이므로 중점 M이 그리는 도형은 타원이다. (참)



ㄴ. ㄱ에서 점 C$(1,\ 0)$은 장축의 연장선 위에 존재하므로 점 C와 D는 타원의 장축의 양 끝점이다.

$\therefore\ \overline{CD}=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{2}},\ \overline{CE}=\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ \overline{CD}+\overline{CE}=2\sqrt{3}$

ㄷ. $\angle DOC=\theta_1,\ \angle EOC=\theta_2$라 하면 $\overline{OC}=1$이므로

$\tan\theta_1=\overline{CD}=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\tan\theta_2=\overline{CE}=\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\alpha=\theta_1-\theta_2$이므로

$\tan\alpha=\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{2\sqrt{\frac{3}{2}}}{1+\left(3-\frac{3}{2}\right)}=\frac{2}{5}\sqrt{6}$

20) ⑤

$f(x)=\frac{1}{x}\ln x$에서

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

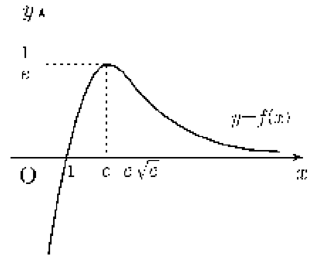
$f''(x)=-\frac{2}{x^3}(1-\ln x)-\frac{1}{x^3}=-\frac{1}{x^3}(3-2\ln x)$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−		
$f''(x)$		−			0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	변곡	↘

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}\ln x=-\infty$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x=0$

이므로 $y=f(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. $y=f(x)$는 $x=e$일 때, 최댓값 $f(e)=\frac{1}{e}$를 갖는다. (참)

ㄴ. $x>e$일 때, $f(x)$는 감소함수이므로

$\frac{1}{2011}\ln 2011>\frac{1}{2012}\ln 2012$

위 부등식을 변형하면

$2012\cdot\ln 2011>2011\cdot\ln 2012$에서

$\ln 2011^{2012}>\ln 2012^{2011}$

$\therefore\ 2011^{2012}>2012^{2011}$ (참)

ㄷ. 열린구간 $(0,\ e)$에서 $f''(x)<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. (참)

21) ④

$y=e^{-x}$위의 점 $(-1,\ e)$에서의 접선의 방정식은 $y'=-e^{-x}$이므로

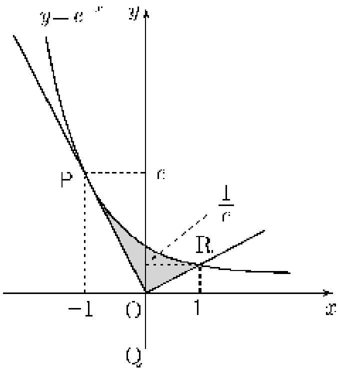
$y=-e(x+1)+e=-ex$이다.

$\therefore\ \mathrm{Q}(0,\ 0)$

따라서 점 Q를 지나고 접선 l에 수직인 직선의 방정식은 $y=\frac{x}{e}$이다.

$\frac{x}{e}=e^{-x}$에서 $x=e^{1-x}$

$x=1$일 때 주어진 등식이 성립하므로 점 Q의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{e}\right)$



위 그림에서 구하는 부피 V는

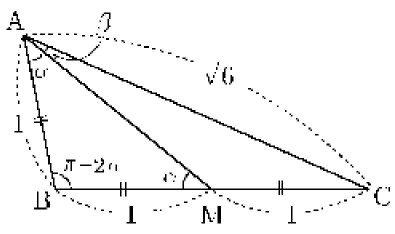
$$V=\pi\int_{-1}^{1}(e^{-x})^2dx-\pi\int_{-1}^{0}(-ex)^2dx-\pi\int_{0}^{1}\left(\frac{x}{e}\right)^2dx$$

$$=\pi\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1}-\left[\frac{e^2}{3}x^3\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3e^2}x^3\right]_{0}^{1}\right\}$$

$$=\pi\left\{\left(-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^2\right)-\frac{e^2}{3}-\frac{1}{3e^2}\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{e^2}{6}-\frac{5}{6e^2}\right)$$

22) ①



$\angle\mathrm{ABM}=\pi-2\alpha$이므로 코사인정리에 의해서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\cos(\pi-2\alpha)}$

$=\sqrt{1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}$ $(\because\ \cos(\pi-2\alpha)=-\cos2\alpha=-\frac{1}{4}$

$=\sqrt{6}$

$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$에서 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4}$

AMC에서 사인법칙을 이용하면 $\angle\mathrm{AMC}=\pi-\alpha$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{MC}}}{\sin\beta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\pi-\alpha)}$

$\therefore\ \sin\beta=\frac{1}{4}$

$\alpha=\beta+\angle\mathrm{ACM}$이므로 $\alpha>\beta$이고 2α가 예각 $(\because\ \cos2\alpha>0)$이므로 α, β도 예각이다.

$\therefore\ \sin2\alpha=\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

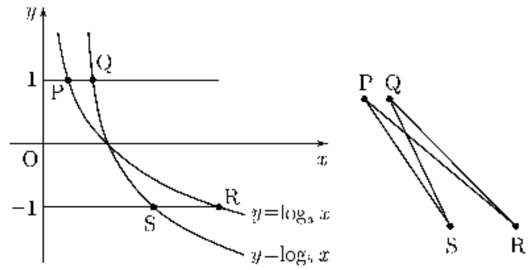
$\therefore\ \cos(2\alpha-\beta)=\cos2\alpha\cos\beta+\sin2\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}$

$\therefore\ 8\cos(2\alpha-\beta)=\sqrt{15}$

23) ②

함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$의 그래프와 직선 $y=1$, $y=-1$를 그려 점 P, Q, R, S를 표시하면 다음과 같다.



위 그림에서 $\overline{\mathrm{PQ}}<\overline{\mathrm{SR}}$이므로 $\gamma<\alpha<\sigma<\beta$

24) ③

$f(x)-g(x)=a^{2x}-a^{x+1}+2$

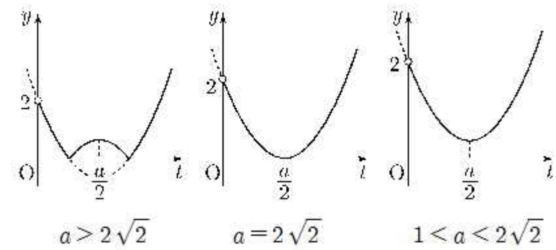
따라서 $a^x=t$라 하면

$f(x)-g(x)=t^2-at+2$

이차방정식 $t^2-at+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8=0$에서 $a=2\sqrt{2}$ $(\because\ a>1)$

$y=t^2-at+2$는 대칭축이 $t=\frac{a}{2}$이고 y절편이 2인 이차함수이므로 a의 크기에 따라서 $y=|t^2-at+2|$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



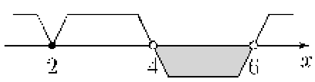
이때, $t=a^x$는 모든 실수에서 임의의 양수로의 일대일대응이고 $x_1<x_2$에 대하여 $t_1<t_2$를 만족한다. …… ㉠

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$일 때, $y=|t^2-at+2|$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 (접하므로)
$y=h(x)$의 그래프도 x축과 한 점에서 만난다. ($\because$ ㉠) (참)
ㄴ. $a=4$일 때,
$t^2-4t+2=0$에서 $t=2\pm\sqrt{2}$이므로
$y=|t^2-at+2|$의 그래프는 $0<t<2-\sqrt{2}$에서 감소하고
$2-\sqrt{2}<t<2$에서 감소한다. …… ㉡
$x<\frac{1}{2}$일 때, $0<t<4^{\frac{1}{2}}=2$이므로 ㉠, ㉡에 의해서 $h(x_1)$, $h(x_2)$의 대소를 비교할 수 없다.
ㄷ. $y=t^2-at+2$의 그래프가 직선 $y=1$과 접할 때, $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나게 된다.
$t^2-at+2=1$에서 $t^2-at+1=0$
위의 방정식은 $a=2$일 때 중근을 가지므로 $a=2$일 때,
$y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나게 된다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

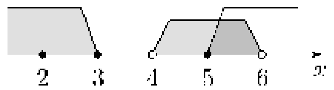
25) 15
수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_{10}-a_1=9d=27$
$\therefore\ d=3$
$S_{10}=a_{10}=S_{10}-S_9$에서 $S_9=0$
따라서 $a_1+a_9=2a_5=0$에서 $a_5=0$
$\therefore\ S_{10}=a_{10}=a_5+5d=15$
[다른 풀이]
$S_9=\frac{9}{2}(2a_1+8d)=0$에서 $a_1=-4d=-12$
$\therefore\ S_{10}=a_{10}=a_1+9d=15$

26) 145
$\sum_{k=1}^{5}x_k=X$, $\sum_{k=6}^{10}x_k=Y$라 하면
X, Y가 음이 아닌 정수이므로
$2X+3Y=8$에서 $(X,\ Y)=(1,\ 2)$, $(4,\ 0)$
ⅰ) $(X,\ Y)=(1,\ 2)$을 만족하는 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$을 정하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{H}_1\times{}_5\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2=75$
ⅱ) $(X,\ Y)=(4,\ 0)$을 만족하는 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{10})$을 정하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{H}_4\times{}_5\mathrm{H}_0={}_8\mathrm{C}_4=70$
ⅰ), ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $75+70=145$

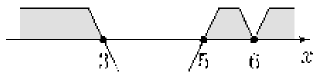
27) 140
$\frac{(x-2)^2}{(x-4)(x-6)}\le 0$
$\Leftrightarrow\ (x-2)^2(x-4)(x-6)\le 0,\ x\ne 4,\ x\ne 6$
$\Leftrightarrow\ x=2$또는 $4<x<6$
$\therefore\ A=\{x\,|\,x=2$또는 $4<x<6\}$



조건(가)에서 $A\cap B=\{2\}\cup\{x|5\le x<6\}$
조건(나)에서 $A^C\cap B^C=\{x|3<x\le 4\}$ 즉, $A\cup B=\{x|x\le 3$또는 $x>4\}$
이므로 $B=\{x|\,x\le 3$또는 $x\ge 5\}$이어야 한다.



그런데 $B=\{x|\,(x-6)f(x)\ge 0\}$이므로 $f(x)$는 $x-3$, $x-5$를 인수로 갖는다.
또한, $f(x)$가 $x-6$이라는 인수를 갖지 않으면 $x=6$을 기준으로 $(x-6)f(x)$의 부호가 바뀌게 되므로 $f(x)$는 $x-6$을 인수로 갖는다.
문제에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이라고 했으므로 결국 $f(x)=(x-3)(x-5)(x-6)$이다.



$\therefore\ f(10)=7\cdot 5\cdot 4=140$

28) 60
$x^2+y^2-2x-4y-11=0\ \Leftrightarrow\ (x-1)^2+(y-2)^2=4^2$
직선 $y=2x$는 원의 중심 $(1,\ 2)$를 지나므로 선분 PQ는 원의 지름이 된다.
따라서 $\angle\mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$
$\therefore\ A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}$
$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\sin\alpha\cos\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha & 1\end{pmatrix}$이므로
$8A^2=4A+7E$에서
$\begin{pmatrix}8 & 16\sin\alpha\cos\alpha\\ 16\sin\alpha\cos\alpha & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\sin\alpha+7 & 4\cos\alpha\\ 4\cos\alpha & 4\sin\alpha+7\end{pmatrix}$
$4\sin\alpha+7=8$에서 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\cos\alpha=8\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=2\sqrt{15}$
$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}\sin\alpha=8\cdot\frac{1}{4}=2$
$\therefore\ S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PR}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}=2\sqrt{15}$
$\therefore\ S^2=(2\sqrt{15})^2=60$
[다른 풀이]
$8A^2=4A+7E$ 즉, $A^2-\frac{1}{2}A-\frac{7}{8}E=O$를 만족하는 $A=kE$꼴의 이차정사각행렬은 존재하지 않으므로 $A^2-\frac{1}{2}A-\frac{7}{8}E=O$는 행렬 A의 케일리해밀턴정리에 의해 유도된 다항식과 일치한다. 따라서
$2\sin\alpha=\frac{1}{2}$에서 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$

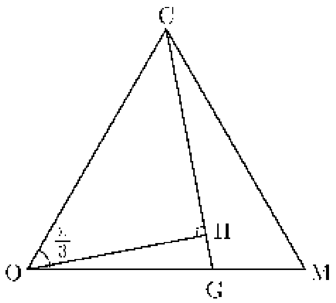
29) 16
$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{a_n}{2+a_n}$에서 $a_n=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{n}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$이고
$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{b_n}{2-b_n}$에서 $b_n=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$이므로
$a_n+b_n=\dfrac{4\sin\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$, $a_n-b_n=\dfrac{4\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

$n\to\infty$일 때, $\frac{\pi}{n}\to+0$이므로 $\frac{\pi}{n}=\theta$라 하면

$$\frac{1}{\pi^3}\lim_{n\to\infty}n^3(a_n+b_n)(a_n-b_n)$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{4\sin^3\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}16\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos^4\theta}$$
$$=16$$

30) 20

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M이라 하면 △OAB, △CAB가 합동인 정삼각형이므로
$\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{CM}}$이고 $\overline{\mathrm{OM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CM}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로
∠OMC의 크기는 평면 OAB와 CAB가 이루는 이면각의 크기 $\frac{\pi}{3}$이다.
따라서 △OCM은 정삼각형이다.



$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OM}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{OG}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}a$

$\angle\mathrm{COM}=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}a\cdot a\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}a^2$

그림에서 H는 $\overline{\mathrm{CG}}$의 내분점이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$를 만족하는 t $(0<t<1)$가 존재한다.
이때, $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{CG}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}=0$이다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$=\left(t\overrightarrow{\mathrm{OG}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$=t|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2+(1-2t)\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$
$$=\frac{4}{9}a^2t+(1-2t)\frac{1}{3}a^2-(1-t)a^2=0$$

$\frac{7}{9}t=\frac{2}{3}$에서 $t=\frac{6}{7}$

그런데 G는 삼각형 OAB의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$$

$$\therefore\ p=\frac{2}{7},\ q=\frac{2}{7},\ r=\frac{1}{7}$$

$$\therefore\ 28(p+q+r)=28\times\frac{5}{7}=20$$