2011학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형 | 성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n-1}{a_n-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=0.4,\ \mathrm{P}(B)=0.5,\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.8$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C|B)+\mathrm{P}(A|B^C)$의 값은? [2점]

① 1.1 ② 1.2 ③ 1.3 ④ 1.4 ⑤ 1.5

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$에 대하여 $A^3=A$, $A^4=E$가 성립할 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, E는 단위행렬이다.) [2점]

① -5 ② -3 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

4. $10^{0.76}$의 정수부분은? (단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

5. n이 자연수일 때, 집합 A_n을

$$A_n = \{x \mid x^n = 2011,\ x\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 A_n의 원소의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{2011}(-1)^n f(n)$의 값은? [3점]

① 502 ② 1004 ③ 1005 ④ 2010 ⑤ 2011

6. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 256,\quad \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} = 4$$

가 성립할 때, $a_1 a_{10}$의 값은? [3점]

① 64 ② $32\sqrt{2}$ ③ 32 ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ 16

7. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

$$a_{n+1} = a_n + 2(n-1)\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$a_{10} = 100$일 때, a_1의 값은? [3점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

8. 함수 $y = f(x)$의 그래프는 지수함수 $y = a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이다. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이고, 모든 자연수 n에 대하여 점 (n, a_n)은 함수 $y = f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① $-\log_3 2$ ② $1-\log_3 2$ ③ $2-\log_3 2$
④ $3-\log_3 2$ ⑤ $4-\log_3 2$

9. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$2^{4x} + a \cdot 2^{2x-1} + 10 > \frac{3}{4}a$$

를 만족시키는 자연수 a의 최댓값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

10. 두 사격선수 A, B가 한 번의 사격에서 10점을 얻을 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$라고 한다. 두 선수가 임의로 순서를 정하여 각각 한 번씩 사격하였더니 먼저 사격한 선수만 10점을 얻었다고 한다. 이때, 먼저 사격한 선수가 A이었을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{17}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{9}{13}$

11. 어느 지역에서 사관학교에 지원한 학생들을 대상으로 안경 착용 여부를 조사하였더니 그 결과가 다음 표와 같았다.

	남학생	여학생
안경을 쓴 학생	n명	100명
안경을 안 쓴 학생	180명	$(n+30)$명

이 학생들 중에서 임의로 한 명을 선택할 때, 그 학생이 남학생일 사건을 A, 안경을 쓴 학생일 사건을 B라 하자. 두 사건 A, B가 서로 독립일 때, 자연수 n의 값은? [3점]

① 80 ② 100 ③ 120 ④ 150 ⑤ 180

12. 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X와 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 58) = \mathrm{P}(Z \geq -1)$
(나) $\mathrm{P}(X \leq 55) = \mathrm{P}(Z \geq 2)$

$m+\sigma$의 값은? [3점]

① 62 ② 63 ③ 64 ④ 65 ⑤ 66

13. 어떤 기계 장치는 작동하기 시작한 순간부터 시간이 지남에 따라 그 정확도가 점점 떨어진다고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 t 시간이 되는 순간의 정확도를 $I(\%)$라 하면 관계식

$$I = a\log(t+7)+b \ (a, b\text{는 상수, } 0 \leq t \leq 200)$$

가 성립한다고 한다. 처음 이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도는 100이며, 작동하기 시작하여 28시간이 되는 순간의 정확도는 79라고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 63시간이 되는 순간의 정확도는? (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 55 ② 60 ③ 65 ④ 70 ⑤ 75

14. 양수 a에 대하여 $\log a$의 가수를 $g(a)$라 하자. 두 함수 $y = g(3|x|+1)$, $y = mx+1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

15. 다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1\cdot 2}{n+1}+\frac{2\cdot 3}{n+2}+\frac{3\cdot 4}{n+3}+\cdots+\frac{n(n+1)}{n+n} < \frac{(n+1)^2}{4} \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

부등식 (*)의 좌변을 S_n이라 하자

(i) $n=2$일 때, (좌변) $= S_2 = \boxed{(가)}$,

(우변)$=\frac{9}{4}$이므로 (*)은 성립한다.

(ii) $n=m$ ($m=2, 3, 4, \cdots$)일 때 (*)이 성립한다고 가정하자.

$$S_m = \frac{1\cdot 2}{m+1}+\frac{2\cdot 3}{m+2}+\frac{3\cdot 4}{m+3}+\cdots+\frac{m(m+1)}{m+m}$$

이고,

$$S_{m+1} = \frac{1\cdot 2}{(m+1)+1}+\frac{2\cdot 3}{(m+1)+2}+\cdots+\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)+m+1}$$

이므로

$$S_{m+1}-S_m = -2\left(\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\frac{3}{m+3}+\cdots+\frac{m}{2m}\right)+\boxed{(나)}+\frac{m+2}{2}$$

한편, $\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\cdots+\frac{m}{2m}$

$$> \frac{1}{m+m}+\frac{2}{m+m}+\cdots+\frac{m}{2m} = \boxed{(다)}$$

이고

$\boxed{(나)} < \frac{2m+1}{4}$이므로 $S_{m+1}-S_m < \frac{2m+3}{4}$이다.

따라서 $S_{m+1} < S_m + \frac{2m+3}{4} < \frac{(m+2)^2}{4}$이므로

(*)은 $n=m+1$일 때도 성립한다.

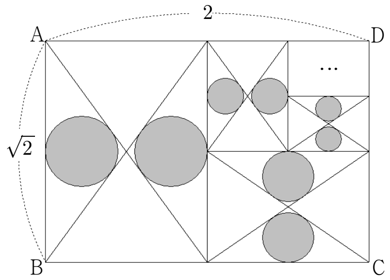
그러므로 (i), (ii)에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $af(3)g(3)$의 값은? [3점]

① $\frac{13}{7}$ ② $\frac{20}{7}$ ③ $\frac{26}{7}$ ④ $\frac{33}{7}$ ⑤ $\frac{39}{7}$

16. 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD에서 다음 [단계]와 같은 순서로 도형을 만들어 나간다.

> [단계 1] 직사각형 ABCD의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_1이라 하자.
>
> [단계 2] [단계 1]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.
>
> [단계 3] [단계 2]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.
>
> ⋮



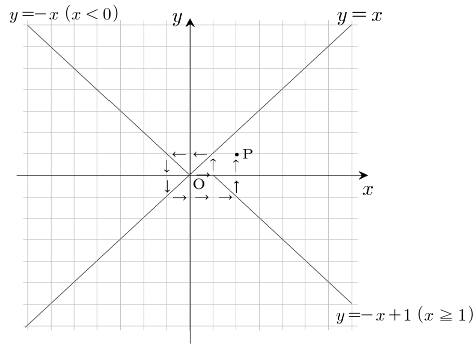
이와 같은 과정을 계속하여 [단계 n]에서 그려진 두 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(5-2\sqrt{6})$　② $2\pi(3-\sqrt{6})$　③ $2\pi(5-\sqrt{6})$
④ $4\pi(3-\sqrt{6})$　⑤ $4\pi(5-\sqrt{6})$

17. 좌표평면 위를 움직이는 점 P는 다음과 같은 규칙으로 x축 또는 y축과 평행한 방향으로 이동 한다.

> (가) 1회 이동거리는 1이고, 처음에는 원점을 출발하여 점 $(1, 0)$으로 이동한다.
>
> (나) 점 P가 반직선 $y=-x+1\ (x \geq 1)$ 위의 점에 도착하면 y축의 양의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x\ (x>0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 음의 방향으로 이동한다.
>
> (다) 점 P가 반직선 $y=-x\ (x<0)$ 위의 점에 도착하면 y축의 음의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x\ (x<0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 양의 방향으로 이동한다.

예를 들어, 그림과 같이 점 P가 원점을 출발하여 11회 이동하면 점 $(2, 1)$에 도착한다.



점 P가 원점을 출발하여 k회 이동하면 점 $(0, 10)$에 도착한다. k의 값은? (단, 각각의 반직선에 도착하기 전에는 진행방향을 바꾸지 않는다.) [4점]

① 350　② 360　③ 370　④ 380　⑤ 390

18. 사과 3개와 복숭아 2개가 있다. 이 5개의 과일 중에서 임의로 4개의 과일을 택하여 네 명의 학생에게 각각 하나씩 나누어 주었다. 남아있는 1개의 과일을 네 명의 학생 중 임의의 한 명에게 주었을 때, 이 학생이 가진 2개의 과일이 같은 종류일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

19. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$로의 함수 중에서 다음 세 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.
(나) 합성함수 $f \circ f$가 정의된다.
(다) $(f \circ f)(1) = 1$이다.

① 24 ② 30 ③ 36 ④ 42 ⑤ 48

20. 세 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $0 < a_n < b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{{b_n}^2} = 0$이다.
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 발산하고 수열 $\{a_n b_n\}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.
ㄷ. $a_n < b_n < c_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$이고 $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty}(n-1)c_n = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} n b_n = 1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합 M을 다음과 같이 정의하자.

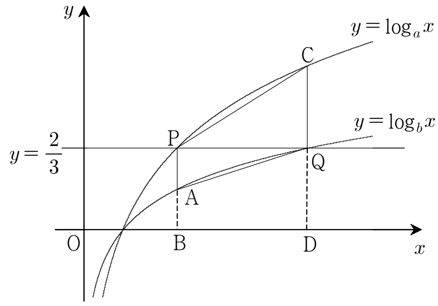
$$M=\{A \mid A^2=A\}$$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

ㄱ. $X^2 \in M$이면 $X \in M$이다.
ㄴ. $X \in M$이면 $E-X \in M$이다.
ㄷ. $X \in M$, $Y \in M$이고 $XY=-YX$이면 모든 자연수 m, n에 대하여 $X^m+Y^n \in M$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

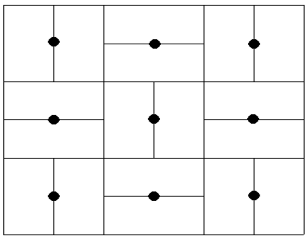
22. 그림과 같이 직선 $y=\frac{2}{3}$가 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 x축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.



$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이고, 사각형 PAQC의 넓이가 1일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $1<a<b$이다.) [4점]

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

23. 그림과 같이 직사각형 모양으로 이루어진 도로망이 있고, 이 도로망의 9개의 지점에 ●이 표시되어 있다.



A지점에서 B지점까지 가는 최단경로 중에서 ●이 표시된 9개의 지점 중 오직 한 지점만을 지나는 경로의 수는? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

24. 어느 선박 부품 공장에서 만드는 부품의 길이 X는 평균이 100, 표준편차가 0.6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 만든 부품 중에서 9개를 임의추출한 표본의 길이의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$와 모평균의 차가 일정한 값 c 이상이면 부품의 제조과정에 대한 전면적인 조사를 하기로 하였다. 부품의 제조 과정에 대한 전면적인 조사를 하게 될 확률이 5% 이하가 되도록 상수 c의 값을 정할 때, c의 최솟값은? (단, 단위는 mm이고, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.65	0.450
1.96	0.475
2.58	0.495

① 0.196 ② 0.258 ③ 0.330 ④ 0.392 ⑤ 0.475

25. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} -b & a-5 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ -2y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 점 (a, b)가 나타내는 도형의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 두 수 n, α가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) n은 자연수이고, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 이다.
(나) $\log_4 n = 1 - \alpha$

등식 $\log_2 m^2 = n + \alpha$를 만족시키는 실수 m에 대하여 $3m^4$의 값을 구하시오. [3점]

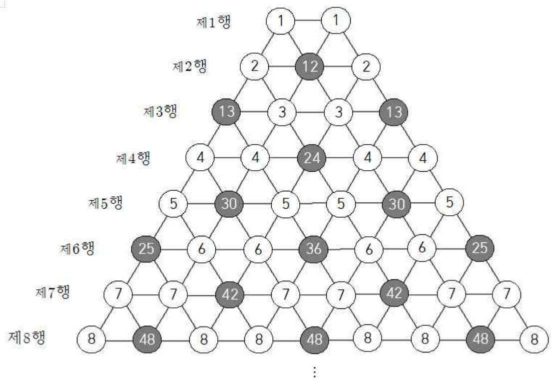
27. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$의 서로 다른 두 원소를 a, b라 하고, 집합 $B = \{6, 7, 8, 9\}$의 서로 다른 두 원소를 c, d라 하자. 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 네 수의 곱 $abcd$가 짝수인 것의 개수를 구하시오. [3점]

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 그림과 같이 정삼각형을 붙여서 만든 도형 위에 흰색과 검은색의 바둑돌을 정삼각형의 각 꼭짓점 위에 나열하는데, 제 n 행에는 $(n+1)$ 개의 돌을 다음과 같은 규칙으로 나열한다. $(n=1, 2, 3, \cdots)$

> (가) 제 1 행에는 모두 흰색의 바둑돌을 나열한다.
> (나) 제 $(3n-1)$ 행에는 맨 왼쪽부터 흰색, 검은색, 흰색의 바둑돌 3 개를 n 회 반복하여 나열한다.
> (다) 제 $3n$ 행에는 맨 왼쪽에 검은색의 바둑돌을 1 개 놓은 다음 그 오른쪽으로 흰색, 흰색, 검은색의 바둑돌 3 개를 n 회 반복하여 나열한다.
> (라) 제 $(3n+1)$ 행에는 맨 왼쪽에 흰색의 바둑돌을 2 개 나열한 다음 그 오른쪽으로 검은색, 흰색, 흰색의 바둑돌 3 개를 n 회 반복하여 나열한다.

위의 규칙대로 바둑돌을 나열한 다음 제 n 행에 놓인 흰색의 바둑돌에는 n 을 적고, 각 행에 놓인 검은색의 바둑돌에는 그 돌과 가장 가까운 4 개 또는 6 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합을 적는다. 이때, 198 이 적힌 바둑돌의 개수를 구하시오. [4점]



30. 주머니 속에 빨간 공 5 개, 파란 공 5 개가 들어있다. 이 주머니에서 5 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중에서 더 많은 색의 공의 개수를 확률변수 X 라 하자. 예를 들어 꺼낸 공이 빨간 공 2 개, 파란 공 3 개이면 $X=3$ 이다. $Y=14X+14$ 라 할 때 확률변수 Y 의 평균을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2011년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=7$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n-1}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}+3-\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n}}=\frac{2\cdot 3+3}{3}=3$

2) ④

$\mathrm{P}(A^C|B)+\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$

3) ②

$A^3=A$ 의 좌우변에 행렬 A 를 곱하면

$A^4=A^2$ ……㉠

준식에서 $A^4=E$ 이 성립하므로 $A^2=E$ 이다.

$A^2=\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-2 & -2a-2b \\ a+b & -2+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore\ a^2=3,\ b^2=3,\ a+b=0$

따라서 곱셈변형공식에 의해서 $ab=-3$

4) ①

$\log 10^{0.76}=0.76$

$\log 5=0.6990<0.76<\log 6=0.7781$이므로 정수부분은 5이다.

5) ②

n 이 홀수이면 $f(n)=1$, n 이 짝수이면 $f(n)=2$ 이므로

$\sum_{n=1}^{2011}(-1)^n f(n)=-(1\times 1006)+(2\times 1005)=1004$

6) ①

등비수열 $a_n=ar^{n-1}$ 에 대하여 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$

$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=256$ 이고,

$\frac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{r^{10}}\right)}{1-\frac{1}{r}}=4$, $\frac{1}{a^2r^9}\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=4$, $\frac{1}{a^2r^9}256=4$, $a^2r^9=64$

$\therefore\ a_1a_{10}=a\cdot ar^9=a^2r^9=64$

7) ②

$a_{n+1}-a_n=2n-2$

계차수열 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k-2$

$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}2k-2=a_1+2\times\frac{9(9+1)}{2}-2\times 9$

$=a_1+9(9+1)-18$

$=a_1+72=100$

$\therefore\ a_1=28$

8) ⑤

지수함수 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨

함수식은 $y=a^{x-b}$ ……㉠

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n=2\times 3^{n-1}$

(n, a_n)점이 ㉠식 위의 점이므로 함수식을 만족한다.

즉, $a^{n-b}=2\times 3^{n-1}$이 성립한다.

이때 $a=3$ 이어야 한다. ……㉡ (참고※)

대입하면, $3^{n-b}=2\times 3^{n-1}$에서

좌우변에 3^{n-1} 을 나누면 $3^{-b+1}=2$

이 성립하고 로그의 정의에 의해서 $-b+1=\log_3 2$

$\therefore\ b=1-\log_3 2$ ……㉢

㉡, ㉢ 에서

$a+b=4-\log_3 2$

9) ②

$2^{2x}=t\ (>0)$ 이라하면 부등식 $2^{4x}+a\cdot 2^{2x-1}+10>\frac{3}{4}a$ 은

$t^2+\frac{a}{2}t+10-\frac{3}{4}a>0$ 이고 $t>0$ 인 모든 실수에 대하여 부등식이 성립하면 된다.

$f(t)=t^2+\frac{a}{2}t+10-\frac{3}{4}a$ 라 하면 대칭축이 $t=-\frac{a}{4}$ 로 음수이므로

$f(0)\geq 0$ 이면 부등식이 성립하므로

$10-\frac{3}{4}a\geq 0$ $\quad\therefore a\leq\frac{40}{3}$

그러므로 조건에 만족하는 자연수a 의 최댓값은 13 이다.

10) ③

먼저 사격한 선수만 10점을 얻는 사건을 C,

먼저 사격한 선수가 A인 사건을 A라 하면,

$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$ 를 구하는 문제이다.

$P(C)=(A\text{먼저},10\text{점 득점})+(B\text{먼저},10\text{점 득점})$

$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

$P(A\cap C)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{12}$

$\therefore P(A|C)=\frac{3}{5}$

11) ③

	남학생	여학생	
안경을 쓴 학생	n명	100명	$n+100$
안경을 안 쓴 학생	180명	$(n+30)$명	$n+210$
	$n+180$	$n+130$	$2n+310$

두 사건 A, B 가 독립이므로, $P(A)=P(A|B)$

$\frac{n+180}{2n+310}=\frac{n}{n+100}$, $(n+180)(n+100)=n(2n+310)$,

$n^2+30n-18000=0$, $(n+150)(n-120)=0$

$\therefore\ n=120$

12) ③

$\mathrm{P}(X\geq 58)=\mathrm{P}(Z\geq -1)$에서

$\frac{58-m}{\sigma}=-1 \Rightarrow m-\sigma=58$ … ①

$P(X \leq 55)=P(Z \geq 2)$에서

$\frac{55-m}{\sigma}=-2 \Rightarrow m-2\sigma=55$ … ②

①, ② 두 식을 연립해서 풀면 $m=61$ $\sigma=3$

$\therefore m+\sigma=64$

13) ④

$I=a\log(t+7)+b$

처음 이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도는 100에서

경과시간 $t=0$에 대응되는 정확도 $I=100$이므로

$100=a\log(0+7)+b$ ……㉠

작동하기 시작하여 28시간이 되는 순간의 정확도는 79에서

경과시간 $t=28$에 대응되는 정확도 $I=79$이므로

$79=a\log(28+7)+b$……㉡

㉡－㉠을 변변 정리하면

$-21=a\log5=a(1-\log2)=a(0.7)$

$\therefore a=-30$ ($\because \log2=0.3$)

㉠ 식에 대입해서 b의 값을 정리하면

$100=a\log(0+7)+b$ 에서

$\therefore b=100+30\log7$

63시간이 되는 순간의 정확도를 x라 두면

$x=a\log(63+7)+b$ ……㉢

이 성립한다. 위에서 얻은 a, b의 값을 ㉢식에 대입하면

$x=-30\log70+100+30\log7=100-30=70$

14) ②

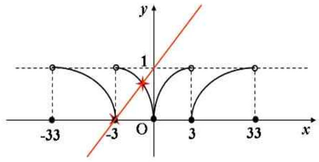
$3|x|+1 \geq 1$이므로 $\log(3|x|+1) \geq 0$ 이다.

$0 \leq \log(3|x|+1) < 1 \Rightarrow 1 \leq 3|x|+1 < 10,\ 0 \leq |x| < 3$

$1 \leq \log(3|x|+1) < 2 \Rightarrow 1 \leq 3|x|+1 < 10,\ 3 \leq |x| < 33$

⋮

의 소수부분을 그래프로 나타내면 그림과 같다.



그러므로 $y=mx+1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때,

실수 m의 최댓값은 $(-3, 0)$을 지날 때이므로 $m=\frac{1}{3}$ 이다.

15) ③

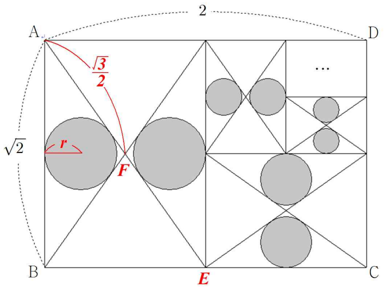
(가) $\frac{1 \cdot 2}{2+1}+\frac{2 \cdot 3}{2+2}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}=a$

(나) $\frac{m(m+1)}{2m+1}=f(m)$

(다) $\frac{1+2+\cdots+m}{2m}=\frac{m+1}{4}=g(m)$

$\therefore\ a \times f(3) \times g(3)=\frac{13}{6}\times\frac{3\times4}{7}\times\frac{4}{4}=\frac{26}{7}$

16) ①



대각선 $\overline{AE}=\sqrt{3}$이고, 삼각형 ABF의 넓이는

$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{\sqrt{6}+2}=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$

그리면, $S_1=2\cdot\pi r^2=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2=\pi(5-2\sqrt{6})$

그리고, 직사각형들의 닮음비가 $\sqrt{2}$: 1이므로, 원의 반지름의 비도

r_n ; $r_{n+1}=\sqrt{2}$: 1

따라서, 넓이비 S_n : $S_{n+1}=2$: 1

$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{1-\frac{1}{2}}=2\pi(5-2\sqrt{6})$

17) ⑤

$(0,1)$: 3

$(0,2)$: $3+11$

$(0,3)$: $3+11+19$

⋮

$(0,10)$: $3+11+19+\cdots+75=390$

18) ④

5개의 과일을 4사람에게 나누어 주려면 먼저 4개의 과일 꾸러미로 분할을 한다.

2개, 1개, 1개, 1개 로 먼저 분할하는 방법은

${}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{3!}$

다시 4 사람에게 분배하는 방법은 ${}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{3!}\times4!$

2개를 받은 학생이 같은 종류의 과일을 받을 수 있는 경우의 수는

㉠ 과일 2개를 받은 학생의 경우 수: 4가지(학생 4명)

㉡ 과일의 종류: 사과로써 같을 때, 복숭아로써 같을 때

㉢ ㉠, ㉡ 이 결정될 때 나머지 3개의 과일이 나머지 3 학생에게 나누어 줄 수 있는 경우 수:3!

에서 2개를 받은 학생이 같은 종류의 과일을 받을 수 있는 경우의 수

: $4\times{}_3C_2\times3!+4\times{}_2C_2\times3!$

($\because$ 사과 2개가 한 학생에게 분배되는 모든 경우:$4\times{}_3C_2\times3!$

복숭아 2개가 한 학생에게 분배되는 모든 경우:$4\times{}_2C_2\times3!$)

따라서 확률은 $\frac{4\times{}_3C_2\times3!+4\times{}_2C_2\times3!}{{}_5C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{3!}\times4!}=\frac{2}{5}$

19) ⑤

합성 함수 $f\circ f$가 정의되기 위해서는 $f(x)$의 함숫값으로 6, 7은

선택될 수 없다. 그러므로
(1) $f(1)=1$ 이면 $f(f(1))=f(1)=1$ 이므로 나머지 x 의 $2,3,4,5$ 의 원소가 일대일 대응하면 되므로 $4!=24$ 가지
(2) $f(1)=2$ 이면 $f(f(1))=f(2)=1$ 로 서로 크로스로 연결되고 나머지 수가 일대일 대응하면 되므로 $3!=6$ 가지이다.
(3) $f(1)=3$, $f(1)=4, f(1)=5$ 일 때도 (2)와 마찬가지이므로
(1), (2), (3)에 의하여 $24+4\times6=48$ 가지

20) ④
ㄱ. $0<a_n<b_n$ 이고, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{{b_n}^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}\times\dfrac{a_n}{b_n}=0\times0=0$ (참)

ㄴ. $\{a_n\};1,0,1,0,1,0,\ldots$ 이고 $\{b_n\};0,1,0,1,0,1,\ldots$ 이면 수열 $\{a_n\}$은 발산하고 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴하지만 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 은 발산한다. (거짓)
ㄷ. $a_n<b_n<c_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 에서
$n\times a_n<n\times b_n<n\times c_n$

$\dfrac{n}{n+1}\times(n+1)a_n<n\times b_n<\dfrac{n}{n-1}\times(n-1)c_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}(n+1)a_n\le nb_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}(n-1)c_n$

$1\le nb_n\le1$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}nb_n=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21) ⑤
ㄱ. (반례) $X=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$라 하면 $X^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$X^4=X^2$ 이므로, $X^2\in M$ 이지만, $X^2\neq X$ 이므로, $X\not\in M$ 이다. (거짓)
ㄴ. $X\in M$ 이므로, $X^2=X$
$(E-X)^2=E-2X+X^2=E-2X+X=E-X$
$\therefore\ E-X\in M$ (참)
ㄷ. $X\in M$, $Y\in M$ 이면 $X^2=X$, $Y^2=Y$
$XY=-YX$ 이면 $X^mY^n=-Y^nX^m$ 이므로,
$(X^m+Y^n)^2=(X^2)^m+(Y^2)^n+X^mY^n+Y^nX^m=X^m+Y^n$
$\therefore\ X^m+Y^n\in M$ (참)

22) ③
$\log_ax:\log_bx=2:1\qquad\therefore b=a^2$

$\square PAQC=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\times\overline{BD}=1$, $\overline{BD}=2$

$a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=2$, $a^{\frac{2}{3}}=2\qquad\therefore ab=a^3=2^{\frac{9}{2}}=16\sqrt{2}$

23) ①
좌상/우하를 지나는 경우 $\dfrac{4!}{2!2!}$ 가지씩

중상/중하를 지나는 경우 $\dfrac{3!}{2!}$ 가지씩

좌중/우중를 지나는 경우 $\dfrac{3!}{2!}$ 가지씩

좌하/우상을 지나는 경우 1가지씩
중앙점을 지나는 경우 $2\times2=4$ 가지

따라서 $\dfrac{4!}{2!2!}\times2+\dfrac{3!}{2!}\times4+1\times2+4=30$ 가지

24) ④
신뢰도 95%일 때의 최대 오차를 구하는 것이므로
$1.96\times\dfrac{0.6}{\sqrt{9}}=0.392$

25) 16
이항하여 정리하면
$\begin{cases}(b+1)x+(8-a)y=0\\ax+(b+1)y=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}b+1&8-a\\a&b+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}b+1&8-a\\a&b+1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(b+1)^2-a(8-a)=0$
$(a-4)^2+(b+1)^2=16$
$\therefore S=\pi\cdot4^2=16\pi\ \rightarrow\ \dfrac{S}{\pi}=16$

26) 256
$\dfrac{1}{2}<1-\alpha<1$, $\dfrac{1}{2}<\log_4n<1$, $2<n<4$
$\therefore\ n=3$
그러면, $\log_43=1-\alpha$, $\alpha=1-\log_43$
$\therefore\ \alpha=\log_4\dfrac{4}{3}$

따라서, $\log_2m^2=3+\log_4\dfrac{4}{3}$, $\log_4m^4=\log_4\dfrac{4^4}{3}$, $m^4=\dfrac{4^4}{3}$

$\therefore\ 3m^4=4^4=256$

27) 228
a,b,c,d 네 개 모두 홀수가 되는 경우의 수를 전체의 경우의 수에서 뺀다.
${}_5C_2\times2!\times{}_4C_2\times2!$: 전체 경우의 수
${}_3C_2\times2!\times{}_2C_2\times2!$: a,b,c,d 네 개 모두 홀수가 되는 경우의 수
${}_5C_2\times2!\times{}_4C_2\times2!-{}_3C_2\times2!\times{}_2C_2\times2!$
$=10\times2\times6\times2-3\times2\times1\times2=240-12=228$

28) 11
$\dfrac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{(n+2)}{n(n+1)(n+2)}+\dfrac{(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{n(n+2)}=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=1+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$

$\therefore\ p+q=11$

29) 142
198행의 흰 돌에는 198이 적혀 있으므로 그 수를 구하면 132개다.
n행의 검은 돌에 198이 적혀있다면 주변의 4개 또는 6개 돌의 숫자의 합이다.

4개 숫자의 합이라면 $n-1+n+2(n+1)=198$이므로
만족하는 자연수 n이 존재하지 않는다.
6개 숫자의 합이라면 $2(n-1)+2n+2(n+1)=198$이므로 $n=33$이다.
33행에는 검은 돌이 12개 있고 양 끝의 검은 돌을 제외하면 가능한 경우는 10개다.
따라서 198이 적혀 있는 돌의 개수는 $132+10=142$개다.

30) 59

X	3	4	5	계
$P(X)$	$\frac{100}{126}$	$\frac{25}{126}$	$\frac{1}{126}$	1

$P(X=3)=\dfrac{{}_5C_3\times{}_5C_2\times 2}{{}_{10}C_5}=\dfrac{50}{63}$

$P(X=4)=\dfrac{{}_5C_4\times{}_5C_1\times 2}{{}_{10}C_5}=\dfrac{25}{126}$

$P(X=5)=\dfrac{{}_5C_5\times 2}{{}_{10}C_5}=\dfrac{1}{126}$

X의 평균 $=E(X)=\dfrac{300+100+5}{126}=\dfrac{405}{126}=\dfrac{45}{14}$

$E(Y)=14E(X)+14=14\times\dfrac{45}{14}+14=45+14=59$