2011학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=7$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n-1}{a_n-1}$의 값은? [2점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

2. 두 사건 A, B에 대하여

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(B)=0.5$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.8$

일 때, $\mathrm{P}(A^C|B)+\mathrm{P}(A|B^C)$의 값은? [2점]

① 1.1　② 1.2　③ 1.3　④ 1.4　⑤ 1.5

3. 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}+\vec{b}|=7$을 만족시킬 때, $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$의 값은? [2점]

① -1　② -3　③ -5　④ -7　⑤ -9

4. $10^{0.76}$의 정수부분은? (단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.) [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

5. 무리방정식 $2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}=1+\sqrt{3}$의 두 실근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

6. 부등식 $\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{4^x+2^x+1}\le\frac{8}{8^x-1}$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

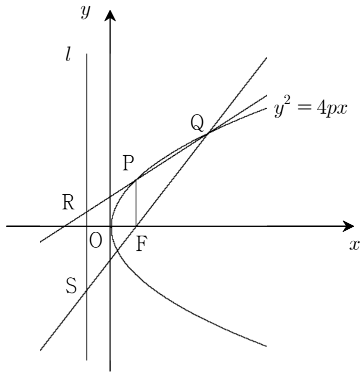
7. 좌표평면에서 직선 $y=mx+8$이 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

8. 함수 $f(x)=\frac{x^3}{9}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{1}{n}$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{33}{4}$

9. 좌표평면에서 포물선 $y^2=4px$ $(p>0)$의 초점을 F, 준선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선과 포물선이 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 또, 제1사분면에 있는 포물선 위의 점 Q에 대하여 두 직선 QP, QF가 준선 l과 만나는 점을 각각 R, S라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{QF}}=2:5$일 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}$의 값은? [3점]



① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

10. 두 사격선수 A, B가 한 번의 사격에서 10점을 얻을 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$라고 한다. 두 선수가 임의로 순서를 정하여 각각 한 번씩 사격하였더니 먼저 사격한 선수만 10점을 얻었다고 한다. 이때, 먼저 사격한 선수가 A이었을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{17}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{9}{13}$

11. 세 곡선 $y=\sqrt{x+2}$, $y=\sqrt{-x+2}$, $y=\sqrt{2x-4}$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① 10π ② 12π ③ 14π
④ 16π ⑤ 18π

12. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(\alpha, 0)$, $\mathrm{B}(\beta, 0)$, $\mathrm{C}(\gamma, 0)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$에서 만난다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

[보기]

ㄱ. 방정식 $f(x)=k$ (k는 실수)가 서로 다른 세 실근을 가지면 함수 $f(x)$의 극댓값은 k이다.

ㄴ. $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖기 위한 필요충분조건은 $f(\alpha)<0$, $f(\gamma)<0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 어떤 기계 장치는 작동하기 시작한 순간부터 시간이 지남에 따라 그 정확도가 점점 떨어진다고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 t시간이 되는 순간의 정확도를 $I(\%)$라 하면 관계식

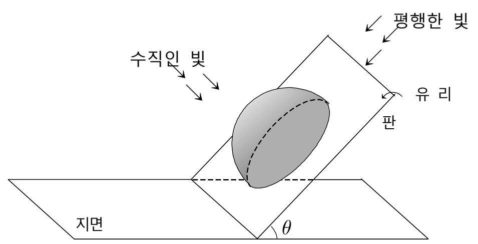
$$I=a\log(t+7)+b\ (a, b\text{는 상수},\ 0 \leqq t \leqq 200)$$

가 성립한다고 한다. 처음 이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도는 100이며, 작동하기 시작하여 28시간이 되는 순간의 정확도는 79라고 한다. 이 기계가 작동하기 시작하여 63시간이 되는 순간의 정확도는? (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 55 ② 60 ③ 65
④ 70 ⑤ 75

14. 그림과 같이 지면과 이루는 각의 크기가 θ인 평평한 유리판 위에 반구가 엎어져있다. 햇빛이 유리판에 수직인 방향으로 비출 때 지면 위에 생기는 반구의 그림자의 넓이를 S_1, 햇빛이 유리판과 평행한 방향으로 비출 때 지면 위에 생기는 반구의 그림자의 넓이를 S_2라 하자. $S_1 : S_2 = 3 : 2$일 때, $\tan\theta$의 값은? (단, θ는 예각이다.) [4점]

지면



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

15. 다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1\cdot 2}{n+1}+\frac{2\cdot 3}{n+2}+\frac{3\cdot 4}{n+3}+\cdots+\frac{n(n+1)}{n+n}<\frac{(n+1)^2}{4}\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

부등식 (*)의 좌변을 S_n이라 하자

(ⅰ) $n=2$일 때, (좌변) $=S_2=$ $\boxed{(가)}$,

(우변)$=\frac{9}{4}$ 이므로 (*)은 성립한다.

(ⅱ) $n=m\ (m=2,3,4,\cdots)$일 때 (*)이 성립한다고 가정하자.

$$S_m=\frac{1\cdot 2}{m+1}+\frac{2\cdot 3}{m+2}+\frac{3\cdot 4}{m+3}+\cdots+\frac{m(m+1)}{m+m}$$

이고,

$$S_{m+1}=\frac{1\cdot 2}{(m+1)+1}+\frac{2\cdot 3}{(m+1)+2}+\cdots+\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)+m+1}$$

이므로

$$S_{m+1}-S_m=-2\left(\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\frac{3}{m+3}+\cdots+\frac{m}{2m}\right)+\boxed{(나)}+\frac{m+2}{2}$$

한편, $\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}+\cdots+\frac{m}{2m}$

$>\frac{1}{m+m}+\frac{2}{m+m}+\cdots+\frac{m}{2m}=\boxed{(다)}$ 이고

$\boxed{(나)}<\frac{2m+1}{4}$ 이므로 $S_{m+1}-S_m<\frac{2m+3}{4}$ 이다.

따라서 $S_{m+1}<S_m+\frac{2m+3}{4}<\frac{(m+2)^2}{4}$ 이므로

(*)은 $n=m+1$일 때도 성립한다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $af(3)g(3)$의 값은?

[3점]

① $\frac{13}{7}$ ② $\frac{20}{7}$ ③ $\frac{26}{7}$ ④ $\frac{33}{7}$ ⑤ $\frac{39}{7}$

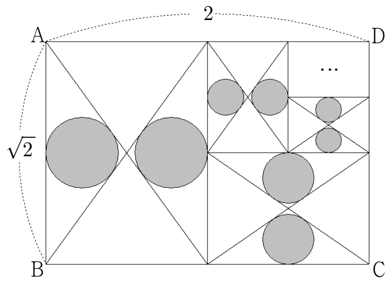
16. 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD에서 다음 [단계]와 같은 순서로 도형을 만들어 나간다.

[단계 1] 직사각형 ABCD의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

[단계 2] [단계 1]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.

[단계 3] [단계 2]에서 대각선이 그려지지 않은 직사각형의 긴 두 변의 중점을 잇는 선분을 그린 다음, 한 쪽 직사각형에 두 대각선을 그려 네 개의 이등변삼각형을 만든다. 이 중 꼭지각의 크기가 둔각인 두 이등변삼각형에 내접하는 원을 각각 그린 후 이 두 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.

⋮



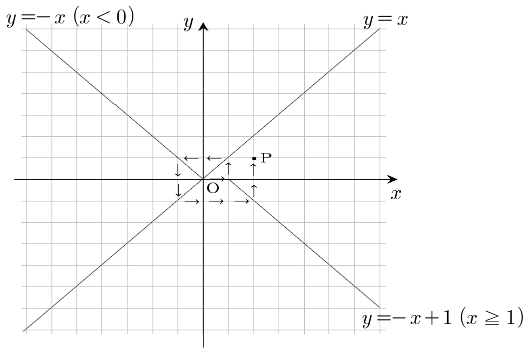
이와 같은 과정을 계속하여 [단계 n]에서 그려진 두 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(5-2\sqrt{6})$ ② $2\pi(3-\sqrt{6})$ ③ $2\pi(5-\sqrt{6})$ ④ $4\pi(3-\sqrt{6})$ ⑤ $4\pi(5-\sqrt{6})$

17. 좌표평면 위를 움직이는 점 P는 다음과 같은 규칙으로 x축 또는 y축과 평행한 방향으로 이동 한다.

> (가) 1회 이동거리는 1이고, 처음에는 원점을 출발하여 점 $(1, 0)$으로 이동한다.
> (나) 점 P가 반직선 $y=-x+1\ (x \geq 1)$ 위의 점에 도착하면 y축의 양의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x\ (x>0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 음의 방향으로 이동한다.
> (다) 점 P가 반직선 $y=-x\ (x<0)$ 위의 점에 도착하면 y축의 음의 방향으로 이동하고, 반직선 $y=x\ (x<0)$ 위의 점에 도착하면 x축의 양의 방향으로 이동한다.

예를 들어, 그림과 같이 점 P가 원점을 출발하여11회 이동하면 점 $(2, 1)$에 도착한다.



점 P가 원점을 출발하여 k회 이동하면 점 $(0, 10)$에 도착한다. k의 값은? (단, 각각의 반직선에 도착하기 전에는 진행방향을 바꾸지 않는다.) [4점]

① 350 ② 360 ③ 370
④ 380 ⑤ 390

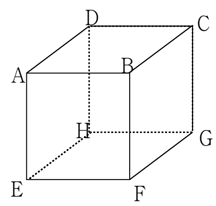
18. 좌표공간에 5개의 점 $\mathrm{A}(0, 0, 4-t)$, $\mathrm{B}(t, 0, 0)$, $\mathrm{C}(0, t, 0)$, $\mathrm{D}(-t, 0, 0)$, $\mathrm{E}(0, -t, 0)$을 꼭짓점으로 하는 사각뿔 $\mathrm{A-BCDE}$가 있다. $0<t<4$일 때, 이 사각뿔의 부피가 최대가 되도록 하는 실수 t의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

19. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 $\mathrm{ABCD-EFGH}$를 다음 두 조건을 만족시키도록 좌표공간에 놓는다.

> (가) 꼭짓점 A는 원점에 놓이도록 한다.
> (나) 꼭짓점 G는 y축 위에 놓이도록 한다.

위의 조건을 만족시키는 상태에서 이 정육면체를 y축의 둘레로 회전시킬 때, 점 B가 그리는 도형은 점 $(0, a, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이다. 이때, a, r의 곱 ar의 값은? (단, 점 G의 y좌표는 양수이다.) [4점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. 두 함수 $f(x)=[x]$, $g(x)=\sin\pi x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

> ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
> ㄴ. 함수 $(f\circ g)(x)$는 모든 정수에서 연속이다.
> ㄷ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 이차정사각행렬을 원소로 갖는 집합 M을 다음과 같이 정의하자.

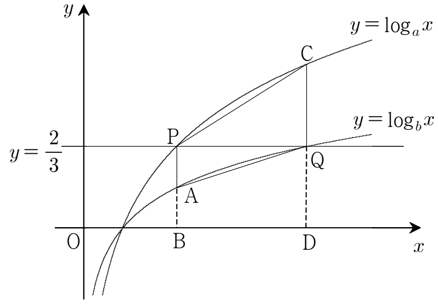
$$M=\{A\mid A^2=A\}$$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

> ㄱ. $X^2\in M$이면 $X\in M$이다.
> ㄴ. $X\in M$이면 $E-X\in M$이다.
> ㄷ. $X\in M$, $Y\in M$이고 $XY=-YX$이면 모든 자연수 m, n에 대하여 $X^m+Y^n\in M$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

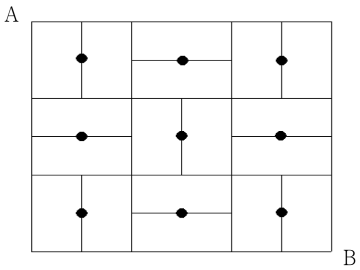
22. 그림과 같이 직선 $y=\frac{2}{3}$가 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 x축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.



$\overline{PA}=\overline{AB}$이고, 사각형 PAQC의 넓이가 1일 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $1<a<b$이다.) [4점]

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

23. 그림과 같이 직사각형 모양으로 이루어진 도로망이 있고, 이 도로망의 9개의 지점에 ●이 표시되어 있다.



A지점에서 B지점까지 가는 최단경로 중에서 ●이 표시된 9개의 지점 중 오직 한 지점만을 지나는 경로의 수는? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

24. 어느 선박 부품 공장에서 만드는 부품의 길이 X는 평균이 100, 표준편차가 0.6인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 만든 부품 중에서 9개를 임의추출한 표본의 길이의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, 표본평균 $\overline{X}$와 모평균의 차가 일정한 값 c 이상이면 부품의 제조과정에 대한 전면적인 조사를 하기로 하였다. 부품의 제조 과정에 대한 전면적인 조사를 하게 될 확률이 5% 이하가 되도록 상수 c의 값을 정할 때, c의 최솟값은? (단, 단위는 mm이고, 오른쪽 표준정규분포표를 이용한다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.65	0.450
1.96	0.475
2.58	0.495

① 0.196 ② 0.258 ③ 0.330 ④ 0.392 ⑤ 0.475

단답형

25. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} -b & a-5 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ -2y \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 점 (a, b)가 나타내는 도형의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 다항식 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

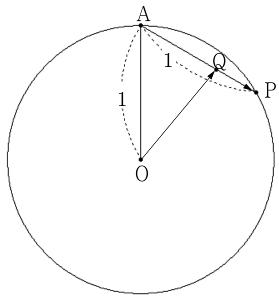
(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3} = \frac{11}{3}$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = -11$

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}$의 값을 구하시오. [3점]

27. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(3,\ \frac{16}{5}\right)$에서의 접선을 l이라 하자. 타원의 두 초점 F, F$'$과 직선 l 사이의 거리를 각각 $d,\ d'$이라 할 때, dd'의 값을 구하시오. [3점]

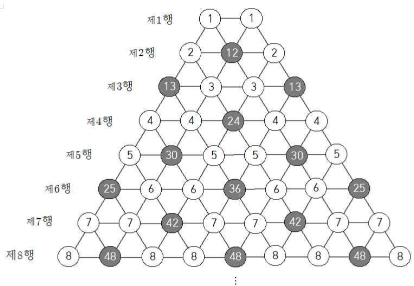
28. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구 위에 고정된 점 A가 있고, $\overline{\mathrm{AP}}=1$을 만족시키면서 이 구 위를 움직이는 점 P가 있다. 이때, 선분 AP 위의 점 Q가 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geq 0$을 만족시킬 때, 점 Q가 존재하는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p,q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 그림과 같이 정삼각형을 붙여서 만든 도형 위에 흰색과 검은색의 바둑돌을 정삼각형의 각 꼭짓점 위에 나열하는데, 제 n 행에는 $(n+1)$ 개의 돌을 다음과 같은 규칙으로 나열한다.
$(n=1, 2, 3, \cdots)$

(가) 제 1 행에는 모두 흰색의 바둑돌을 나열한다.
(나) 제 $(3n-1)$ 행에는 맨 왼쪽부터 흰색, 검은색, 흰색의 바둑돌 3 개를 n 회 반복하여 나열한다.
(다) 제 $3n$ 행에는 맨 왼쪽에 검은색의 바둑돌을 1 개 놓은 다음 그 오른쪽으로 흰색, 흰색, 검은색의 바둑돌 3 개를 n 회 반복하여 나열한다.
(라) 제 $(3n+1)$ 행에는 맨 왼쪽에 흰색의 바둑돌을 2 개 나열한 다음 그 오른쪽으로 검은색, 흰색, 흰색의 바둑돌 3 개를 n 회 반복하여 나열한다.

위의 규칙대로 바둑돌을 나열한 다음 제 n 행에 놓인 흰색의 바둑돌에는 n 을 적고, 각 행에 놓인 검은색의 바둑돌에는 그 돌과 가장 가까운 4 개 또는 6 개의 흰색의 바둑돌에 적힌 숫자의 합을 적는다. 이때, 198 이 적힌 바둑돌의 개수를 구하시오. [4점]



30. 주머니 속에 빨간 공 5 개, 파란 공 5 개가 들어있다. 이 주머니에서 5 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중에서 더 많은 색의 공의 개수를 확률변수 X 라 하자. 예를 들어 꺼낸 공이 빨간 공 2 개, 파란 공 3 개이면 $X=3$ 이다. $Y=14X+14$ 라 할 때 확률변수 Y 의 평균을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2011년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=7$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3n-1}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}+3-\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}-\frac{1}{n}}=\frac{2\cdot3+3}{3}\ =3$

2) ④

$\mathrm{P}(A^{\mathrm{C}}|B)+\mathrm{P}(A|B^{\mathrm{C}})=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$

3) ⑤

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=7^2$

$|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2=49$, $2(\vec{a}\cdot\vec{b})=15$

준식$=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2+4(\vec{a}\cdot\vec{b})-3|\vec{b}|^2\ =36+30-75=-9$

4) ①

$\log10^{0.76}=0.76$

$\log5=0.6990<0.76<\log6=0.7781$이므로 정수부분은 5이다.

5) ④

양변 제곱 후 정리하면

$4\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{3}$

다시 양변 제곱하면

$16x(1-x)=3$

$16x^2-16x+3=0$에서 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=\frac{3}{16}$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4\cdot\frac{3}{16}=\frac{1}{4}$

$\therefore|\alpha-\beta|=\frac{1}{2}$

6) ②

$\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{4^x+2^x+1}\leqq\frac{8}{8^x-1}$ 의 좌변을 통분하면

$\frac{4^x+2^x+1+2^x-1}{8^x-1}\leqq\frac{8}{8^x-1}$ 에서

$\frac{4^x+2\cdot2^x-8}{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}\leqq0$ $\frac{(2^x+4)(2^x-2)}{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}\leqq0$

$2^x+4>0, 4^x+2^x+1>0$ 이므로 $\frac{2^x-2}{2^x-1}\leqq0$

$1<2^x\leqq2, 0<x\leq1$에서 $x=1$, 1개

7) ③

$f(x)=mx+8$, $g(x)=x^3+2x^2-3x$ 라 놓으면

$\begin{cases}f(a)=g(a)\\f'(a)=g'(a)\end{cases}$ 이면 삼차 곡선과 직선이 두 점에서 만난다.

$\begin{cases}ma+8=a^3+2a^2-3a\\ \quad m\quad=3a^2+4a-3\end{cases}$

두 식을 연립하면

$(a+2)(a^2-a+2)=0$

$\therefore a=2,\ m=1$

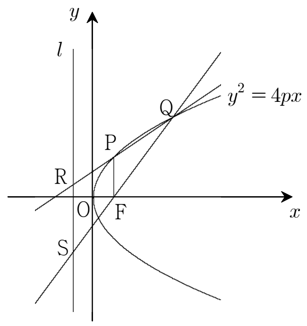
8) ①

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{3k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\int_0^3 g(x)dx$

한편, $\int_0^3 g(x)dx=9-\int_0^3 f(x)dx\ \left(\because\ \frac{x^3}{9}=x,\ x=3\right)$

$\frac{1}{3}\int_0^3 g(x)dx=\frac{1}{3}\left\{9-\int_0^3 f(x)dx\right\}=\frac{1}{3}\left\{9-\left[\frac{x^4}{36}\right]_0^3\right\}=\frac{9}{4}$

9) ②



점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H, 점 Q에서 준선에 내린 수선의 발을 H′라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{QH}}$이고 $\overline{\mathrm{PH}}=2p$이므로 $\overline{\mathrm{QH}}=5p$이다.

$\triangle\mathrm{QPF}\sim\triangle\mathrm{QRS}$이므로 닮음비는 $3:5$이다.

따라서 $\frac{\overline{\mathrm{QF}}}{\overline{\mathrm{FS}}}=\frac{\overline{\mathrm{QH'}}-\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}$ 이므로 $\frac{3}{2}$이다.

10) ③

먼저 사격한 선수만 10점을 얻는 사건을 C,

먼저 사격한 선수가 A인 사건을 A라 하면,

$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$ 를 구하는 문제이다.

$P(C)=(A\text{먼저},10\text{점 득점})+(B\text{먼저},10\text{점 득점})$

$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

$P(A\cap C)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{12}\ \therefore P(A|C)=\frac{3}{5}$

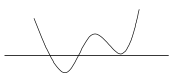
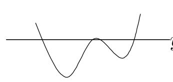
11) ②

$\pi\int_0^6\{\sqrt{x+2}\}^2-\pi\int_0^2\{-x+2\}^2-\pi\int_2^6\{\sqrt{2x-4}\}^2$

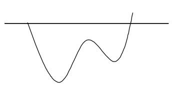
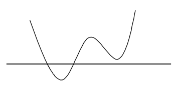
$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^6-\pi\left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2-\pi\left[x^2-4x\right]_2^6$

$=\pi(18+12+2-4-12-4)=12\pi$

12) ①

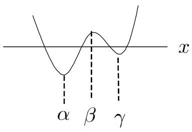
ㄱ.  $y=k$ 또는  $y=k$

$\therefore$ 거짓

ㄴ.  x 또는  x

∴ 참

ㄷ.



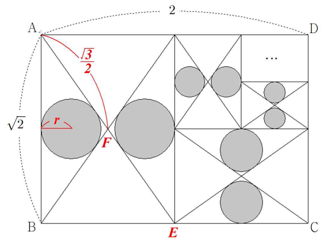
서로 다른 네 실근가질 조건은 $f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0,\ f(r)<0$
∴ 거짓
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

13) ④
$I=a\log(t+7)+b$
처음 이 기계가 작동하기 시작한 순간의 정확도는 100에서
경과시간 $t=0$ 에 대응되는 정확도 $I=100$이므로
$100=a\log(0+7)+b$ ⋯⋯ ㉠
작동하기 시작하여 28시간이 되는 순간의 정확도는 79에서
경과시간 $t=28$ 에 대응되는 정확도 $I=79$ 이므로
$79=a\log(28+7)+b$ ⋯⋯ ㉡
㉡−㉠을 변변 정리하면
$-21=a\log 5=a(1-\log 2)=a(0.7)$
$\therefore a=-30\ (\because \log 2=0.3)$
㉠ 식에 대입해서 b 의 값을 정리하면
$100=a\log(0+7)+b$ 에서 $\therefore b=100+30\log 7$
63시간이 되는 순간의 정확도를 x 라 두면
$x=a\log(63+7)+b$ ⋯⋯ ㉢
이 성립한다. 위에서 얻은 a, b의 값을 ㉢식에 대입하면
$x=-30\log 70+100+30\log 7=100-30=70$

14) ⑤
반구의 밑면의 넓이를 S라고 하면
$S_1=S\frac{1}{\cos\theta}$ 이고 $S_2=\frac{1}{2}S\frac{1}{\sin\theta}$ 이다.
$S_1:S_2=3:2$이므로 $\frac{4}{\cos\theta}=\frac{3}{\sin\theta}$
$\therefore\ \tan\theta=\frac{3}{4}$

15) ③
(가) $\frac{1\cdot 2}{2+1}+\frac{2\cdot 3}{2+2}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}=a$
(나) $\frac{m(m+1)}{2m+1}=f(m)$
(다) $\frac{1+2+\cdots+m}{2m}=\frac{m+1}{4}=g(m)$
$\therefore\ a\times f(3)\times g(3)=\frac{13}{6}\times\frac{3\times 4}{7}\times\frac{4}{4}=\frac{26}{7}$

16) ①
대각선 $\overline{AE}=\sqrt{3}$ 이고, 삼각형 ABF 의 넓이는
$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$
$r=\frac{1}{\sqrt{6}+2}=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$



그리면, $S_1=2\cdot\pi r^2=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2=\pi(5-2\sqrt{6})$
그리고, 직사각형들의 닮음비가 $\sqrt{2}:1$이므로, 원의 반지름의 비도
$r_n\ ;\ r_{n+1}=\sqrt{2}:1$
따라서, 넓이비 $S_n:S_{n+1}=2:1$
$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{2}$
$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi(5-2\sqrt{6})}{1-\frac{1}{2}}=2\pi(5-2\sqrt{6})$

17) ⑤
$(0,1)$: 3
$(0,2)$: $3+11$
$(0,3)$: $3+11+19$
⋮
$(0,10)$: $3+11+19+\cdots+75=390$

18) ④
사각뿔 $\mathrm{A-BCDE}$에서 밑면 BCDE는 한 변이 $\sqrt{2}t$인 정사각형이고
높이는 $4-t$이므로 부피 $f(t)$라 하면
$f(t)=\frac{1}{3}\cdot 2t^2(4-t)\ (0<t<4)$
$f'(x)=-2t^2+\frac{16}{3}t=0$에서
$t=\frac{8}{3}$ 에서 극대이자 최대를 갖는다.

19) ④
$\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{AB}}=1,\ \overline{\mathrm{GB}}=\sqrt{2}$이므로 $\triangle\mathrm{ABG}$는 직각삼각형이다.
B에서 $\overline{\mathrm{AG}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{BH}}$는 $\frac{\sqrt{6}}{3}$이고 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로
$a=\frac{\sqrt{3}}{3},\ b=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.
$\therefore\ ab=\frac{\sqrt{2}}{3}$

20) ③
ㄱ. $f(0)g(0)=0\times 0=0$
$$\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=(-1)\times 0=0\\ \lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=0\times 0=0\end{cases}$$
$\therefore x=0$에서 연속
ㄴ. $$\begin{cases}f(g(0))=f(0)=0\\ \lim_{x\to 0}f(g(x))=\begin{cases}\lim_{x\to 0-}f(g(x))=f(-0)=-1\\ \lim_{x\to 0+}f(g(x))=f(+0)=0\end{cases}\end{cases}$$

$\therefore x=0$에서 불연속

ㄷ. $g(f(0))=g(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \begin{cases} \lim_{x\to 0-} g(f(x)) = g(-1) = 0 \\ \lim_{x\to 0+} g(f(x)) = g(0) = 0 \end{cases}$$

$\therefore x=0$에서 연속

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21) ⑤

ㄱ. (반례) $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$라 하면 $X^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$X^4=X^2$이므로, $X^2\in M$이지만, $X^2\neq X$이므로, $X\not\in M$이다. (거짓)

ㄴ. $X\in M$이므로, $X^2=X$

$(E-X)^2=E-2X+X^2=E-2X+X=E-X$

$\therefore\ E-X\in M$(참)

ㄷ. $X\in M$, $Y\in M$이면 $X^2=X$, $Y^2=Y$

$XY=-YX$이면 $X^m Y^n=-Y^n X^m$이므로,

$(X^m+Y^n)^2=(X^2)^m+(Y^2)^n+X^m Y^n+Y^n X^m=X^m+Y^n$

$\therefore\ X^m+Y^n\in M$(참)

22) ③

$\log_a x : \log_b x = 2:1 \qquad \therefore b=a^2$

$\square PAQC = \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\times\overline{BD}=1$, $\overline{BD}=2$

$a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=2$, $a^{\frac{2}{3}}=2 \qquad \therefore ab=a^3=2^{\frac{9}{2}}=16\sqrt{2}$

23) ①

좌상/우하를 지나는 경우 $\dfrac{4!}{2!2!}$가지씩

중상/중하를 지나는 경우 $\dfrac{3!}{2!}$가지씩

좌중/우중를 지나는 경우 $\dfrac{3!}{2!}$가지씩

좌하/우상을 지나는 경우 1가지씩

중앙점을 지나는 경우 $2\times2=4$가지

따라서 $\dfrac{4!}{2!2!}\times2+\dfrac{3!}{2!}\times4+1\times2+4=30$가지

24) ④

신뢰도 95%일 때의 최대 오차를 구하는 것이므로

$1.96\times\dfrac{0.6}{\sqrt{9}}=0.392$

25) 16

이항하여 정리하면

$\begin{cases}(b+1)x+(8-a)y=0\\ ax+(b+1)y=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix} b+1 & 8-a \\ a & b+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} b+1 & 8-a \\ a & b+1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(b+1)^2-a(8-a)=0$

$(a-4)^2+(b+1)^2=16$

$\therefore S=\pi\cdot4^2=16\pi \to \dfrac{S}{\pi}=16$

26) 11

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+2x+3}=\frac{11}{3}$에서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $\dfrac{11}{3}$이므로

$f(x)=\dfrac{11}{3}x^2+ax+b$라 할 수 있다.

$f(x)=\dfrac{11}{3}x^2+ax+b$을 (나)에 대입하면

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\frac{11}{3}x^2+ax+b}{x}=-11$이고 $b=0$이다.

따라서 $a=-11$

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\frac{11}{3}x^2-11x}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{11x(x-3)}{3(x-3)}=11$

27) 16

$l:\ \dfrac{3x}{25}+\dfrac{\frac{16}{5}y}{16}=1$, $3x+5y-25=0$

$d\cdot d'=\dfrac{|9-25|}{\sqrt{9+25}}\cdot\dfrac{|-9-25|}{\sqrt{9+25}}=\dfrac{16\cdot34}{34}=16$

28) 11

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq0$가 되는 조건은 $\overrightarrow{AP}$과 $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각 $\angle OQP$가 $90^\circ\leq\angle OQP\leq180^\circ$이다.

또한 선분 AP의 중점 M이라 하면 MP 위에 점Q가 존재하면 된다.

따라서 점 Q의 자취는 MP를 모선으로 하는 원뿔대의 곡면을

따라 움직이면 되므로 점 Q가 존재하는 영역은

$\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\left(2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\left(2\pi\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{3}{8}\sqrt{3}\pi$

(원뿔대의 겉넓이)

따라서 $p+q=11$

29) 142

198행의 흰 돌에는 198이 적혀 있으므로 그 수를 구하면 132개다.

n행의 검은 돌에 198이 적혀있다면 주변의 4개 또는 6개 돌의 숫자의 합이다.

4개 숫자의 합이라면 $n-1+n+2(n+1)=198$이므로 만족하는 자연수 n이 존재하지 않는다.

6개 숫자의 합이라면 $2(n-1)+2n+2(n+1)=198$이므로 $n=33$이다.

33행에는 검은 돌이 12개 있고 양 끝의 검은 돌을 제외하면 가능한 경우는 10개다.

따라서 198이 적혀 있는 돌의 개수는 $132+10=142$개다.

30) 59

X	3	4	5	계
$P(X)$	$\frac{100}{126}$	$\frac{25}{126}$	$\frac{1}{126}$	1

$P(X=3)=\dfrac{{}_5C_3\times{}_5C_2\times2}{{}_{10}C_5}=\dfrac{50}{63}$

$P(X=4)=\dfrac{{}_5C_4\times{}_5C_1\times2}{{}_{10}C_5}=\dfrac{25}{126}$

$P(X=5)=\dfrac{{}_5C_5\times2}{{}_{10}C_5}=\dfrac{1}{126}$

X의 평균 $=E(X)=\dfrac{300+100+5}{126}=\dfrac{405}{126}=\dfrac{45}{14}$

$E(Y)=14E(X)+14=14\times\frac{45}{14}+14=45+14=59$