2010학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시　　수 학 영 역

'나'형　　성명 [　　]　　수험번호 [　　　　　　　　]　　*1*

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $(\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{250})^3$ 의 값은? [2점]

① 48　② 54　③ 72　④ 96　⑤ 108

2. A 그룹에 남자 2명과 여자 2명, B 그룹에도 남자 2명과 여자 2명이 있다. A 그룹과 B 그룹에서 각각 2명씩 뽑아 동시에 상대 그룹으로 이동시킬 때, A 그룹에 남자 1명과 여자 3명이 있을 확률은? [2점]

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{2}{9}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{5}$

3. 무한등비수열 $\left\{\left(\frac{r^2-r}{6}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 r의 개수는? [2점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

4. 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{S_n\}$, $\{P_n\}$을

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n$$

$$P_n = \frac{S_2}{S_2-1}\times\frac{S_3}{S_3-1}\times\frac{S_4}{S_4-1}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_n-1}$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} P_n$의 값은? [3점]

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

5. 다음은 r가 자연수일 때 $n \geq r$인 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\sum_{i=r}^{n} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

> [증명]
> (1) $n=r$일 때
> (좌변)$= {}_{r}\mathrm{C}_{r} = \boxed{\text{(가)}}$,
> (우변)$= {}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1} = \boxed{\text{(가)}}$
> 이므로 주어진 등식이 성립한다.
> (2) $n=k$ $(k \geq r)$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $\sum_{i=r}^{k} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$이다.
> $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
> $\sum_{i=r}^{k+1} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} + \boxed{\text{(나)}}$
> $= \boxed{\text{(다)}} + \dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!} = \dfrac{(k+2)!}{(k+1-r)!\,(r+1)!}$
> $= {}_{k+2}\mathrm{C}_{r+1}$
> 따라서 $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립한다.
> (1), (2)에 의하여 $n \geq r$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\dfrac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}$
②	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$
③	1	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$	$\dfrac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}$
④	r	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$	$\dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$
⑤	r	${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$	$\dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.
> ㄴ. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.
> ㄷ. $|1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)| < \dfrac{1}{n}$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

7. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여
$a_n = \log_2(n!)$, $b_n = a_{n+1} - a_n$
으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $b_{15} = 4$
> ㄴ. $9 < \sum_{k=1}^{5} b_k < 10$
> ㄷ. n이 짝수일 때 b_n의 값은 무리수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 어느 보안 전문회사에서 바이러스 감염 여부를 진단하는 프로그램을 개발하였다. 그 진단 프로그램은 바이러스에 감염된 컴퓨터를 감염되었다고 진단할 확률이 94 %이고, 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터를 감염되지 않았다고 진단할 확률이 98 %이다. 실제로 바이러스에 감염된 컴퓨터 200 대와 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터 300 대에 대해 이 진단 프로그램으로 바이러스 감염 여부를 검사하려고 한다. 이 500 대의 컴퓨터 중 임의로 한 대를 택하여 이 진단 프로그램으로 감염 여부를 검사하였더니 바이러스에 감염되었다고 진단하였을 때, 이 컴퓨터가 실제로 감염된 컴퓨터일 확률은? [3점]

① $\frac{94}{97}$ ② $\frac{92}{97}$ ③ $\frac{90}{97}$ ④ $\frac{47}{49}$ ⑤ $\frac{47}{50}$

9. 다음은 어느 보석 상점에서 판매하는 다이아몬드 가격표의 일부이다.

무게(캐럿)	가격(만원)
0.3	70
0.6	210

이 상점에서 판매하는 다이아몬드의 무게가 x캐럿일 때, 그 가격 $f(x)$만원은

$$f(x)=a(b^x-1) \text{ (단, } a>0,\ b>1 \text{ 인 상수)}$$

로 주어진다고 한다. 이때, 이 상점에서 판매하는 무게가 1.5 캐럿인 다이아몬드의 가격은? [3점]

① 1875 만원 ② 1965 만원 ③ 1980 만원
④ 2170 만원 ⑤ 2250 만원

10. 2009 년 8 월 초 판매 가격이 200 만원인 노트북컴퓨터의 판매 가격은 매월 초 직전 달보다 1 %씩 계속 인하된다고 하자. 어느 은행에 2009 년 8 월 초부터 2010 년 7 월 초까지 매월 초마다 일정한 금액을 적립하여, 12 개월 후인 2010 년 8 월 초에 원금과 이자를 모두 찾아 바로 노트북컴퓨터를 구입하기로 하였다. 이 은행은 월이율이 1 %이고 매월마다 복리로 계산한다고 할 때, 매월 초에 적립해야 할 최소금액은? (단, $0.99^{12}=0.89$, $1.01^{12}=1.13$ 으로 계산하고 천원 단위에서 반올림하며, 세금은 고려하지 않는다.) [3점]

① 11 만원 ② 12 만원 ③ 13 만원
④ 14 만원 ⑤ 15 만원

11. 임의의 실수 x 에 대하여

$$x=n+\alpha \text{ (}n\text{ 은 정수, } 0 \leqq \alpha < 1\text{)}$$

일 때, n을 x의 정수 부분, α를 x의 소수 부분이라 하자. $10<a<b<50$ 인 두 자연수 a, b에 대하여 $\log_2 a$의 소수 부분과 $\log_2 b$의 소수 부분이 같을 때 순서쌍 (a, b)의 개수는? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

12. 파장이 λ이고 강도가 I_0인 광선이 어떤 용액을 통과하면 이 용액에 광선이 흡수되어 입사광의 강도가 감소된다. 광선이 농도가 c인 용액을 통과한 거리가 d일 때의 광선의 강도를 I라 하면 I와 입사광의 강도 I_0 사이에는

$$I = I_0 \times 10^{-acd}, \quad a = \frac{4\pi k}{\lambda} \quad (\text{단, } k\text{는 소멸계수})$$

인 관계가 성립하고, 이 용액의 흡광도 A를

$$A = \log I_0 - \log I$$

로 정의한다. 파장이 λ_1인 광선이 농도가 0이 아닌 어떤 용액을 통과한 거리가 d_1일 때의 흡광도를 A_1, 파장이 $2\lambda_1$인 광선이 동일한 농도의 이 용액을 통과한 거리가 $4d_1$일 때의 흡광도를 A_2라 하자. 이때, 소멸계수 k가 일정하다고 할 때 $\dfrac{A_2}{A_1}$의 값은? (단, $\lambda_1 d_1 \neq 0$이다.) [3점]

① 8 ② 2 ③ 1 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{8}$

13. 세 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c는 모두 0이 아닌 실수이다.) [3점]

ㄱ. $a^2 + bc = 1$이면 $A^{2009} = A$이다.
ㄴ. $A^3 - 2A = O$이면 A는 역행렬을 갖는다.
ㄷ. $A^3 - 4A^2 + 4E = O$를 만족시키는 a, b, c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 컴퓨터의 화면 보호기에 A, B, C, D 네 개의 사진이 매초마다 다른 사진으로 바뀌면서 임의로 하나씩 나타나도록 하였다. 한 사진에서 다른 사진으로 바뀔 확률은 모두 같다고 하고, 자연수 n에 대하여 A 사진이 나온 다음 n초가 지난 후에 B 사진이 나올 확률을 p_n이라 하자.

다음은 $\lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$임을 증명하는 과정이다.

[증명]
A 사진이 나온 다음 n초가 지난 후에 B, C, D 사진이 나올 확률이 같으므로 A 사진이 나온 다음 n초가 지난 후에 다시 A 사진이 나올 확률은 $\boxed{(가)}$ 이다.
따라서 A 사진이 나온 다음 $n+1$초가 지난 후에 B 사진이 나올 확률 p_{n+1}은

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2p_n + \boxed{(가)}\right) = \boxed{(나)} + \frac{1}{3}$$

따라서 수열 $\left\{p_n - \dfrac{1}{4}\right\}$은 첫째항이 $\boxed{(다)}$이고 공비가 $-\dfrac{1}{3}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

[4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$1-3p_n$	$-\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{6}$
②	$1-\frac{3}{4}p_n$	$-\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{6}$
③	$1-3p_n$	$\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{6}$
④	$1-\frac{3}{4}p_n$	$\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{12}$
⑤	$1-3p_n$	$-\frac{1}{3}p_n$	$\frac{1}{12}$

15. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ 에서 행렬 A, B를

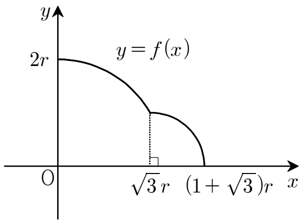
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}$라 하자.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b, c, d, p, q는 모두 0이 아닌 상수) [3점]

ㄱ. A의 역행렬이 존재하면 연립방정식은 오직 한 쌍의 해를 갖는다.
ㄴ. A, B의 역행렬이 모두 존재하지 않으면 연립방정식의 해는 무수히 많다.
ㄷ. A의 역행렬이 존재할 때, 실수 k_1, k_2에 대하여 $k_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이면 $k_1=k_2=0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. r가 양의 상수일 때 $0 \leqq x \leqq (1+\sqrt{3})r$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 중심의 좌표가 $(0, 0)$이고 반지름의 길이가 $2r$인 원의 일부, 중심의 좌표가 $(\sqrt{3}r, 0)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 일부일 때, 확률 $\mathrm{P}(0 \leqq X \leqq r)$의 값은? [4점]



① $\dfrac{\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$ ② $\dfrac{2\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$
③ $\dfrac{3\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$ ④ $\dfrac{4\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$
⑤ $\dfrac{5\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$

17. 등식 $A^2 = A + 3E$를 만족시키고 $A \neq kE$인 이차정사각행렬 A에 대하여

$$A^n = a_n A + b_n E \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

가 성립하도록 하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 있다.

이때, 모든 자연수 n에 대하여 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 B에 대하여 $B^2 = xB + yE$가 성립한다. 두 상수 x, y의 합 $x+y$의 값은? (단, E는 단위행렬이고 k는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18. 실수 전체의 집합의 두 부분집합 A, B를 각각

$$A = \{x \mid \log_4 (x-1) \leqq \log_{16} (x+5)\}$$

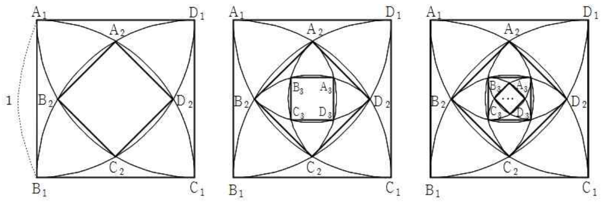
$$B = \{x \mid 8^x - 11 \cdot 4^x + 38 \cdot 2^x - 40 = 0\}$$

이라 할 때, 집합 $A \cap B$의 모든 원소들의 합은? [4점]

① $\log_2 10$ ② $\log_2 20$ ③ $\log_2 40$
④ $\log_2 60$ ⑤ $\log_2 80$

19. [그림1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{D_2}$라 하자. 또 [그림2]와 같이 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$, $\mathrm{D_3}$이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1} 이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



[그림1] [그림2]

① $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ ② $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$
④ $\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{1+3\sqrt{3}}{3}$

20. 방정식 $2^{\frac{x}{2}} = \log_{\sqrt{2}} |x|$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

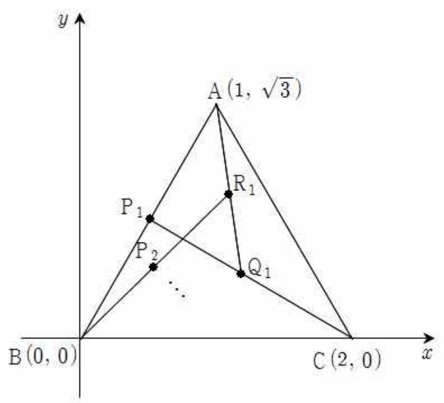
21. 어느 자영업자의 하루 매출액은 평균이 30만원이고 표준편차가 4만원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자영업자는 하루 매출액이 31만원 이상일 때마다 1000원씩을 자선단체에 기부하고 31만원 미만일 때는 기부를 하지 않는다고 한다. 이와 같은 추세가 계속된다고 할 때, 600일 동안 영업하여 기부할 총 금액이 222000원 이상이 될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
1.00	0.34
1.50	0.43

① 0.69 ② 0.84 ③ 0.90
④ 0.93 ⑤ 0.98

22. 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(1, \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(0, 0)$, $\mathrm{C}(2, 0)$이 있다. 선분 AB의 중점을 P_1, 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{C}$의 중점을 Q_1, 선분 $\mathrm{Q}_1\mathrm{A}$의 중점을 R_1, 선분 $\mathrm{R}_1\mathrm{B}$의 중점을 P_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 n에 대하여 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{C}$의 중점을 Q_n, 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{A}$의 중점을 R_n, 선분 $\mathrm{R}_n\mathrm{B}$의 중점을 P_{n+1}이라 하자. n이 한없이 커질 때, 점 P_n은 점 (α, β)에 한없이 가까워진다. 이때 두 상수 α, β의 합 $\alpha+\beta$의 값은? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{3+3\sqrt{3}}{7}$
④ $\frac{4+\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{4+2\sqrt{3}}{7}$

23. 최대공약수가 $5!$, 최소공배수가 $13!$이 되는 두 자연수 k, n ($k \leq n$)의 순서쌍 (k, n)의 개수는? [4점]

① 25 ② 27 ③ 32 ④ 36 ⑤ 49

24. 다음 등식을 만족시키는 세 실수 a, b, c가 있다.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a} = 2a, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b} = b, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c} = c$$

이때, 세 실수 a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $b<c<a$ ⑤ $c<a<b$

25. 다음 세 조건을 모두 만족시키는 두 이차정사각행렬 A, B가 있다.

(가) $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ x & 12 \end{pmatrix}$
(나) $A-B=\begin{pmatrix} 6 & y \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$
(다) $A^2-B^2=AB-BA$

이때, 두 실수 x, y의 곱 xy의 값을 구하시오. [3점]

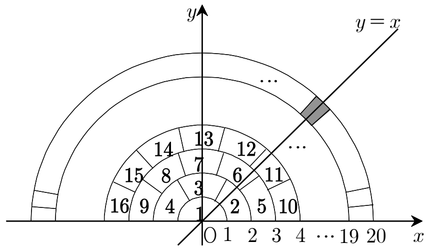
26. $\log_{15} A = 30$, $\log_{45} B = 15$인 두 자연수 A, B에 대하여 $\frac{B}{A}$를 소수로 나타내면 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나온다. 이때, n의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$) [3점]

27. A도시에서 B도시로 운행하는 고속버스들의 소요시간은 평균이 m분이고, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고속버스들의 소요시간 중에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(m-5 \leqq \overline{X} \leqq m+5) = 0.9544$ 를 만족시키는 표본의 크기 n의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [3점]

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

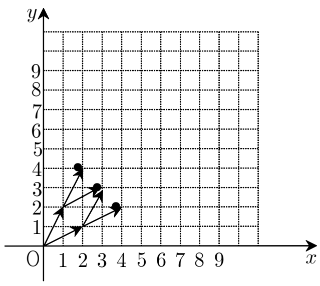
28. 좌표평면 위에 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 20 이하의 자연수인 반원이 20개 있다. $1 \leqq k \leqq 19$인 모든 자연수 k에 대하여 반지름의 길이가 k인 반원과 반지름의 길이가 $k+1$인 반원 사이의 영역을 $2k+1$등분한 다음, 각 부분에 시계 바늘이 도는 방향과 반대방향으로 자연수를 차례대로 나열하였다. 이때, 직선 $y=x$와 맨 바깥쪽 영역이 만나는 어두운 부분에 들어간 수를 구하시오. (단, 반지름의 길이가 1인 반원의 내부에는 1을 나열한다.) [4점]



29. 좌표평면 위에서 점 P는 한 번의 이동으로 다음의 (규칙1) 또는 (규칙2)를 따라 이동한다.

> (규칙1) x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 이동한다.
> (규칙2) x축의 양의 방향으로 2만큼, y축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

예를 들어, 원점 O에 있는 점 P가 두 번의 이동으로 도달할 수 있는 곳을 표시하면 그림과 같다.
점 P가 (규칙1)을 따라 이동할 확률은 $\frac{1}{3}$이고 (규칙2)를 따라 이동할 확률은 $\frac{2}{3}$일 때, 위와 같은 규칙으로 점 P가 원점 O에서부터 다섯 번의 이동으로 점 $(8, 7)$에 도달할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. 이때, 서로소인 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 매번 이동하는 사건은 서로 독립이다.) [4점]



30. $1 \leq x < 10$인 실수 x에 대하여 $\frac{x^3}{[x]}$의 값이 자연수가 되는 x의 개수를 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2010년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ②

$$\left(-2^{\frac{4}{3}}+250^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(-2\times 2^{\frac{1}{3}}+5\times 2^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(3\times 2^{\frac{1}{3}}\right)^3$$
$$=27\times 2=54$$

[다른풀이]

$\sqrt[3]{16}=a$, $\sqrt[3]{250}=b$라 두면

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{250})^3 &= (b-a)^3\\ &= b^3-3b^2a+3ba^2-a^3\\ &= 250-3\sqrt[3]{250\cdot 250\cdot 16}+3\sqrt[3]{250\cdot 16\cdot 16}-16\\ &= 250-3\cdot\sqrt[3]{(1000)^2}+3\cdot\sqrt[3]{1000\cdot 64}-16\\ &= 250-3\cdot 100+3\cdot 40-10=54\end{aligned}$$

2) ③

A 그룹에서 2명, B 그룹에서 2명이 동시에 상대방 그룹으로 움직이는 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

A→B	B→A	이동 후 A그룹	이동후 B그룹
남2	남2	남2, 여2	남2, 여2
남2	남1, 여1	남1, 여3	남3, 여1
남2	여2	남0, 여4	남4, 여0
남1, 여1	남2	남3, 여1	남1, 여3
남1, 여1	남1, 여1	남2, 여2	남2, 여2
남1, 여1	여2	남1, 여3	남3, 여1
여2	남2	남4, 여0	남0, 여4
여2	남1, 여1	남3, 여1	남1, 여3
여2	여2	남2, 여2	남2, 여2

표에서 A 그룹에 남자 1명과 여자 3명이 있는 경우는 굵은글씨와 밑줄로 표현된 부분이다.

이 때, A 그룹에서 B 그룹으로 이동할 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2$이고, B 그룹에서 A 그룹으로 이동하는 인원을 뽑는 경우 역시 ${}_4C_2$이다.

A 그룹에서 B 그룹으로 남자 2명이 가는 경우의 수는 ${}_2C_2$이고 B 그룹에서 A 그룹으로 남자 1명, 여자 1명이 가는 경우의 수는 ${}_2C_1\cdot{}_2C_1$이다.

또한, A 그룹에서 B 그룹으로 남자 1명, 여자 1명이 가는 경우의 수는 ${}_2C_1\cdot{}_2C_1$이고 B 그룹에서 A 그룹으로 여자 2명이 가는 경우의 수는 ${}_2C_2$이다.

∴ 구하고자 하는 확률

$$=\frac{{}_2C_2\cdot\left({}_2C_1\cdot{}_2C_1\right)+\left({}_2C_1\cdot{}_2C_1\right)\cdot{}_2C_2}{{}_4C_2\cdot{}_4C_2}=\frac{4+4}{36}=\frac{2}{9}$$

3) ③

무한등비수열 $a_n=ar^{n-1}$의 수렴조건은 $a=0$ or $-1<r\leqq 1$이다.

주어진 수열은 초항과 공비가 공히 $\frac{r^2-r}{6}$이므로 주어진 수열의 수렴 범위는 $-1<\frac{r^2-r}{6}\leqq 1\Rightarrow r^2-r+6>0$ or $r^2-r\leqq 6$을 만족시킨다.

이 때, r^2-r+6의 판별식을 조사하면

$D=b^2-4ac=(1)^2-4\cdot 1\cdot 6=-23<0$ 이므로

r^2-r+6은 모든 실수 r에 대해 항상 0보다 크다.

$\therefore\ r^2-r-6\leqq 0\Rightarrow(r+2)(r-3)\leqq 0$

$\therefore -2\leqq r\leqq 3\Rightarrow$ 실수 r은 총 $3-(-2)+1=6$개 존재한다.

4) ③

$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$S_n-1=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{n^2+n-2}{2}=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ 이다.

$$\therefore\ \frac{S_n}{S_n-1}=\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ P_n &= \frac{S_2}{S_2-1}\times\frac{S_3}{S_3-1}\times\frac{S_4}{S_4-1}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_n-1}\\ &= \frac{3\cdot 2}{1\cdot 4}\times\frac{4\cdot 3}{2\cdot 5}\times\frac{5\cdot 4}{3\cdot 6}\times\cdots\times\frac{(n+1)\cdot n}{(n-1)\cdot(n+2)}\\ &= \frac{3}{1}\times\frac{n}{n+2}=\frac{3n}{n+2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}=3$$

5) ①

(가) ${}_rC_r={}_{r+1}C_{r+1}=1$

(나) $\sum_{i=r}^{k+1}{}_iC_r=\sum_{i=r}^{k}{}_iC_r+{}_{k+1}C_r={}_{k+1}C_{r+1}+{}_{k+1}C_r$

∴ (나)$={}_{k+1}C_r$

(다) ${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}$ 이므로

$${}_{k+1}C_{r+1}+{}_{k+1}C_r=\frac{(k+1)!}{((k+1)-(r+1))!(r+1)!}+\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$$

∴ (다) $=\frac{(k+1)!}{(k-r)!(r+1)!}$

∴ (가)$=1$, (나)$={}_{k+1}C_r$, (다) $=\frac{(k+1)!}{(k-r)!(r+1)!}$

6) ④

ㄱ) $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄴ) $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt{n+1}-1$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-1\right)=\infty$ 이므로

수열 a_n은 양의 무한대로 발산한다,

ㄷ) $\left|1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right|<\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n}<1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)<\frac{1}{n}$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\leqq\lim_{n\to\infty}\{1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)\}\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\{1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)\}=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=-1$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=-1$

7) ⑤

$b_n=a_{n+1}-a_n=\log_2\frac{(n+1)!}{n!}=\log_2(n+1)$

ㄱ. $b_{15}=\log_2(1+15)=\log_2 16=4$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{5}b_k=\log_2 2+\log_2 3+\log_2 4+\log_2 5+\log_2 6=\log_2 720$

$\log_2 2^9<\log_2 720<\log_2 2^{10}$ (참)

ㄷ. n이 짝수이면 $n+1$은 홀수,

$\therefore\ b_n=\log_2(n+1)$은 무리수 (참)

8) ①

	실제 감염됨	실제 감염안됨
감염으로 진단	188	6
비감염으로 진단	12	294

$\therefore \dfrac{188}{194}=\dfrac{94}{97}$

[다른풀이]

바이러스에 감염되었다고 진단될 사건을 A,
실제로 감염된 컴퓨터 수를 사건 B라 두면

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^c)}$$

$$=\frac{200\cdot\frac{94}{100}}{200\cdot\frac{94}{100}+300\cdot\left(1-\frac{98}{100}\right)}=\frac{94}{97}$$

9) ④

$f(0.3)=a(b^{0.3}-1)=70$

$f(0.6)=a(b^{0.6}-1)=210$

$\dfrac{f(0.6)}{f(0.3)}=\dfrac{(b^{0.3}-1)(b^{0.3}+1)}{b^{0.3}-1}=3$

$\therefore b^{0.3}=2 \quad a=70$

$\therefore f(1.5)=70(b^{1.5}-1)=70(2^5-1)=2170$

10) ④

적립하는 금액을 a라고 하면

적금 합$=\dfrac{a(1.01)\{(1.01)^{12}-1\}}{0.01}=13.13a$

12개월이 지난 후 노트북의 가격$=200(0.99)^{12}=178$

$13.13a=178$

$\therefore a=13.5\cdots \fallingdotseq 14$

11) ②

$\log_2 10<\log_2 a<\log_2 50$

$\log_2 10<\log_2 b<\log_2 50$

$\log_2 b-\log_2 a=$정수

$0<\log_2\dfrac{b}{a}<\log_2 50-\log_2 10=\log_2 5=2.****$

$\therefore \log_2\dfrac{b}{a}=1 \text{ or } 2 \quad b=2a \text{ or } b=4a$

1) $b=2a$일 때, $a=11, 12, \cdots, 24$까지 가능

2) $b=4a$일 때, $a=11, 12$만 가능

$\therefore$순서쌍의 개수$=14+2=16$

12) ②

$$A=\log\frac{I_0}{I}=\log 10^{acd}=acd=\frac{4\pi k}{\lambda}cd$$

$$A_1=\frac{4\pi k}{\lambda_1}cd_1,\ A_2=\frac{4\pi k}{2\lambda_1}c4d_1$$

$$\therefore \frac{A_2}{A_1}=\frac{8}{4}=2$$

13) ③

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix}\Rightarrow A^2-(a+(-a))A+(-a^2-bc)E=O$

$\therefore A^2=(a^2+bc)E$

ㄱ) $a^2+bc=1\Rightarrow A^2=A$

$\therefore A^2=A^3=A^4=\cdots=A^{2009}=A$

ㄴ) $A^3-2A=(a^2+bc)A-2A=(a^2+bc-2)A=O$ 이므로

$a^2+bc-2=0$ or $A=O$

그런데 행렬 A의 성분은 모두 0이 아닌 실수이므로 $a^2+bc=2$

행렬 A의 $ad-bc=-(a^2+bc)=-2\neq 0$이므로 행렬 A는 역행렬을 가진다.

ㄷ) $A^3-4A^2+4E=O\Rightarrow(a^2+bc)A-4(a^2+bc)E+4E=O$

$\therefore (a^2+bc)A=4(a^2+bc-1)E$

i) $a^2+bc=0$이면 좌변$=O$, 우변$=-4E$가 되어 모순이다.

ii) $a^2+bc\neq 0$이면 a^2+bc로 양변을 나누어 정리하면

$A=\dfrac{a^2+bc-1}{a^2+bc}E=kE$ (단, k는 실수) 라 둘 수 있다.

즉, 좌변$=A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix}$, 우변$=kE=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k\end{pmatrix}$가 되어 $b=c=0$ 이어야만 한다.

그런데 문제의 조건에서 a, b, c는 모두 0이 아닌 실수라 했기 때문에 이는 모순이다.

i), ii)에 의해 $A^3-4A^2+4E=O$를 만족하는 실수 a, b, c는 존재하지 않는다.

그러므로 옳은것은 ㄱ과 ㄴ이다.

14) ⑤

(가) A사진이 나온 후 n초후에 B사진이 나올 확률이 p_n이므로

C, D사진이 나올 확률도 p_n이므로

(가)$=1-(p_n+p_n+p_n)=1-3p_n$

(나) $p_{n+1}=\dfrac{1}{3}\big(2p_n+(1-3p_n)\big)=-\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}$

$=\boxed{\text{(나)}}+\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ (나)$=-\dfrac{1}{3}p_n$

(다) p_1은 A사진이 나온 1초 후 B사진이 나올 확률이므로 $\dfrac{1}{3}$이다.

$\therefore\ p_n-\dfrac{1}{4}$의 첫째항은 $p_1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}=$(다)

$\therefore$ (가) $=1-3p_n$, (나)$=-\dfrac{1}{3}p_n$, (다)$=\dfrac{1}{12}$

15) ⑤

ㄱ. 참

ㄴ. A의 역행렬이 존재하지 않는다함은 무수히 많은 해를 갖거나 해를 하나도 갖지 않는 것입니다. 여기서 B의 역행렬도 존재하지 않으므로

$aq=pc$, $\dfrac{a}{c}=\dfrac{p}{q}$ 즉, 두 직선이 일치하는 경우입니다.

따라서 해는 무수히 많죠. 참

ㄷ. $k_1a+k_2b=0$

즉, $k_1=-\dfrac{k_2b}{a}$가 되어야 합니다.

$k_1c+k_2d=0$, $k_1=-\dfrac{k_2d}{c}\quad \therefore k_1=\dfrac{-k_2b}{a}=\dfrac{-k_2d}{c}$

$ad-bc=0$

즉, 역행렬이 존재하지 않을 때,

$k_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 성립한다는 것입니다.
그런데 역행렬이 존재하므로, $ad-bc=0$이 아닌 다른 경우겠죠.
즉, $k_1=k_2=0$이어야 합니다. 참

16) ④
주어진 그림은 확률밀도 함수기 때문에
$x=0$, $x=(1+\sqrt{3})r$, $f(x)$, x축으로 둘러쌓인 부분의 넓이는 1이다.
이 때, 그림1에 주어진 파란색 보조선을 그리면 주어진 부분의 넓이는 부채꼴, 직각삼각형, 사분원의 넓이의 합으로 표현됨을 알 수 있다.

주어진 부채꼴은 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$, 반지름이 $2r$이고

직각삼각형은 밑변$=\sqrt{3}r$, 높이는 r이며 사분원은 반지름이 r인 원 넓이의 $\frac{1}{4}$이다.

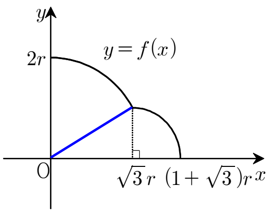
$\therefore$ 넓이$=\frac{1}{2}\cdot(2r)^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}r\cdot r+\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot r^2=1$

$\therefore\ r^2=\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{12}{11\pi+6\sqrt{3}}$

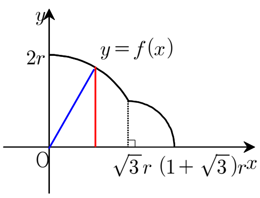
이 때, 구해야 하는 확률은 그림2의 빨간 보조선과 $x=0$, $f(x)$, x축으로 둘러쌓인 부분의 넓이를 구하면 된다. 이 때, 주어진 그림은 파란 보조선에 의해 직각삼각형과 부채꼴로 나눠서 구하면 된다.
직각삼각형은 밑변이 r, 높이가 $\sqrt{3}r$이고 부채꼴은 반지름이 $2r$, 중심각이 $\frac{\pi}{6}$이므로 구하려는 확률

$p=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}r\cdot r+\frac{1}{2}\cdot(2r)^2\cdot\frac{\pi}{6}=r^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{12}{11\pi+6\sqrt{3}}\cdot(6\sqrt{3}+4\pi)\cdot\dfrac{1}{12}=\dfrac{4\pi+6\sqrt{3}}{11\pi+6\sqrt{3}}$



<그림 1>



<그림 2>

17) ④
$A^n=a_nA+b_nE$ 의 양변에 A를 곱하면

$$\begin{aligned} A^{n+1}&=a_nA^2+b_nA\\ &=a_n(A+3E)+b_nA\\ &=(a_n+b_n)A+3a_nE\\ &=a_{n+1}A+b_{n+1}E \end{aligned}$$

$\therefore\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow B^2-(1+0)B+(1\cdot 0-1\cdot 3)E=O$ 이므로

$\therefore\ B^2=B+3E=xB+yE\Rightarrow x+y=4$

18) ②
집합 A의 식을 정리하면
$x-1>0$, $x+5>0$이 성립하므로 $x>1$ ($\because$ 진수조건)
$\log_4(x-1)\le\log_{16}(x+5)$
$\Rightarrow\log_4(x-1)\le\frac{1}{2}\log_4(x+5)$
$\Rightarrow\log_4(x-1)^2\le\log_4(x+5)$
$\Rightarrow(x-1)^2\le(x+5)$
$\Rightarrow x^2-2x+1\le x+5$
$\Rightarrow x^2-3x-4\le 0$
$\Rightarrow -1\le x\le 4$
그런데, 진수조건에 의해 $x>1$이어야 하므로 $1<x\le 4$
집합 B 식을 정리하기 위해 $2^x=t>0$라 치환하면
주어진식 : $t^3-11t^2+38t-40=0$
$f(t)=t^3-11t^2+38t-40$이라 두면
$f(2)=2^3-11\cdot 2^2+38\cdot 2-40=0$
이므로 주어진 방정식은 $t=2$를 근으로 갖는다.
주어진 식을 인수분해하면
$(t-2)(t^2-9t+20)=0\ \Rightarrow\ (t-2)(t-4)(t-5)=0$
인수정리를 이용해 근을 구하면 $t=2$ or 4 or 5이므로
$x=\log_2 2$ or $\log_2 4$ or $\log_2 5$
그런데 $\log_2 2=1$이므로 집합 A의 근이 되지 않는다.
$A\cap B=\{\log_2 4,\log_2 5\}$이므로
모든 원소의합$=\log_2 4+\log_2 5=\log_2 20$

19) ①
무한등비급수이고, 모두 닮음도형이며, 초항$=1$이기 때문에
($\because$ 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이$=1$) 공비만 구해주면 된다.
주어진 무한수열의 공비는 첫 번째 정사각형의 한변의 길이만 구하면 구할 수 있다.
i) <그림 1>에서 두 번째 정사각형의 한변의 길이를 a라 하면 A_2C_2는 $\sqrt{2}a$이다. 그런데 이 길이는
$\overline{HH'}-(\overline{A_2H'}+\overline{C_2H})=1-2\overline{A_2H'}$로 구할 수 있다.

이 때, $\overline{A_2H'}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because$ 삼각형 A_2B_1H에서

$A_2B_1=1$, $B_1H=\frac{1}{2}$인 직각삼각형)이므로 $2\overline{A_2H'}=2-\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{HH'}=1-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1=\sqrt{2}a\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

한편 이 무한등비급수는 넓이의 합을 묻고 있으므로 공비는 넓이비가 되고, 이는 곧 닮음비(=길이비)의 제곱이 된다.

닮음비$=\frac{a}{1}=a$이므로 공비는 a^2이 된다.

$\therefore a^2=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{1}{1-(2-\sqrt{3})}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

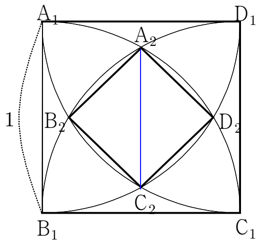
ii) <그림2>에서 빨간색 삼각형을 관찰하면

$\overline{A_2B_1}=\overline{D_2B_1}=1$, $\angle A_2B_1D_2=\frac{\pi}{6}$이므로 주어진 삼각형에서

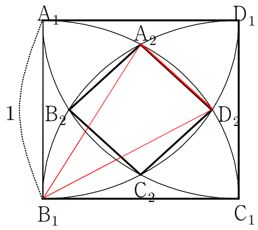
제2코사인 법칙을 쓰면

$\overline{A_2D_2}^2=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{6}=2-\sqrt{3}$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{1}{1-(2-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$



<그림1>



<그림2>

20) ③

주어진 그래프는 크게 $x>0$인 경우와 $x<0$인 경우로 나누어 생각해볼 수 있다.

i) $x<0$일 때

$2^{\frac{x}{2}}=\log_{\sqrt{2}}(-x)$

$y=2^{\frac{x}{2}}$의 그래프는 $x<0$인 범위에서 점근선($y=0$)으로 근접해가는 그래프인데 반해, $y=\log_{\sqrt{2}}(-x)$의 그래프는 x가 0쪽으로 갈때는 $-\infty$로 가고, x값이 작아지는 경우, ∞로 가는 그래프이므로 교점은 1개 생긴다.

ii) $x>0$일 때

$2^{\frac{x}{2}}=\log_{\sqrt{2}}(x)$

그런데, $2^{\frac{x}{2}}=(\sqrt{2})^x$이므로 두 그래프는 서로 역함수 관계에 있으며 $y=x$에 대칭이다. 또한 두 그래프의 교점 역시 $y=x$위에 존재한다.

즉, $y=2^{\frac{x}{2}}$ 그래프와 $y=x$의 교점을 조사해도 된다.

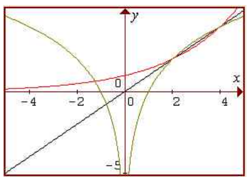
$2^{\frac{x}{2}}=\log_{\sqrt{2}}(x) \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}}=x \Leftrightarrow 2^x=x^2$의 교점을 조사하면 된다.

이 그래프는 $x=2$ or 4에서 만나기 때문에 교점을 2개 갖는다.

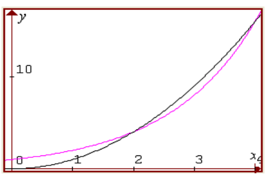
i), ii)에 의해 주어진 방정식은 총 3개의 실근을 갖는다.

(참고) 그래프는 다음과 같이 나타난다.

<그림1>은 $y=2^{\frac{x}{2}}$, $y=\log_{\sqrt{2}}|x|$, $y=x$의 그래프를 나타낸 것이며 <그림2>는 $y=2^x$과 $y=x^2$의 그래프를 나타낸 것이다.



<그림1>



<그림2>

21) ④

N(30, 4^2) 31이상일 확률은 $P(z\geq 0.25)=0.40$이다.

기부하는 날 수를 확률 변수로 잡으면

이항 분포 B(600, 0.4^2)을 따른다.

이는 정규분포 N(240, 12^2)으로 근사한다.

222000원 이상이라는 것은 222일 이상인 것이므로

표준정규분포표를 이용해 값을 구하면 0.93이 된다.

22) ⑤

$P_n(a_n, b_n)$이라 두면 $Q_n\left(\frac{a_n+2}{2}, \frac{b_n}{2}\right)$,

$R_n\left(\frac{\frac{a_n+2}{2}+1}{2}, \frac{\frac{b_n}{2}+\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{a_n+4}{4}, \frac{b_n+2\sqrt{3}}{4}\right)$

$P_{n+1}\left(\frac{\frac{a_n+4}{4}}{2}, \frac{\frac{b_n+2\sqrt{3}}{4}}{2}\right)=\left(\frac{a_n+4}{8}, \frac{b_n+2\sqrt{3}}{8}\right)$

$=(a_{n+1}, b_{n+1})$

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{a_n+4}{8}$, $b_{n+1}=\frac{b_n+2\sqrt{3}}{8}$

이 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\beta$이므로

$\alpha=\frac{\alpha+4}{8} \Rightarrow \alpha=\frac{4}{7}$

$\beta=\frac{\beta+2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow \beta=\frac{2\sqrt{3}}{7}$

$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{4+2\sqrt{3}}{7}$

23) ③

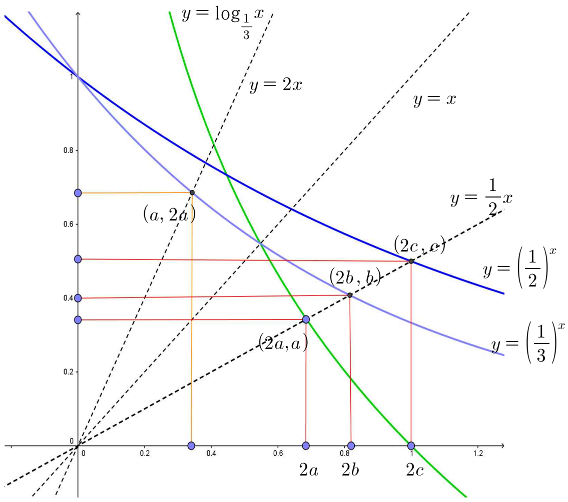
13!에서 5!부분을 제외하고 나면

$6\times7\times\cdots\times13=2^7\times3^4\times5\times7\times11\times13$

각 소인수들을 두 집합으로 분할하는 경우의 수$=\frac{2^6}{2}=32$가지

두 분할중에서 큰 것은 n, 작은 것은 k로 지정

24) ①



$\therefore\ a<b<c$

25) 48

(다)에서

$$A^2-B^2=AB-BA$$
$$\Leftrightarrow A^2-B^2-AB+BA=O$$
$$\Leftrightarrow A(A-B)+B(A-B)=O$$
$$\Leftrightarrow (A+B)(A-B)=O$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&6\\x&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&y\\-2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2y-24\\6x-24&xy-48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore x=4$, $y=12 \Rightarrow xy=48$

26) 11

$\log_{15}A=30 \Rightarrow A=15^{30}$

$\log_{45} B=15 \Rightarrow B=45^{15}$

$\therefore \frac{B}{A} = \frac{45^{15}}{15^{30}}=\left(\frac{45}{225}\right)^{15}=\left(\frac{1}{5}\right)^{15}$

$\log\frac{B}{A} = 15\log\frac{1}{5}= -15 \cdot \log5$

$= -15\log\frac{10}{2}=-15(1-0.3010)$

$=-15 \cdot 0.6990=-11+0.515$

∴소수점 이하 11번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나온다.

27) 16

A도시에서 B도시로 운행하는 고속버스의 소요시간을 확률변수 X라 두면 $X \sim N(m, 10^2)$을 따른다.

이 때, 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$ 는

$\overline{X} \sim N\left(m, \left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$를 따른다.

$P(m-5 \leqq \overline{X} \leqq m+5)$

$=\mathrm{P}(-5 \leqq \overline{X}-m \leqq 5)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{-5}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \leqq \frac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \leqq \frac{5}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2} \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=2\mathrm{P}\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$=0.9544$

$\mathrm{P}\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4772=\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 2)$ 이므로

$\therefore \frac{\sqrt{n}}{2}=2 \Rightarrow n=16$

28) 371

각 원의 끝 숫자를 보면 1, 4, 9, 16 ..... 즉 n^2이다.

즉, 19번째 반원의 마지막 수가 19^2이고 20번째 반원의 마지막 수가 20^2 이다.

따라서 마지막 원에서는 362~400까지의 숫자가 배열 되어있다.

총 39개의 숫자이다. $y=x$는 반원의 넓이를 4등분한다.

따라서 $39 \div 4=9+\frac{3}{4}$ 이므로 9번째 숫자는 지나고 10번째 숫자에 들어가게 된다. 즉, 362+(10-1)=371이다.

29) 323

(규칙1)에 따라 a번, (규칙2)에 따라 b번 움직였다 하면

$a+b=5$, $a+2b=8$, $2a+b=7$

위 연립방정식을 풀면 $a=2$, $b=3$가 나온다.

이 때, 내가 원하는 사건이 한번 일어날 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$ 이고

그러한 경우는 a 2개, b 3개를 나열하는 경우만큼 존재하게 된다.

∴ 5번의 이동으로 $(8,7)$에 도달할 확률

$= \frac{5!}{2!3!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} = \frac{q}{p}$

$\therefore\ p+q=323$

30) 171

$[x] = n$ 이라 두면

$n \leqq x < n+1$

$\Rightarrow n^3 \leqq x^3 < (n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1$

$\Rightarrow n^2 \leqq \frac{x^3}{n} \leqq n^2+3n+3 < n^2+3n+3+\frac{1}{n}$

$\therefore [x] = n$일 때, $\frac{x^3}{[x]}$ 가 자연수가 되는 x는 총

$n^2+3n+3-(n^2)+1=3n+4$개가 존재한다.

그런데 $1 \leqq x < 10$이므로 $[x]$ 값은 $1 \leqq [x] < 10$이므로

$1, 2, \cdots, 9$ 까지 총 9개가 존재한다.

$\therefore x$의 개수$=\sum_{n=1}^{9}(3n+4) = 3 \cdot 45 + 4 \cdot 9 = 171$

cf) 만약 $1 \leqq x < 9.5$와 같이 주어졌다면 $[x] = 9$ 되는 부분만 직접 나열하며 관찰하면 된다.