# 제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

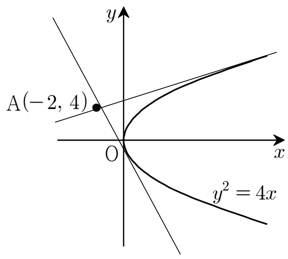
*1.* $(\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{250})^3$ 의 값은? [2점]

① 48 ② 54 ③ 72 ④ 96 ⑤ 108

*2.* $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$ 의 값은? [2점]

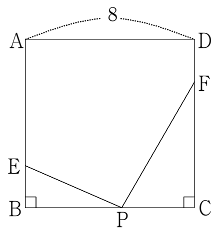
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

*3.* 점 A$(-2, 4)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은? [2점]




① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{3}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{5}{8}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

*4.* 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에서 그림과 같이 변 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 E, 변 CD를 3 : 1로 내분하는 점을 F라 하자. 변 BC 위의 양 끝점이 아닌 점 P에 대하여 두 직각삼각형 EBP, PCF의 둘레의 길이의 합이 28일 때, $10\overline{\mathrm{BP}}$ 의 값은? [3점]




① 45 ② 48 ③ 51 ④ 53 ⑤ 55

5. 다음은 $r$가 자연수일 때 $n \geq r$인 모든 자연수 $n$에 대하여 등식 $\sum_{i=r}^{n} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

[증명]

(1) $n=r$일 때

(좌변)$= {}_{r}\mathrm{C}_{r} = \boxed{\text{(가)}}$,

(우변)$= {}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1} = \boxed{\text{(가)}}$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(2) $n=k$ $(k \geq r)$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=r}^{k} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$이다.

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$\sum_{i=r}^{k+1} {}_{i}\mathrm{C}_{r} = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} + \boxed{\text{(나)}}$

$= \boxed{\text{(다)}} + \dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!} = \dfrac{(k+2)!}{(k+1-r)!\,(r+1)!}$

$= {}_{k+2}\mathrm{C}_{r+1}$

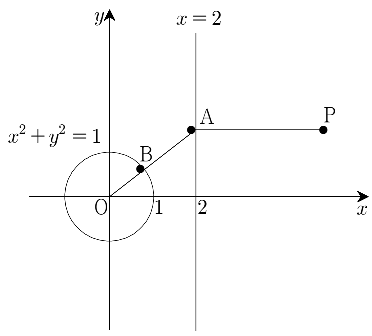
따라서 $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립한다.

(1), (2)에 의하여 $n \geq r$인 모든 자연수 $n$에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | 1 | ${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$ | $\dfrac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}$ |
| ② | 1 | ${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$ | $\dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$ |
| ③ | 1 | ${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$ | $\dfrac{(k+1)!}{(k-r)!\,(r+1)!}$ |
| ④ | $r$ | ${}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$ | $\dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$ |
| ⑤ | $r$ | ${}_{k+1}\mathrm{C}_{r}$ | $\dfrac{(k+1)!}{(k+1-r)!\,r!}$ |

6. 좌표평면에서 그림과 같이 직선 $x=2$ 위를 움직이는 점 A에 대하여 선분 OA가 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 B라 하자. 평면 위의 점 P가 다음 조건을 모두 만족시키며 움직이면 점 P가 나타내는 도형은 어떤 쌍곡선의 일부가 된다.




(가) $\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{AB}}$

(나) 직선 AP는 직선 $x=2$와 수직이다.

(다) 점 P의 $x$좌표는 2보다 크다.

이때, 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 방정식은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $y=\dfrac{1}{3}x$ ② $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}x$ ③ $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

④ $y=\dfrac{1}{2}x$ ⑤ $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

*7.* 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_n = \log_2(n!),\ b_n = a_{n+1} - a_n$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $b_{15} = 4$
>
> ㄴ. $9 < \sum_{k=1}^{5} b_k < 10$
>
> ㄷ. $n$이 짝수일 때 $b_n$의 값은 무리수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

*8.* 어느 보안 전문회사에서 바이러스 감염 여부를 진단하는 프로그램을 개발하였다. 그 진단 프로그램은 바이러스에 감염된 컴퓨터를 감염되었다고 진단할 확률이 94 %이고, 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터를 감염되지 않았다고 진단할 확률이 98 %이다. 실제로 바이러스에 감염된 컴퓨터 200대와 바이러스에 감염되지 않은 컴퓨터 300대에 대해 이 진단 프로그램으로 바이러스 감염 여부를 검사하려고 한다. 이 500대의 컴퓨터 중 임의로 한 대를 택하여 이 진단 프로그램으로 감염 여부를 검사하였더니 바이러스에 감염되었다고 진단하였을 때, 이 컴퓨터가 실제로 감염된 컴퓨터일 확률은? [3점]

① $\frac{94}{97}$ ② $\frac{92}{97}$ ③ $\frac{90}{97}$
④ $\frac{47}{49}$ ⑤ $\frac{47}{50}$

*9.* 다음은 어느 보석 상점에서 판매하는 다이아몬드 가격표의 일부이다.

| 무게(캐럿) | 가격(만원) |
|---|---|
| 0.3 | 70 |
| 0.6 | 210 |

이 상점에서 판매하는 다이아몬드의 무게가 $x$캐럿일 때, 그 가격 $f(x)$만원은

$f(x) = a(b^x - 1)$ (단, $a > 0$, $b > 1$인 상수)

로 주어진다고 한다. 이때, 이 상점에서 판매하는 무게가 1.5캐럿인 다이아몬드의 가격은? [3점]

① 1875만원 ② 1965만원 ③ 1980만원
④ 2170만원 ⑤ 2250만원

*10.* 2009년 8월 초 판매 가격이 200만원인 노트북컴퓨터의 판매 가격은 매월 초 직전 달보다 1 %씩 계속 인하된다고 하자. 어느 은행에 2009년 8월 초부터 2010년 7월 초까지 매월 초마다 일정한 금액을 적립하여, 12개월 후인 2010년 8월 초에 원금과 이자를 모두 찾아 바로 노트북컴퓨터를 구입하기로 하였다. 이 은행은 월이율이 1 %이고 매월마다 복리로 계산한다고 할 때, 매월 초에 적립해야 할 최소금액은? (단, $0.99^{12} = 0.89$, $1.01^{12} = 1.13$으로 계산하고 천원 단위에서 반올림하며, 세금은 고려하지 않는다.) [3점]

① 11만원 ② 12만원 ③ 13만원
④ 14만원 ⑤ 15만원

*11.* 임의의 실수 $x$ 에 대하여

$$x = n + \alpha \ (n\text{은 정수, } 0 \leqq \alpha < 1)$$

일 때, $n$을 $x$의 정수 부분, $\alpha$를 $x$의 소수 부분이라 하자. $10 < a < b < 50$인 두 자연수 $a$, $b$에 대하여 $\log_2 a$의 소수 부분과 $\log_2 b$의 소수 부분이 같을 때 순서쌍 $(a, b)$의 개수는? [3점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

*12.* 파장이 $\lambda$이고 강도가 $I_0$인 광선이 어떤 용액을 통과하면 이 용액에 광선이 흡수되어 입사광의 강도가 감소된다. 광선이 농도가 $c$인 용액을 통과한 거리가 $d$일 때의 광선의 강도를 $I$라 하면 $I$와 입사광의 강도 $I_0$ 사이에는

$$I = I_0 \times 10^{-acd}, \quad a = \frac{4\pi k}{\lambda} \quad (\text{단, } k\text{는 소멸계수})$$

인 관계가 성립하고, 이 용액의 흡광도 $A$를

$$A = \log I_0 - \log I$$

로 정의한다.

파장이 $\lambda_1$인 광선이 농도가 0이 아닌 어떤 용액을 통과한 거리가 $d_1$일 때의 흡광도를 $A_1$, 파장이 $2\lambda_1$인 광선이 동일한 농도의 이 용액을 통과한 거리가 $4d_1$일 때의 흡광도를 $A_2$라 하자. 이때, 소멸계수 $k$가 일정하다고 할 때 $\frac{A_2}{A_1}$의 값은? (단, $\lambda_1 d_1 \neq 0$이다.) [3점]

① 8 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

*13.* 폐구간 $[0, 1]$에서 $0 < f(x) < 1$를 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $f(a) = a$인 실수 $a$가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. $f'(b) < 1$인 실수 $b$가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 개구간 $(0, 1)$의 모든 $x$에 대하여 $\int_0^x f(t)dt < x$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**14.** 다음은 서로 다른 두 점에서 만나는 두 곡선 $y=x^2$ 과 $y=ax^2+bx+c$ 에 대하여 $d=b^2-4c(a-1)$ 이라 하고, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S$ 라 할 때

$$S=\frac{d\sqrt{d}}{6(a-1)^2}$$

임을 증명하는 과정이다. (단, $a\neq 0$ 이고 $a$, $b$, $c$ 는 실수)

> [증명]
> 두 곡선 $y=x^2$ 과 $y=ax^2+bx+c$ 가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $(a-1)x^2+bx+c=0$ 은 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ 를 갖는다.
> 따라서 $a\neq 1$, $d>0$ 이고
> $\beta-\alpha=\boxed{\text{(가)}}$ ………㉠
> 그런데 $\int_{\alpha}^{\beta}\{(a-1)x^2+bx+c\}\,dx$
> $=(\boxed{\text{(나)}})\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$
> $=\boxed{\text{(다)}}$ ………㉡
> 따라서 ㉠과 ㉡에 의해 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S$ 는
> $S=\left|\boxed{\text{(다)}}\right|=\dfrac{d\sqrt{d}}{6(a-1)^2}$

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4점]

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | $\dfrac{\sqrt{d}}{\lvert a-1\rvert}$ | $1-a$ | $\dfrac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$ |
| ② | $\dfrac{\sqrt{d}}{\lvert a-1\rvert}$ | $a-1$ | $\dfrac{a-1}{6}(\beta-\alpha)^3$ |
| ③ | $\dfrac{\sqrt{d}}{a-1}$ | $1-a$ | $\dfrac{a-1}{6}(\beta-\alpha)^3$ |
| ④ | $\dfrac{\sqrt{d}}{\lvert a-1\rvert}$ | $a-1$ | $\dfrac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$ |
| ⑤ | $\dfrac{\sqrt{d}}{a-1}$ | $a-1$ | $\dfrac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3$ |

**15.** $x$, $y$에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ 에서 행렬 $A$, $B$를

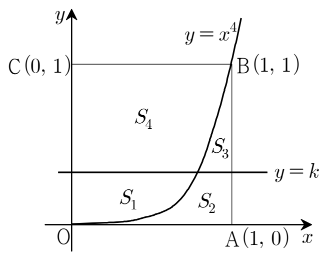
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}$라 하자.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $a, b, c, d, p, q$는 모두 0이 아닌 상수) [3점]

> ㄱ. $A$의 역행렬이 존재하면 연립방정식은 오직 한 쌍의 해를 갖는다.
> ㄴ. $A$, $B$의 역행렬이 모두 존재하지 않으면 연립방정식의 해는 무수히 많다.
> ㄷ. $A$의 역행렬이 존재할 때, 실수 $k_1$, $k_2$에 대하여 $k_1\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이면 $k_1=k_2=0$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**16.** 좌표평면 위에 네 점 O$(0, 0)$, A$(1, 0)$, B$(1, 1)$, C$(0, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y=x^4$과 직선 $y=k$ $(0<k<1)$에 의해 정사각형 OABC를 네 영역 으로 나눌 때, 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$라 하자. 이때, $|S_1-S_3|+|S_2-S_4|$의 최솟값은? [4점]



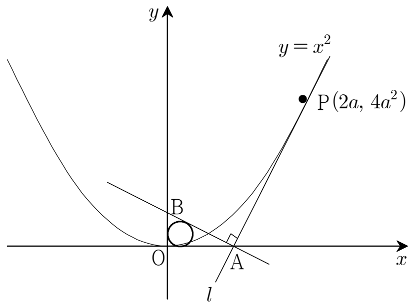

① $\dfrac{2}{5}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{5}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$

*17.* 좌표공간에서 두 점 $A(4, 0, 0)$, $B(-4, 0, 0)$과 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라 할 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

| |
|---|
| (가) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ |
| (나) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=16$ |

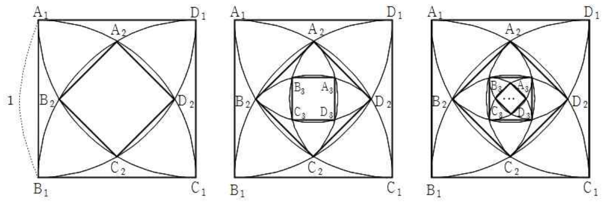
① $2\sqrt{2}\,\pi$ ② $2\sqrt{3}\,\pi$ ③ $4\pi$
④ $4\sqrt{2}\,\pi$ ⑤ $4\sqrt{3}\,\pi$

*18.* 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(2a, 4a^2)$에서의 접선 $l$이 $x$축과 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 접선 $l$에 수직인 직선이 $y$축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty} r(a)$의 값은? (단, $a>0$, O는 원점이다.) [4점]




① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

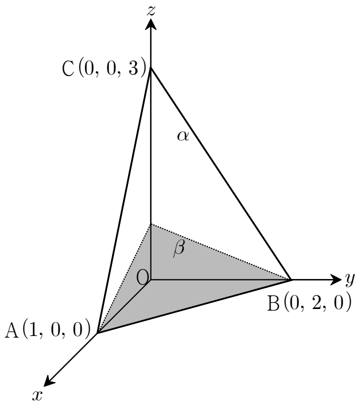
*19.* [그림1]과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$라 하자. 또 [그림2]와 같이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_2B_2}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 $A_3$, $B_3$, $C_3$, $D_3$이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 모든 자연수 $n$에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 네 꼭짓점에서 반지름의 길이가 $\overline{A_nB_n}$인 사분원을 그리고, 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 내부에서 각 사분원끼리 만나는 점을 각각 $A_{n+1}$, $B_{n+1}$, $C_{n+1}$, $D_{n+1}$ 이라 하자. 모든 자연수 $n$에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]




[그림1] [그림2]

① $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

*20.* 좌표공간에서 세 점 A$(1,\,0,\,0)$, B$(0,\,2,\,0)$, C$(0,\,0,\,3)$을 지나는 평면을 $\alpha$라 하자. 그림과 같이 평면 $\alpha$와 $xy$평면의 이면각 중에서 예각인 것을 이등분하면서 선분 AB를 포함하는 평면을 $\beta$라 할 때, 평면 $\beta$가 $z$축과 만나는 점의 $z$좌표는? [4점]




① $\frac{2}{3}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{8}{9}$　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{4}{3}$

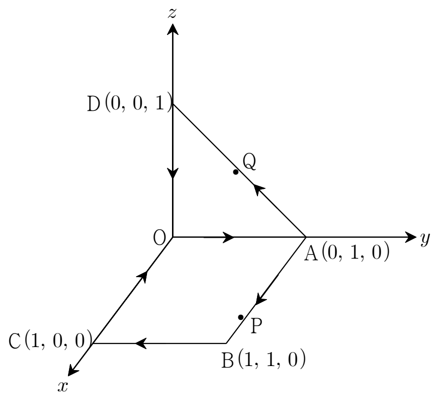
*21.* 어느 자영업자의 하루 매출액은 평균이 30만원이고 표준편차가 4만원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자영업자는 하루 매출액이 31만원 이상일 때마다 1000원씩을 자선단체에 기부하고 31만원 미만일 때는 기부를 하지 않는다고 한다. 이와 같은 추세가 계속된다고 할 때, 600일 동안 영업하여 기부할 총 금액이 222000원 이상이 될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

[표준정규분포표]

| $z$ | $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$ |
|---|---|
| 0.25 | 0.10 |
| 0.50 | 0.19 |
| 1.00 | 0.34 |
| 1.50 | 0.43 |

① 0.69　② 0.84　③ 0.90
④ 0.93　⑤ 0.98

*22.* 좌표공간에 네 점 A$(0,\,1,\,0)$, B$(1,\,1,\,0)$, C$(1,\,0,\,0)$, D$(0,\,0,\,1)$이 있다. 그림과 같이 점 P는 원점 O에서 출발하여 사각형 OABC의 둘레를 O→A→B→C→O→A→B→⋯ 의 방향으로 움직이며, 점 Q는 원점 O에서 출발하여 삼각형 OAD의 둘레를 O→A→D→O→A→D→⋯ 의 방향으로 움직인다.
두 점 P, Q가 원점 O에서 동시에 출발하여 각각 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]




ㄱ. 두 점 P, Q가 출발 후 원점에서 다시 만나는 경우는 없다.
ㄴ. 출발 후 4초가 되는 순간 두 점 P, Q사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.
ㄷ. 출발 후 2초가 되는 순간 두 점 P, Q사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

*23.* 최대공약수가 $5!$, 최소공배수가 $13!$이 되는 두 자연수 $k$, $n$ ( $k \leq n$ )의 순서쌍 $(k, n)$의 개수는? [4점]

① 25 ② 27 ③ 32 ④ 36 ⑤ 49

*24.* 다음 등식을 만족시키는 세 실수 $a$, $b$, $c$가 있다.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a}=2a,\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b}=b,\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c}=c$$

이때, 세 실수 $a$, $b$, $c$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $b<c<a$ ⑤ $c<a<b$

**주관식 문항 (25~30)**

*25.* 다음 세 조건을 모두 만족시키는 두 이차정사각행렬 $A$, $B$가 있다.

(가) $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ x & 12 \end{pmatrix}$
(나) $A-B=\begin{pmatrix} 6 & y \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$
(다) $A^2-B^2=AB-BA$

이때, 두 실수 $x$, $y$의 곱 $xy$의 값을 구하시오. [3점]

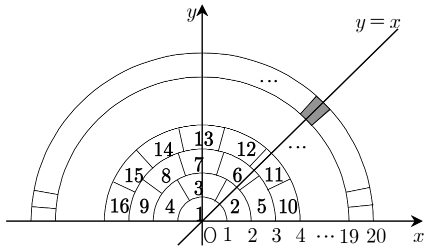
*26.* 다음 세 조건을 모두 만족시키는 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 있다.

(가) $-1 \leq x \leq 1$일 때, $f(x)=3x^2$
(나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(1-x)=f(1+x)$
(다) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(-x)=f(x)$

이때, $0<x<10$에서 함수 $y=[f(x)]$의 불연속점의 개수를 구하시오. (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

27. 5차다항식 $P(x)$에 대하여, $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누면 나머지가 8이고, $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누면 나머지가 $-8$일 때, $P(2)$의 값을 구하시오. [3점]

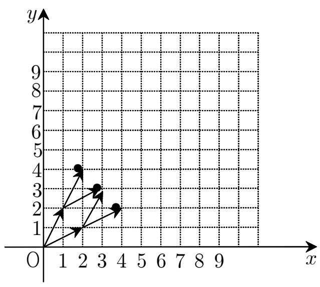
28. 좌표평면 위에 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 20 이하의 자연수인 반원이 20개 있다. $1 \leq k \leq 19$인 모든 자연수 $k$에 대하여 반지름의 길이가 $k$인 반원과 반지름의 길이가 $k+1$인 반원 사이의 영역을 $2k+1$등분한 다음, 각 부분에 시계 바늘이 도는 방향과 반대방향으로 자연수를 차례대로 나열하였다. 이때, 직선 $y=x$와 맨 바깥쪽 영역이 만나는 어두운 부분에 들어간 수를 구하시오. (단, 반지름의 길이가 1인 반원의 내부에는 1을 나열한다.) [4점]



29. 좌표평면 위에서 점 P는 한 번의 이동으로 다음의 (규칙1) 또는 (규칙2)를 따라 이동한다.

> (규칙1) $x$축의 양의 방향으로 1만큼, $y$축의 양의 방향으로 2만큼 이동한다.
> (규칙2) $x$축의 양의 방향으로 2만큼, $y$축의 양의 방향으로 1만큼 이동한다.

예를 들어, 원점 O에 있는 점 P가 두 번의 이동으로 도달할 수 있는 곳을 표시하면 그림과 같다.
점 P가 (규칙1)을 따라 이동할 확률은 $\frac{1}{3}$이고 (규칙2)를 따라 이동할 확률은 $\frac{2}{3}$일 때, 위와 같은 규칙으로 점 P가 원점 O에서부터 다섯 번의 이동으로 점 $(8, 7)$에 도달할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. 이때, 서로소인 두 자연수 $p$, $q$의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 매번 이동하는 사건은 서로 독립이다.) [4점]




30. 구 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=27$과 그 내부를 포함하는 입체를 $xy$평면으로 잘라 구의 중심이 포함된 부분을 남기고 나머지 부분을 버린다. 남아있는 부분을 다시 $yz$평면으로 잘라 구의 중심이 포함된 부분을 남기고 나머지 부분을 버린다. 이때, 마지막에 남아있는 부분에서 두 평면에 의해 잘린 단면의 넓이는 $a\pi+b$이다. 두 자연수 $a$, $b$의 합 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

**※ 확인 사항**
**문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.**

## 2010년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ②

$\left(-2^{\frac{4}{3}}+250^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(-2\times2^{\frac{1}{3}}+5\times2^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(3\times2^{\frac{1}{3}}\right)^3=27\times2=54$

[다른풀이]

$\sqrt[3]{16}=a$, $\sqrt[3]{250}=b$라 두면

$(\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{250})^3=(b-a)^3$
$=b^3-3b^2a+3ba^2-a^3$
$=250-3\sqrt[3]{250\cdot250\cdot16}+3\sqrt[3]{250\cdot16\cdot16}-16$
$=250-3\cdot\sqrt[3]{(1000)^2}+3\cdot\sqrt[3]{1000\cdot64}-16$
$=250-3\cdot100+3\cdot40-10=54$

2) ②

$\lim_{x\to2}\frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+2)}{(2-x)(\sqrt{6-x}+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

3) ③

기울기를 $m$ 이라고 두면 $y=mx+\frac{1}{m}$가 접선의 방정식이 된다.

이 접선이 (−2, 4)를 지나므로 대입하면 $4=-2m+\frac{1}{m}$이 되고,

$2m^2+4m-1=0$이므로 $m_1m_2=\frac{-1}{2}$이다.

4) ②

$BP=x$로 두면 $EP=\sqrt{x^2+4}$, $PE=\sqrt{36+(8-x)^2}$ 이다.

$\therefore$ 둘레의 길이 합$=16+\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-16x+100}=28$

$x^2-16x+100=144+x^2+4-24\sqrt{x^2+4}$

$\therefore x=\frac{24}{5}$

5) ①

(가) ${}_rC_r={}_{r+1}C_{r+1}=1$

(나) $\sum_{i=r}^{k+1}{}_i\mathrm{C}_r=\sum_{i=r}^{k}{}_iC_r+{}_{k+1}C_r={}_{k+1}C_{r+1}+{}_{k+1}C_r$

$\therefore$ (나)$={}_{k+1}C_r$

(다) ${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}$이므로

${}_{k+1}C_{r+1}+{}_{k+1}C_r=\frac{(k+1)!}{((k+1)-(r+1))!(r+1)!}+\frac{(k+1)!}{(k+1-r)!r!}$

$\therefore$ (다) $=\frac{(k+1)!}{(k-r)!(r+1)!}$

$\therefore$ (가)$=1$, (나)$={}_{k+1}C_r$, (다) $=\frac{(k+1)!}{(k-r)!(r+1)!}$

6) ④

동경을 $\theta$로 두면, $AO=\frac{2}{\cos\theta}$

$\therefore AB=\frac{2}{\cos\theta}-1$, $\overline{AP}=2\overline{AB}$이므로 P의 $x$ 좌표는

$2+2(\frac{2}{\cos\theta}-1)=\frac{4}{\cos\theta}$가 된다.

또한, $y$ 좌표는 $2\tan\theta$이다. 즉, $x=\frac{4}{\cos\theta}$, $y=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$

쌍곡선의 방정식 꼴을 만들기 위해서 분모에 cos이 있고 분자에 sin이 있으니 $1-\sin^2$ 꼴을 만들어 약분되게 한다.

즉, $x^2=\frac{16}{\cos\theta}$, $y^2=\frac{4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\therefore x^2-4y^2=16$ , $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

7) ⑤

$b_n=a_{n+1}-a_n=\log_2\frac{(n+1)!}{n!}=\log_2(n+1)$

ㄱ. $b_{15}=\log_2(1+15)=\log_2 16=4$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{5}b_k=\log_2 2+\log_2 3+\log_2 4+\log_2 5+\log_2 6=\log_2 720$

$\log_2 2^9<\log_2 720<\log_2 2^{10}$ (참)

ㄷ. $n$이 짝수이면 $n+1$은 홀수,

$\therefore$ $b_n=\log_2(n+1)$은 무리수 (참)

8) ①

| | 실제 감염됨 | 실제 감염안됨 |
|---|---|---|
| 감염으로 진단 | 188 | 6 |
| 비감염으로 진단 | 12 | 294 |

$\therefore\ \frac{188}{194}=\frac{94}{97}$

[다른풀이]

바이러스에 감염되었다고 진단될 사건을 A,

실제로 감염된 컴퓨터 수를 사건 B라 두면

$\mathrm{P(B|A)}=\frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A)}}=\frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{\mathrm{P(A\cap B)+P(A\cap B^c)}}$

$=\frac{200\cdot\frac{94}{100}}{200\cdot\frac{94}{100}+300\cdot\left(1-\frac{98}{100}\right)}=\frac{94}{97}$

9) ④

$f(0.3)=a(b^{0.3}-1)=70$

$f(0.6)=a(b^{0.6}-1)=210$

$\frac{f(0.6)}{f(0.3)}=\frac{(b^{0.3}-1)(b^{0.3}+1)}{b^{0.3}-1}=3$

$\therefore b^{0.3}=2\quad a=70$

$\therefore f(1.5)=70(b^{1.5}-1)=70(2^5-1)=2170$

10) ④

적립하는 금액을 $a$라고 하면

적금 합$=\frac{a(1.01)\{(1.01)^{12}-1\}}{0.01}=13.13a$

12개월이 지난 후 노트북의 가격$=200(0.99)^{12}=178$

$13.13a=178$

$\therefore a=13.5****\fallingdotseq14$

11) ②

$\log_2 10<\log_2 a<\log_2 50$

$\log_2 10<\log_2 b<\log_2 50$

$\log_2 b-\log_2 a=$ 정수

$0<\log_2\frac{b}{a}<\log_2 50-\log_2 10=\log_2 5=2.****$

$\therefore \log_2\frac{b}{a}=1$ or $2$ $\quad b=2a$ or $b=4a$

1) $b=2a$일 때, $a=11, 12, \cdots, 24$까지 가능
2) $b=4a$일 때, $a=11, 12$만 가능
∴순서쌍의 개수 $=14+2=16$

12) ②

$A=\log\frac{I_0}{I}=\log 10^{acd}=acd=\frac{4\pi k}{\lambda}cd$

$A_1=\frac{4\pi k}{\lambda_1}cd_1$ , $A_2=\frac{4\pi k}{2\lambda_1}c4d_1$

$\therefore \frac{A_2}{A_1}=\frac{8}{4}=2$

13) ⑤
ㄱ. $f(x)$ 와 $y=x$는 교점이 존재한다. (참)
ㄴ. $0<f(0)<1,\ 0<f(1)<1$이므로
$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}<1$인 $c$가 존재한다.
ㄷ. $\int_0^x f(t)dt < 1\times x$(사각형 넓이) (참)

14) ④

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{-b}{a-1}\right)^2-4\frac{c}{a-1}$

$=\frac{b^2-4c(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{d}{(a-1)^2}$

$\beta-\alpha=\boxed{\frac{\sqrt{d}}{|a-1|}}$

$\int_\alpha^\beta\{(a-1)x^2+bx+c\}\,dx$

$=\boxed{(a-1)}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=\boxed{\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3}$

$S=\left|\boxed{\frac{1-a}{6}(\beta-\alpha)^3}\right|=\frac{d\sqrt{d}}{6(a-1)^2}$

15) ⑤
ㄱ. 참
ㄴ. $A$의 역행렬이 존재하지 않는다함은 무수히 많은 해를 갖거나 해를 하나도 갖지 않는 것입니다. 여기서 B의 역행렬도 존재하지 않으므로
$aq=pc,\ \frac{a}{c}=\frac{p}{q}$ 즉, 두 직선이 일치하는 경우입니다.
따라서 해는 무수히 많다. 참
ㄷ. $k_1a+k_2b=0$

즉, $k_1=-\frac{k_2b}{a}$가 되어야 합니다.

$k_1c+k_2d=0,\ k_1=-\frac{k_2d}{c}$

$\therefore k_1=\frac{-k_2b}{a}=\frac{-k_2d}{c}$

$ad-bc=0$ 즉, 역행렬이 존재하지 않을 때,

$k_1\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 성립한다는 것입니다.
그런데 역행렬이 존재하므로, $ad-bc=0$이 아닌 다른 경우겠죠.
즉, $k_1=k_2=0$이어야 합니다. 참

16) ③

$S_2+S_3=\frac{1}{5}\cdots$① , $S_1+S_4=\frac{4}{5}\cdots$②

$S_1+S_2=k\cdots$③ , $S_3+S_4=1-k\cdots$④

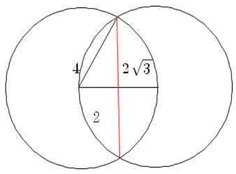
②,④에서 $|S_1-S_3|=\left|k-\frac{1}{5}\right|$

①,④에서 $|S_2-S_4|=\left|k-\frac{4}{5}\right|$

$|S_1-S_3|+|S_2-S_4|=|k-\frac{1}{5}|+|k-\frac{4}{5}|$

$\frac{1}{5}<k<\frac{4}{5}$일 때, 최솟값 $\frac{3}{5}$을 갖는다.

17) ⑤
(가) 조건의 의미: A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 구위에 점 P가 있다.
(수직이므로 내적=0)
(나) 조건의 의미: A에서 거리가 4인 곳에 점 P가 있다. 즉, A를 중심으로 하고 반지름이 4인 원 위에 점 P가 있다. 두 구의 공통부분은 원입니다. 그 원의 길이를 구하면 됩니다.




(가) $(x-4, y, z)\cdot(x+4, y, z)=0\rightarrow x^2+y^2+z^2=16$
(나) $(x-4)^2+y^2+z^2=16$
$\rightarrow x=2$ 평면

18) ③
$y'=2x$ 이므로
점 $P(2a, 4a^2)$에서의 접선은
$y=4a(x-2a)+4a^2=4ax-4a^2$
$y=0$ 대입하면 $x=a$ $\quad\therefore A(a, 0)$
점 $A$를 지나고 접선에 수직인 직선은

$y=-\frac{1}{4a}(x-a)=-\frac{1}{4a}x+\frac{1}{4}$

$x=0$ 대입하면 $y=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore B(0, \frac{1}{4})$

$\overline{OA}=a,\ \overline{OB}=\frac{1}{4},\ \overline{AB}=\sqrt{a^2+\frac{1}{16}}$

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot a=\frac{1}{8}a$

원의 반지름 $r(a)=\frac{2\cdot\frac{1}{8}a}{a+\frac{1}{4}+\sqrt{a^2+\frac{1}{16}}}$

$\therefore \lim_{a\to\infty}r(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{4}a}{a+\frac{1}{4}+\sqrt{a^2+16}}=\frac{1}{8}$

19) ①

첫째항 : 1 , 공비 : $2-\sqrt{3}$

20) ①

삼수선의 정리를 이용하여 이면각 $\theta$의 코사인 값을 구하면

$\cos\theta = \frac{2}{7}$

$2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{7} \quad \therefore \cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{14}}$

색칠한 새로운 평면에 대해서도 삼수선의 정리를 사용하고 구한 코사인 값을 이용해 $z = \frac{2}{3}$인 것을 알 수 있다.

21) ④

N(30, $4^2$) 31이상일 확률은 $P(z \geq 0.25) = 0.40$이다.
기부하는 날 수를 확률 변수로 잡으면
이항 분포 B(600, $0.4^2$)을 따른다.
이는 정규분포 N(240, $12^2$)으로 근사한다.
222000원 이상이라는 것은 222일 이상인 것이므로
표준정규분포표를 이용해 값을 구하면 0.93이 된다.

22) ④

ㄱ. 점 P는 4초 만에 원점에 온다.
점 Q는 $2+\sqrt{2}$초 만에 원점에 온다. 각각 a, b바퀴를 돌았다고 하면 $4a = (2+\sqrt{2})b$를 만족하는 순서쌍은 (0. 0)밖에 없으므로 처음 출발 할 때만 만난다.
ㄴ. $2-\sqrt{2}$이다.
ㄷ. 참

23) ③

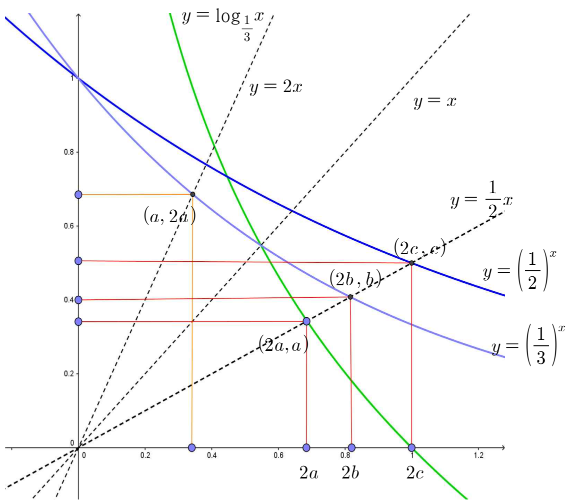
13!에서 5!부분을 제외하고 나면

$6 \times 7 \times \cdots \times 13 = 2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

각 소인수들을 두 집합으로 분할하는 경우의 수 $= \frac{2^6}{2} = 32$가지

두 분할중에서 큰 것은 $n$, 작은 것은 $k$로 지정

24) ①




$\therefore a < b < c$

25) 48

$(A+B)(A-B) = O$, $x = 4$, $y = 12$

26) 25

그래프를 그려보면 $y = 1, 2, 3$ 에서 불연속이므로
불연속점의 개수는 25개이다.

27) 46

$P'(1) = P''(1) = P'(-1) = P''(-1) = 0$이므로
$y = P'(x)$는 $(x-1)^2(x+1)^2$으로 인수분해 된다.
즉, $P'(x) = a(x-1)^2(x+1)^2 = a(x^2-1)^2 = a(x^4-2x^2+1)$

$P(x) = a\int (x^4 - 2x^2 + 1)dx = a(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x) + C$

$P(1) = \frac{8}{15}a + C = 8$

$P(-1) = -\frac{8}{15}a + C = -8$

연립하면 $a = 15$, $C = 0$

$\therefore P(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

$\therefore P(2) = 46$

28) 371

각 원의 끝 숫자를 보면 1, 4, 9, 16 ..... 즉 $n^2$이다.
(홀수의 합이니 그럴 수 밖에 없다.)
즉, 19번째 반원의 마지막 수가 19^2이고 20번째 반원의 마지막 수가 20^2 이다.
따라서 마지막 원에서는 362~400까지의 숫자가 배열 되어있다. 총 39개의 숫자이다. $y = x$는 반원의 넓이를 4등분한다. 따라서

$39 \div 4 = 9 + \frac{3}{4}$이므로 9번째 숫자는 지나고 10번째 숫자에 들어가게 된다.

즉, 362+(10-1)=371이다.

29) 323

(규칙1)에 따라 $a$번, (규칙2)에 따라 $b$번 움직였다 하면

$a + b = 5$, $a + 2b = 8$, $2a + b = 7$

위 연립방정식을 풀면 $a = 2$, $b = 3$가 나온다.

이 때, 내가 원하는 사건이 한번 일어날 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$이고

그러한 경우는 $a$ 2개, $b$ 3개를 나열하는 경우만큼 존재하게 된다.

$\therefore$ 5번의 이동으로 $(8, 7)$에 도달할 확률

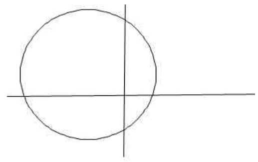
$= \frac{5!}{2!3!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243} = \frac{q}{p}$

$\therefore p + q = 323$

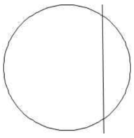
30) 45

중심에서 $xy$ 까지의 거리가 3이므로 그 평면이 만드는 원의 반지름은

$(3\sqrt{3})^2 - 3^2 = r^2 \quad \therefore r = 3\sqrt{2}$



이것은 $yz$ 평면의 경우도 마찬가지이다.
그런데 두 평면이 서로를 중심에서 3만큼 떨어지게 남겨두고 자르므로
여기서 왼쪽 부분의 넓이가 두 평면에 의해 잘린 단면의 한 부분이 된다.
이 넓이를 구해서 곱하기 2를 하면 된다.



$2\times(9\pi+\frac{9}{2}\pi+9)=27\pi+18$