2009학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형

성명	

수험번호							

1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3=48$, $a_4+a_5+a_6=12$일 때, $a_7+a_8+a_9$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

2. 4자리의 자연수 중에서 9의 배수 전체의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소 중에서 각 자리의 수가 1이상이고 3이하인 것의 개수는? [2점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 X를 $X=\{A^n \mid n$은 자연수$\}$라 하자. 집합 X의 두 원소 P, Q가 다음 두 조건을 만족시킬 때, Q의 모든 성분의 합은? [3점]

> (가) P의 모든 성분의 합은 -3이다.
>
> (나) $PQ=E$ (단, E는 단위행렬이다.)

① -3 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ 3

4. 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 하자. 이때 세 수 a, b, c의 최대공약수가 2일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{17}{216}$ ③ $\frac{19}{216}$ ④ $\frac{5}{54}$ ⑤ $\frac{25}{216}$

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 모두 만족한다.

(가) $a_1 = 10$, $b_1 = 1$

(나) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이 때, $\lim_{n \to \infty}(a_n + b_n)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

6. 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 두 조건

(가) $A + B = E$

(나) $A^2 = -E$

를 만족한다. 다음 중 행렬 $(AB)^2 + 2B^{-1}$와 같은 행렬은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

① $E - A$ ② A ③ $2E$ ④ $E + 3A$ ⑤ $4E - 3A$

7. 양의 실수 x에 대하여 $\log_{10} x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

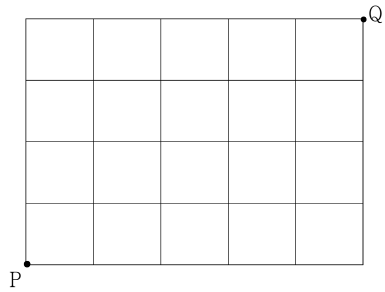
ㄱ. $f(1234) + f(0.1234) = 2$

ㄴ. $g(5034) - g(0.05034) = 0$

ㄷ. $\log_{10} a - \log_{10} 0.0762 = 4$이면 $f(a) = 2$이다.

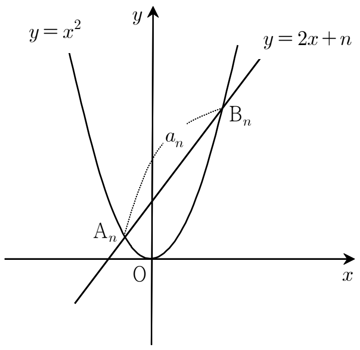
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 그림과 같은 직사각형 모양의 도로가 있다. P 지점에서 출발하여 Q 지점까지 도로를 따라 최단 거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 모두 7번이 되는 경로의 수는? [3점]



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

9. 그림과 같이 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+n$이 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+1}}{a_n}$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

10. 어느 전자 회사에서는 신제품을 홍보하기 위해 7월 1일에 인터넷 사이트를 개설하여 한 달간 운영하였다. 이 사이트의 7월 1일의 회원 수가 2만 명이었고, 전날에 비해 매일 일정한 비율로 회원 수가 증가하여 7월 7일의 회원 수는 7월 1일의 회원 수보다 21% 증가하였다. 7월 4일의 회원 수가 7월 1일의 회원 수보다 A% 증가하였다고 할 때, A의 값은? [3점]

① 9 ② 9.5 ③ 10 ④ 10.5 ⑤ 11

11. 서류전형 후 필기시험을 실시하는 어느 시험에서 720명이 서류전형에 합격하였다. 서류전형 합격자는 필기시험에서 A, B, C, D 4과목 중 2과목을 반드시 선택해야 하고, 각 과목을 선택할 확률은 모두 같다고 한다. 4과목 중 A, B를 선택한 서류전형의 합격자의 수가 110명 이상 145명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0166 ② 0.1359 ③ 0.1525
④ 0.8351 ⑤ 0.9104

12. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.
ㄴ. 수열 $\{a_n-b_n\}$이 수렴할 때, 수열 $\{a_n\}$이 발산하면 수열 $\{b_n\}$도 발산한다.
ㄷ. 수열 $\{a_nb_n\}$이 0으로 수렴할 때, 수열 $\{a_n\}$이 0으로 수렴하지 않으면 수열 $\{b_n\}$은 0으로 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지나면 $a=\log_3(b+2)-1$이다.
> ㄴ. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=3^x$의 그래프는 한 점에서 만난다.
> ㄷ. 부등식 $f(x)<3^x$를 만족시키는 x의 값의 범위는 $x<0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 어느 대학은 학교 발전을 위하여 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율을 증가시키기로 하였다. 2008년에 이 대학의 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율은 4%이다. 이후 대학예산의 증가율은 매년 12%, 시설투자비의 증가율은 매년 20%로 일정하다면 처음으로 대학예산에서 시설투자비가 차지하는 비율이 6% 이상이 될 때는 2008년을 기준으로 몇 년 후 부터인가? (단, $\log_{10}1.12=0.0492$, $\log_{10}1.20=0.0792$, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ 계산한다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{n(2n+1)}\right\}=\frac{n(n+3)}{12}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (1) $n=1$일 때 (좌변)$=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{3}$이므로
> 주어진 등식은 성립한다.
> (2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면
> $$\sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{m(2m+1)}\right\}=\frac{m(m+3)}{12}$$
> 이제, $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.
> $$\sum_{k=1}^{m+1} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\right\}$$
> $$=\sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\right\}+\frac{\text{(가)}}{2m+3}$$
> $$=\sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{\text{(나)}}\right\}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2+\frac{\text{(가)}}{2m+3}$$
> $$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m+1}\text{(다)}$$
> $$=\frac{(m+1)(m+4)}{12}$$
> 그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.
> 따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	m	$(m+1)(2m+3)$	$(k-1)^2$
②	m	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
③	$m+1$	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
④	$m+1$	$(m+1)(2m+3)$	k^2
⑤	$m+1$	$m(2m+1)$	k^2

16. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $f(A)=a+d$라 하자. 세 이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(A-B)=f(A)-f(B)$
ㄴ. $f(AB)=f(BA)$
ㄷ. 영행렬이 아닌 행렬 C와 역행렬을 갖는 두 행렬 A, B에 대하여 $M=ACA^{-1}-BCB^{-1}$라 하면 $f(M)=0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 방정식 $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 ω^n의 실수부분을 a_n이라 정의할 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k a_{k+1} a_{k+2})$의 값은? [4점]

① 0 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

18. 함수 $f(x)=|2^x-2|$의 그래프 위의 세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(c,\ f(c))$가 $0<a<b<c$와 $f(a)>f(b)>f(c)$를 만족할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $0<c<1$
ㄴ. $0<f(a)+f(b)+f(c)<3$
ㄷ. 방정식 $f(x)-a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 사관학교 생도의 60%는 입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠고, 40%는 배우지 않았다고 한다. 확률과 통계 과목을 배운 생도들의 20%, 배우지 않은 생도들의 10%는 통계학 성적이 A학점이었다. 임의로 한 명의 생도를 뽑았더니 그 생도의 통계학 성적이 A학점이었을 때, 그 생도가 입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠을 확률은? [3점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

20. $f(x)=\log_2 x$ 라 할 때, $0<x<1$ 에서 방정식

$$\log_2\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$$

을 만족시키는 모든 x의 값을 가장 큰 수부터 차례대로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ 이라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

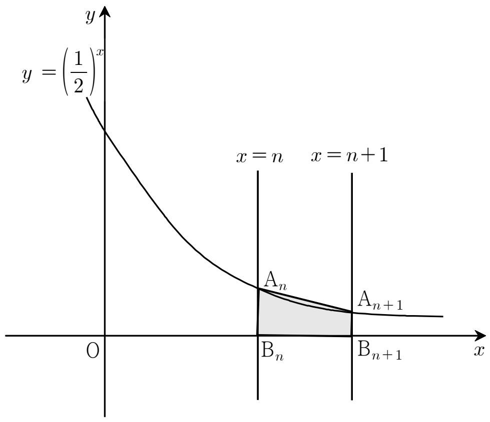
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ 2

21. 10개의 구슬이 들어있는 주머니가 있다. 10개의 구슬 각각에는 1부터 10까지 서로 다른 자연수가 하나씩 적혀 있다. 이 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 집어넣는 시행을 세 번 반복하여 첫 번째 나온 수를 a, 두 번째 나온 수를 b, 세 번째 나온 수를 c라 하자. 다음과 같은 규칙으로 X를 정할 때, $X=5$일 확률은? [4점]

> [규칙 1] $a,\ b,\ c$가 모두 다르면 중간 크기의 수를 X라 한다.
> [규칙 2] $a,\ b,\ c$ 중에서 두 개 이상이 같으면 같은 수를 X라 한다.

① $\frac{18}{125}$ ② $\frac{37}{250}$ ③ $\frac{19}{125}$ ④ $\frac{39}{250}$ ⑤ $\frac{4}{25}$

22. 그림과 같이 모든 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 만나는 점을 A_n, x축과 만나는 점을 B_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

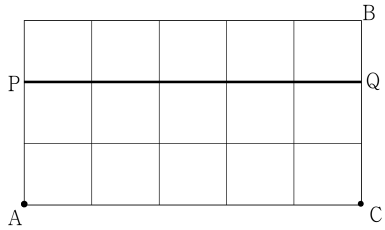


① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

23. 주사위 한 개를 n번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수들 중에서 가장 큰 수를 a_n, 가장 작은 수를 b_n이라 하자. 예를 들면, 주사위를 한 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수가 3이면 $a_1 = b_1 = 3$이고, 주사위를 두 번 던지는 시행에서 나타나는 눈의 수가 4, 6이면 $a_2 = 6$, $b_2 = 4$이다. $a_n - b_n < 5$가 될 확률을 p_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$의 값은? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

24. 철수가 자동차로 그림과 같은 바둑판 모양의 도로를 따라 A 지점에서 약속 장소인 B 지점까지 최단 거리로 가는 도중에, 도로 PQ 위에서 약속 장소가 C 지점으로 변경되었다는 연락을 받고 곧바로 C 지점을 향하여 도로를 따라 최단 거리로 이동하였다. 이 때, 철수가 A 지점에서 출발하여 C 지점까지 최단 거리로 이동하는 경로의 수는? (단, 연락 받은 위치가 달라도 이동 경로가 같으면 동일한 경우로 간주한다.) [4점]



① 120 ② 122 ③ 124 ④ 126 ⑤ 128

25. 세 실수 a, b, c가 $ab = 12$, $bc = 8$, $2^a = 27$을 만족시킬 때, 4^c의 값을 구하시오. [2점]

26. 5장의 카드가 들어있는 상자가 있다. 5장의 카드 각각에는 1부터 5까지 서로 다른 자연수가 하나씩 적혀 있다. 이 상자에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 넣는 시행을 4번 반복하여 제 i번째에 꺼낸 카드에 적힌 숫자를 a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$라 하자. $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$가 될 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

27. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$a_n A + b_n B = \begin{pmatrix} 6n-3\cdot 2^n & 12n+3\cdot 2^n \\ 3n+2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix} \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (4n^2-1)2^n + 1$$

을 만족시킬 때, b_6의 값을 구하시오. [4점]

29. 어느 임업연구소의 A, B 두 연구원이 소나무 군락지의 소나무들의 생장 상태를 알아보기 위하여 100 그루의 소나무들을 각각 a, b 그루로 나누어 키를 조사하였더니 오른쪽 표와 같은 결과를 얻었다. A, B 두 연구원이 각자 95 % 의 신뢰도로 군락지의 소나무들의 키의 평균을 추정하였더니 신뢰구간의 길이가 같았다. 소나무들의 키의 분포는 정규분포를 따른다고 할 때, $|a-b|$의 값을 구하시오.

	표본의 크기	표준편차
A연구원	a그루	3 cm
B연구원	b그루	4 cm

(단, 표준정규분포에서 $\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.96) = 0.475$ 로 계산한다.)

[4점]

30. 자연수 n에 대하여 $2^n \leqq x \leqq 2^{n+10}$에서 $|\log_2 x - 2n|$의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2009년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ③

$a_n = ar^{n-1}$이라 두면

$a + ar + ar^2 = 48$, $ar^3 + ar^4 + ar^5 = 12 = r^3(a + ar + ar^2)$

$\therefore r^3 = \frac{1}{4}$

$\therefore a_7 + a_8 + a_9 = ar^6 + ar^7 + ar^8 = r^6(a + ar + ar^2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 48 = 3$

2) ①

9의 배수=자릿수의 합이 9의 배수여야 한다.
1, 2, 3을 4번 이하로 사용한 숫자의 합으로 만들 수 있는 수의 조합은 (2, 2, 2, 3), (1, 2, 3, 3)의 2가지가 있다.
또한, 이 2가지를 나열하면 그 수 자체가 하나의 자연수에 대응되므로

$\therefore \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} = 4 + 12 = 16$

3) ④

$a + d = -1$, $ad - bc = 1$이므로 케일리-해밀턴의 정리를 쓰면

$A^2 + A + E = O \Rightarrow A^3 = E$ ⋯ ① 이다.

그러므로 A^k는 주기가 3이므로 집합 X의 원소는

$A, A^2, A^3 = E$의 3종류만 있게 된다.

여기서 각각의 행렬을 구해보면

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2 = -A - E = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$이다.

그러므로 성분의 합이 -3이 되는 행렬은 A^2행렬이고,

①식에 의해 $Q = A$이다.

$\therefore Q$의 성분의합$=1$

4) ⑤

최대공약수가 2라고 하였으므로 짝수에서 그 경우를 따져주면 된다.
짝수는 2, 4, 6이 있고, 사용하는 짝수의 수에 따라 분류할 수 있다.

i) 숫자를 1개만 사용하는 경우
이 경우는 세 번 모두 2가 나오는 경우만 해당하므로 경우의 수는 1가지이다.

ii) 숫자를 2개 사용하는 경우
사용하는 숫자의 수를 나눠서 새는 방법은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

2번 사용하는 수	1번 사용하는 수
2	4
4	2
2	6
6	2
4	6
6	4

총 6가지 경우가 생기고, a, b, c에 배분하는 경우는 각각 $\frac{3!}{2!} = 3$이므로 총 18가지가 나온다.

iii) 숫자 3개를 사용하는 경우
이 경우는 2, 4, 6을 모두 사용하는 경우이므로 2, 4, 6을 a, b, c에 배분하는 경우의 수와 같으므로 총 6가지의 경우의 수가 있다.

$\therefore$ 확률$= \frac{1 + 18 + 6}{216} = \frac{25}{216}$

5) ②

(나) 식에서 $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$ 이다.

여기서 윗식의 n자리에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$ $(\because b_{n+1} = a_n)$

$a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = 0$이므로 이 점화식은 계차수열이 등비수열인 점화식이다.

그러므로 일반항 $a_n = p + q \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이라 둘 수 있다.

또한, $a_1 = 10$, $b_1 = 1$이므로 $a_2 = \frac{11}{2}$이다.

$\therefore a_n = 7 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 7$이다.

이 때, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 7$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 14$

6) ④

$A + B = E$의 왼쪽에 A를 곱하면 $A^2 + AB = A$이므로

$AB = A + E$

$\therefore (AB)^2 = (A + E)^2 = A^2 + 2A + E = 2A$

$A + B = E$의 오른쪽에 B를 곱하면 $AB + B^2 = B$

$A + B = E$의 양변을 제곱시키면

$A^2 + AB + BA + B^2 = E$이므로 $BA + B = 2E$

$B^{-1} = \frac{1}{2}(A + E) \Rightarrow 2B^{-1} = A + E$,

$\therefore (AB)^2 + 2B^{-1} = 2A + A + E = E + 3A$

7) ⑤

ㄱ. $f(1234) = 3$, $f(0.1234) = -1$이므로
$f(1234) + f(0.1234) = 3 - 1 = 2$

ㄴ. $g(5034) = \log 5.034$, $g(0.05034) = \log 5.034$이므로
$g(5034) - g(0.05034) = 0$

ㄷ. $\log_{10} a = \log_{10} 0.0762 + 4 = \log_{10} 762$이므로 $f(a) = 2$

8) ①

방향을 바꾼다는 것은 가로세로의 진행방향이 바뀐다는 것을 의미한다.
(ex : →↑, ↑→)
즉, 7번 방향을 바꾼다는 것은 가로의 진행방향과 세로의 진행방향으로 각각 4번씩 진행할 때, →↑와 같이 꺾이는 부분이 7군데 발생한다는 것이다.
이 때 ↑방향이 4번, → 방향이 4번 나와야 된다.
이 때, 세로방향은 4칸, 가로방향은 5칸이므로 가로방향에서 한 번은 2칸을 연속으로 진행해야 한다.
또 가로방향과 세로방향이 서로 엇갈려서 나와야 하므로 경우의 수는 가로방향 진행으로 시작하는 경우와 세로방향의 진행으로 시작되는 경우로 나눌 수 있다.

i) 가로방향으로 진행을 시작하는 경우
→↑→↑→↑→↑으로 진행하는 경우이고, 4개의 가로방향진행 중 2칸을 움직일 순간을 구하면 되므로 총 4가지의 경우가 있다.

ii) 세로방향으로 진행을 시작하는 경우
↑→↑→↑→↑→ 으로 진행하는 경우이고, 4개의 가로방향진행 중 2칸을 움직일 순간을 구하면 되므로 총 4가지의 경우가 있다.

∴ i), ii)에서 총 경우의 수는 8가지가 있다.

cf) 선택지에 나와있는 숫자가 적으므로 직접 세어도 된다.
(→→↑→↑→↑→↑) (→↑→→↑→↑→↑) (→↑→↑→→↑→↑)

$(\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow)$ $(\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow)$ $(\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow)$
$(\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow)$ $(\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow)$

9) ③

$A_n(\alpha, 2\alpha+n)$, $B_n(\beta, 2\beta+n)$이라 두면

α와 β는 방정식 $x^2=2x+n$의 두 근이다.

$a_n=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta-2\alpha)^2}=\sqrt{5(\beta-\alpha)^2}$ 이다.

여기서, $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-n$이고 $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이다.

$\therefore(\beta-\alpha)^2=4-4\cdot(-n)=4n+4$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n+1}}{\sqrt{5(4n+4)}}=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

10) ③

매일 $r\%$씩 증가한다 하고 7월 1일 이후로 n일 후의 회원수를 $f(n)$이라 하면

$f(n)=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ (단, $A=20000$)

7월 7일의 회원수는 $1.21A=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^6$

$\Rightarrow\left(1+\frac{r}{100}\right)^6=1.21=(1.1)^2$

구하라는 값은 3일후 까지의 회원수의 증가율이다.

$\therefore A\left(1+\frac{r}{100}\right)^3=1.1A=\left(1+\frac{1}{10}\right)\Rightarrow$ 3일간 10% 증가했음을 알 수 있다.

11) ④

4과목중 2과목을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이므로

A, B를 선택할 확률은 $\frac{1}{6}$이 된다.

A, B를 선택한 서류전형자의 수를 확률변수 X라 두면

X는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$를 따른다.

이 때, 720은 충분히 큰 수이므로 X는

정규분포 $N(120, 10^2)$에 근사한다.

$$\begin{aligned}\therefore P(110\le X\le 145)&=P(-1\le Z\le 2.5)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2.5)\\&=0.3413+0.4938=0.8351\end{aligned}$$

12) ②

ㄱ. $a_nb_n=c_n$이라 두면 $b_n=\frac{c_n}{a_n}$이다.

여기서, a_n이 수렴한다 해도 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이면 이 극한값은 존재하지 않는다.

ㄴ. 만약 수열 $\{b_n\}$이 수렴한다고 가정해보자.

그렇게 되면 $\{a_n\}$은 발산하므로 $\{a_n-b_n\}$은 수렴할 수 없다

$\therefore\lim_{n\to\infty}b_n$은 발산한다.

ㄷ. $a_n:1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,\cdots$ 라 두자.

$b_n\ :0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots$

그럼 a_nb_n은 0으로 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n$값이 존재 하지는 않는다.

13) ⑤

$f(x)=3^{x+1}-2$

ㄱ. $b=3^{a+1}-2$이므로 $b+2=3^{a+1}$, $a+1=\log_3(b+2)$이므로

$\therefore a=\log_3(b+2)-1$

ㄴ. $3^x=t>0$라 두면 $t=3t-2$, $t=1$이므로 $x=0$에서 한번 만난다.

cf) $y=3^x$과 $y=f(x)$의 그래프를 그려 확인할 수도 있다.

ㄷ. $3^x=t>0$라 두면 $3t-2<t$의 부등식의 해를 푸는것과 같다.

$t<1$이므로 $3^x<1=3^0$이므로 $x<0$이다.

14) ①

2008년 대학예산을 A, 시설투자비를 B라하면 $B=\frac{4}{100}A$

2008년부터 n년후의 대학예산 : $\left(1+\frac{12}{100}\right)^nA$

2008년부터 n년후의 시설투자비 : $\left(1+\frac{20}{100}\right)^nB$

$\therefore\frac{(1.2)^nB}{(1.12)^nA}\ge\frac{6}{100}$

$\Rightarrow\frac{(1.2)^n\cdot\frac{4}{100}A}{(1.12)^n\cdot A}\ge\frac{6}{100}\Rightarrow\frac{(1.2)^n}{(1.12)^n}\ge\frac{3}{2}$

양변에 상용로그를 취해 정리해주면

$n\ge\frac{\log3-\log2}{\log1.2-\log1.12}=\frac{0.1761}{0.0300}=5.87$

$\therefore$ 6년 후(2014년)부터 시설투자비가 대학예산의 6%를 넘어서게 된다.

15) ⑤

(가) 주어진 식에 $m+1$을 대입한 것이므로

$(m+1)^2\cdot\frac{1}{(m+1)(2m+3)}=\frac{m+1}{2m+3}$

(나) $\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2$항이 나왔으므로

주어진 식의 마지막 항은 $\frac{1}{m(2m+1)}$이다.

(다) 준식

$$\begin{aligned}&=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2+\frac{m+1}{2m+3}\\&=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2+(m+1)^2\cdot\frac{1}{(m+1)2m+3}\\&=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m+1}k^2\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) : $m+1$, (나) : $m(2m+1)$, (다) : k^2

16) ⑤

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 두고,

1행 1열의 성분과 2행 2열의 성분만 관찰하면

ㄱ. $A-B=\begin{pmatrix}a-p&\\&d-s\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\therefore f(A-B)&=(a-p)+(d-s)=(a+d)-(p+s)\\&=f(A)-f(B)\end{aligned}$$

ㄴ. $AB=\begin{pmatrix}ap+br&\\&cq+ds\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}ap+cq&\\&br+ds\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\therefore f(AB)&=(ap+br)+(cq+ds)=(ap+cq)+(br+ds)\\&=f(BA)\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}f(M)&=f(ACA^{-1}-BCB^{-1})\\&=f(ACA^{-1})-f(BCB^{-1}) && (\because ㄱ)\\&=f(CA^{-1}A)-f(CB^{-1}B) && (\because ㄴ)\\&=f(C)-f(C)=0\end{aligned}$$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

17) ③

주어진 식을 인수분해 하면 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이다.

이 때, $x=1$은 실근이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 근임을 알 수 있다.

근의 공식을 사용해 근을 구해주면 $\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$를 구할 수 있다.

이 때, 실수부분은 $-\frac{1}{2}$이므로 $a_1=-\frac{1}{2}$이다.

또한, $\omega^2+\omega+1=0 \Rightarrow \omega^2=-1-\omega=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}i}{2}$이므로

$a_2=-\frac{1}{2}$

$\omega^3=1$이므로 $a_3=1$이다.

이 때, $\omega^4=\omega^3\cdot\omega=\omega$이므로 주어진 수열은

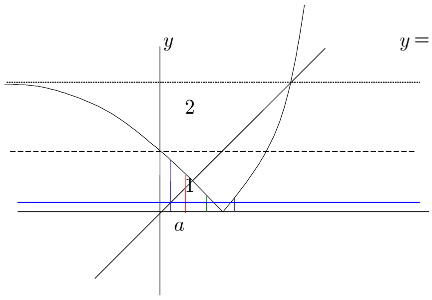
$-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1이 반복되는 수열이다.

$\therefore a_k a_{k+1} a_{k+2}=\frac{1}{4}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k a_{k+1} a_{k+2}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

18) ⑤

$f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 그림에서, c는 1보다 클 수 있다.
(단, a와 b는 1보다 작아야 한다.)

ㄴ. $0<f(a)<1$이므로 $0<f(c)<f(b)<f(a)<1$이다.
$\therefore 0<f(a)+f(b)+f(c)<3$

ㄷ. $y=x$ 그래프를 이용하면 $y=a$의 그래프를 그릴 수 있다.
$0<a<1$이므로 $f(x)=a$는 2개의 실근을 갖는다.

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19) ③

	확률과 통계 배움	확률과 통계 배우지않음	계
통계학성적이 A학점	$6a$	$2a$	$8a$
통계학성적이 A학점이아님	$24a$	$18a$	$42a$
계	$30a$	$20a$	$50a$

$\therefore \frac{6a}{8a}=\frac{3}{4}$

[다른 풀이]

입교전 확률과 통계를 배우는 사건을 A,

확률과통계 과목에서 A학점을 받을 사건을 B,

사관학교 생도생 수를 a라 두면

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^c)}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}a\cdot\frac{2}{10}a}{\frac{3}{5}a\cdot\frac{2}{10}a+\frac{2}{5}a\cdot\frac{1}{10}a}=\frac{3}{4}$$

20) ④

$\log_2\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$이므로 $\left[\frac{f(x)}{[f(x)]}\right]=1$이어야 한다.

$\therefore 1\leqq\frac{f(x)}{[f(x)]}<2$

여기서, $\log_2 x=k+\alpha$

(단, k는 정수, $0\leqq\alpha<1$)라 두면 $[f(x)]=k$

$\therefore 1\leqq\frac{k+\alpha}{k}=1+\frac{\alpha}{k}<2 \Rightarrow 0\leqq\frac{\alpha}{k}<1$

그런데, $0<x<1$이므로 $\log_2 x=k+\alpha<0$이다.

$\therefore k<0 \quad (\because\alpha\geqq 0)$이므로 $k<\alpha\leqq 0$

$\therefore \alpha=0(\because 0\leqq\alpha<1)$

α가 0이므로 $f(x)=\log_2 x=k$이므로 $x=2^k$이다.

(단, k은 음의정수)

이 때, $n=-k$라 치환하면 n은 자연수가 되며,

x값은 n이 증가함에 따라 점점 감소한다.

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

21) ②

i) a, b, c가 모두 다른 경우

5는 반드시 포함되어야 하기 때문에 우선 1, 2, 3, 4 중 한 개의 수와 6, 7, 8, 9, 10 중 한 개의 수를 선택해야 한다.

선택하는 경우의 수는 $4\times5=20$이고 세 수를 a, b, c에 배분하는 경우의 수는 $3!=6$이므로 총 120가지의 경우가 생긴다.

ii) a, b, c 중 2개의 수가 같은 경우

X가 5이여야 하므로 5가 2번 등장하고 나머지 숫자 중 한 개를 뽑으면 된다. 나머지 숫자중 1개를 뽑는 경우의 수가 9가지이고 같은것이 2개 포함된 3개의 숫자를 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$이므로 총 27가지의 경우가 생긴다.

iii) $a=b=c=5$인 경우 : 1가지

$\therefore$ 확률 $=\frac{120+27+1}{10^3}=\frac{37}{250}$

22) ①

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{B_nB_{n+1}}}\left(\overline{\mathrm{A_nB_n}}+\overline{\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{4}$$

23) ②

$a_n-b_n<5$이므로 결국 n개의 수 중 1과 6이 동시에 나타나지 않으면

된다.

1을 제외한 나머지 5개의 수로 n개의 자리를 채우는 사건을 A,

6을 제외한 나머지 5개의 수로 n개의 자리를 채우는 사건을 B라 두면

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

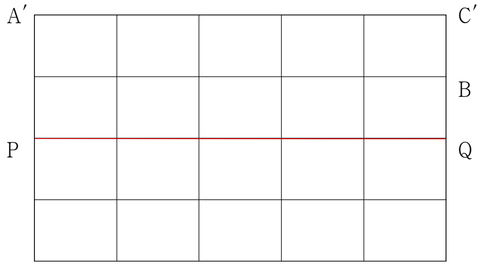
$=5^n+5^n-4^n=2\cdot5^n-4^n$

6개의 수로 n개의 자리를 채우는 경우의 수는 6^n이다.

$\therefore p_n=\dfrac{2\cdot5^n-4^n}{6^n}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\dfrac{\frac{10}{6}}{1-\frac{5}{6}}-\dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=10-2=8$

24) ④



주어진 도형을 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 기준으로 펼치면 된다.

주어진 경우의 수는 위의 그림에서 A에서 C로 가는 경우의 수와 같다.

$\therefore \dfrac{9!}{5!4!}=126$

25) 81

$ab=12$, $bc=8$이므로 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{3}{2}$이므로 $a=\dfrac{3}{2}c$다.

$\therefore 2^a=2^{\frac{3}{2}c}=27=3^3 \Rightarrow 2^c=9$

$\therefore (2^c)^2=4^c=9^2=81$

26) 126

i값이 증가함에 따라 a_i값이 증가한다.

즉, 순서가 정해진 수열이므로 내가 구하고자 하는 경우의 수는

5장의 카드 중 4장을 뽑아주기만 하면 자동 배열되므로

${}_5\mathrm{C}_4=5$가지가 있다.

전체 경우의 수는 중복순역이므로 5^4이므로

확률$=\dfrac{5}{5^4}=\dfrac{1}{5^3}=\dfrac{q}{p}$

$\therefore p+q=126$

27) 165

$a_nA+b_nB=\begin{pmatrix}2a_n & 4a_n\\ a_n & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3b_n & 3b_n\\ b_n & 2b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6n-3\cdot2^n & 12n+3\cdot2^n\\ 3n+2^n & 2^{n+1}\end{pmatrix}$

이므로

$2b_n=2^{n+1}\Rightarrow b_n=2^n,\ a_n+b_n=3n+2^n \Rightarrow a_n=3n$이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}3k=3\cdot\dfrac{10\cdot11}{2}=165$

28) 544

$a_1=1,\ a_2=3$이고 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$ 이므로

a_n은 초항이 2고 공차가 $a_2-a_1=2$인 등차수열이다.

$\therefore a_n=2n-1$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$라 두면

$a_6b_6=S_6-S_5=143\cdot2^6+1-(99\cdot2^5+1)$

$=2^5\cdot(286-99)$

$=2^5\cdot187$

$a_6=11$이므로 $b_6=\dfrac{32\cdot187}{11}=32\cdot17=544$

cf)

$a_nb_n=S_n-S_{n-1}$

$=\{(4n^2-1)\cdot2^n+1\}-\{(4(n-1)^2-1)\cdot2^{n-1}+1\}$

$=(4n^2+8n-5)2^{n-1}$

$=(2n-1)(2n+5)2^{n-1}$

$\therefore b_n=(2n+5)2^{n-1}$

29) 28

신뢰구간의 길이$=2\cdot k\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

여기서 σ는 해당 집단의 표준편차, n은 표본의 크기,

k는 신뢰도에 해당하는 Z값이다.

나무가 총 100그루가 있으니 $a+b=100$이다.

신뢰구간의 길이가 서로 같으므로

$2\cdot1.96\cdot\dfrac{3}{\sqrt{a}}=2\cdot1.96\cdot\dfrac{4}{\sqrt{b}}$

위 식을 정리하면 $16a=9b$라는 식을 얻을 수 있다.

$b=100-a$를 대입해서 정리하면 $a=36$, $b=64$가 나온다.

$\therefore |a-b|=28$

30) 75

부등식에 밑을 2로 하는 로그를 취해주면

$n\leq\log_2x\leq n+10 \Rightarrow -n\leq\log_2x-2n\leq10-n$

$n<5$일 때는 $10-n$의 절댓값이 더 크므로 $a_n=10-n$

$n=5$일 때는 $-n$과 $10-n$의 절댓값이 같으므로 $a_n=5$

$n>5$일 때는 $-n$의 절댓값이 더 크므로 $a_n=n$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=9+8+7+6+5+6+7+8+9+10=75$