2009학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형

성명	

수험번호							

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3=48$, $a_4+a_5+a_6=12$ 일 때, $a_7+a_8+a_9$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 8

2. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{3x^2}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-12$ 를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [2점]

① -7 ② -5 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 집합 X를 $X=\{A^n \mid n$은 자연수$\}$라 하자. 집합 X의 두 원소 P, Q가 다음 두 조건을 만족시킬 때, Q의 모든 성분의 합은? [3점]

> (가) P의 모든 성분의 합은 -3이다.
> (나) $PQ=E$ (단, E는 단위행렬이다.)

① -3 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ 3

4. 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 하자. 이때 세 수 a, b, c의 최대공약수가 2일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{17}{216}$ ③ $\frac{19}{216}$ ④ $\frac{5}{54}$ ⑤ $\frac{25}{216}$

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 모두 만족한다.

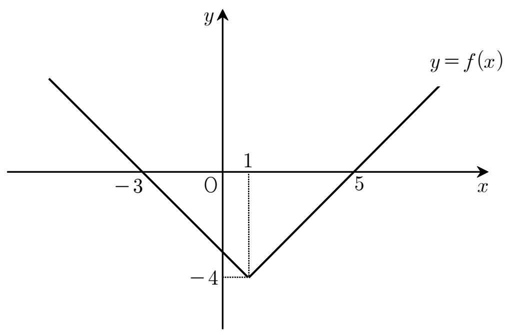
(가) $a_1 = 10$, $b_1 = 1$

(나) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이 때, $\lim_{n \to \infty}(a_n + b_n)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

6. 그림은 함수 $f(x) = a|x-1| + b$ (a, b는 상수)의 그래프이다. 이 때, 방정식 $f(x) + 2 = \sqrt{2f(x)+7}$ 의 모든 실근의 곱은? [3점]



① −24 ② −18 ③ −9
④ 0 ⑤ 9

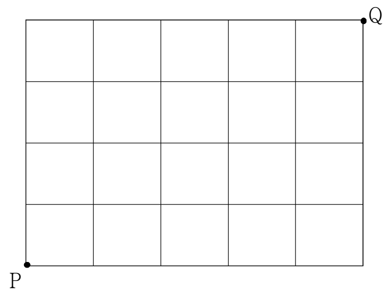
7. 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \neq 0) \\ 2 & (x = 0) \end{cases}, \quad g(x) = \cos \pi x$$

로 정의될 때, $\lim_{x \to 0}(f \circ g)(x) + \lim_{x \to 0}(g \circ f)(x)$의 값은? [3점]

① −1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

8. 그림과 같은 직사각형 모양의 도로가 있다. P 지점에서 출발하여 Q 지점까지 도로를 따라 최단 거리로 갈 때, 도중에 방향을 바꾸는 횟수가 모두 7번이 되는 경로의 수는? [3점]



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

9. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+x^2+1}{x^{2n}+1}$에 대한 설명 중 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x=-1$에서 연속이다.
ㄴ. $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.
ㄷ. $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

10. 어느 전자 회사에서는 신제품을 홍보하기 위해 7월 1일에 인터넷 사이트를 개설하여 한 달간 운영하였다. 이 사이트의 7월 1일의 회원 수가 2만 명이었고, 전날에 비해 매일 일정한 비율로 회원 수가 증가하여 7월 7일의 회원 수는 7월 1일의 회원 수보다 21% 증가하였다. 7월 4일의 회원 수가 7월 1일의 회원 수보다 A% 증가하였다고 할 때, A의 값은? [3점]

① 9 ② 9.5 ③ 10
④ 10.5 ⑤ 11

11. 서류전형 후 필기시험을 실시하는 어느 시험에서 720명이 서류전형에 합격하였다. 서류전형 합격자는 필기시험에서 A, B, C, D 4과목 중 2과목을 반드시 선택해야 하고, 각 과목을 선택할 확률은 모두 같다고 한다. 4과목 중 A, B를 선택한 서류전형의 합격자의 수가 110명 이상 145명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0166 ② 0.1359 ③ 0.1525
④ 0.8351 ⑤ 0.9104

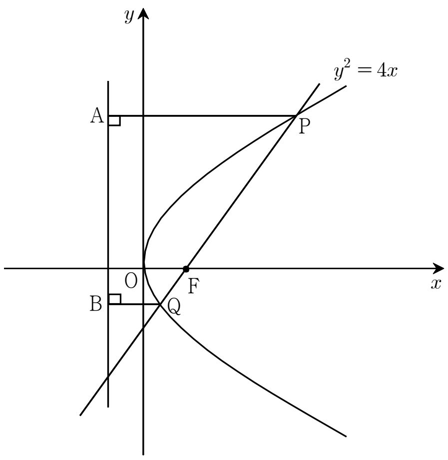
12. 두 함수 $f(x)=2x^3-3x^2$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 $\int_{n}^{n+1} f(x)dx=\frac{1}{n^2+2n}$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} n\left(\int_{1}^{n} f(x)dx-\frac{3}{4}\right)$ 의 값은? [4점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

14. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=5$일 때, 사각형 ABQP의 넓이는? [3점]



① $\frac{57}{4}$ ② $\frac{115}{8}$ ③ 15 ④ $\frac{125}{8}$ ⑤ $\frac{135}{8}$

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{n(2n+1)}\right\}=\frac{n(n+3)}{12}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$일 때 (좌변)$=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{3}$이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{m(2m+1)}\right\}=\frac{m(m+3)}{12}$$

이제, $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\right\}+\frac{(\text{가})}{2m+3}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} k^2\left\{\frac{1}{k(2k+1)}+\frac{1}{(k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(k+2)(2k+5)}+\cdots+\frac{1}{(\text{나})}\right\}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m} k^2+\frac{(\text{가})}{2m+3}$$

$$=\frac{m(m+3)}{12}+\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m+1}(\text{다})$$

$$=\frac{(m+1)(m+4)}{12}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은? [4점]

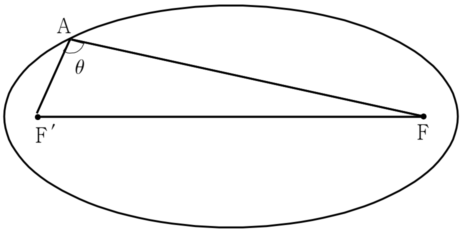
	(가)	(나)	(다)
①	m	$(m+1)(2m+3)$	$(k-1)^2$
②	m	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
③	$m+1$	$m(2m+1)$	$(k-1)^2$
④	$m+1$	$(m+1)(2m+3)$	k^2
⑤	$m+1$	$m(2m+1)$	k^2

16. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $f(A) = a+d$라 하자. 세 이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(A-B) = f(A)-f(B)$
ㄴ. $f(AB) = f(BA)$
ㄷ. 영행렬이 아닌 행렬 C와 역행렬을 갖는 두 행렬 A, B에 대하여 $M=ACA^{-1}-BCB^{-1}$라 하면 $f(M)=0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 그림과 같이 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2인 타원이 있다. 이 타원의 두 초점 F, F′에 대하여 삼각형 AF′F의 넓이가 $\sqrt{2}$가 되도록 타원 위의 점 A를 정할 때, $\angle \mathrm{F'AF}=\theta$라 하면 $\cos\theta$의 값은? [4점]



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

18. 함수 $f(x)=|2^x-2|$의 그래프 위의 세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(c,\ f(c))$가 $0<a<b<c$와 $f(a)>f(b)>f(c)$를 만족할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $0<c<1$
ㄴ. $0<f(a)+f(b)+f(c)<3$
ㄷ. 방정식 $f(x)-a=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

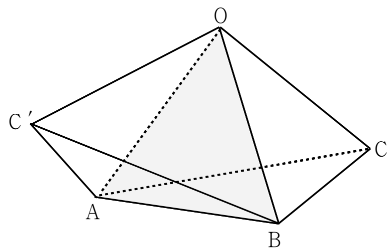
19. 사관학교 생도의 60%는 입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠고, 40%는 배우지 않았다고 한다. 확률과 통계 과목을 배운 생도들의 20%, 배우지 않은 생도들의 10%는 통계학 성적이 A 학점이었다. 임의로 한 명의 생도를 뽑았더니 그 생도의 통계학 성적이 A학점이었을 때, 그 생도가 입교 전에 확률과 통계 과목을 배웠을 확률은? [3점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

20. $f(x)=\log_2 x$ 라 할 때, $0<x<1$ 에서 방정식
$\log_2\left[\dfrac{f(x)}{[f(x)]}\right]=0$ 을 만족시키는 모든 x의 값을 가장 큰 수부터 차례대로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ 이라 하자.
이 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

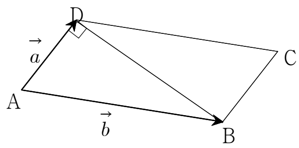
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ 1　⑤ 2

21. 그림과 같이 두 개의 정사면체 OABC 와 OABC′ 가 면 OAB 를 공유하고 있다. 벡터 $\overrightarrow{OC'}=p\,\overrightarrow{OA}+q\,\overrightarrow{OB}+r\,\overrightarrow{OC}$ 를 만족시키는 상수 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 $p+q+r$ 의 값은? [3점]



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

22. 그림과 같은 $\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\angle ADB=90^\circ$ 인 평행사변형 ABCD 에서 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 라 놓는다. 꼭짓점 D 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 E 라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AE}=k(\vec{a}+\vec{b})$ 를 만족시키는 실수 k의 값은? [4점]

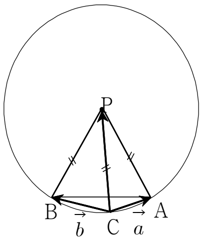


① $\frac{1}{6}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{5}{18}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

23. 좌표공간에서 평면 $y=(\tan 75^\circ)x$ 위의 도형 S를 벡터 $\vec{v}=(1,\ -1,\ 0)$ 에 평행한 광선으로 비추었더니, zx 평면에 나타난 도형 S의 그림자는 중심이 $(4,\ 0,\ 0)$ 이고 반지름의 길이가 3 인 원이 되었다. 이 때, 도형 S의 넓이는? [4점]

① $3\sqrt{3}\,\pi$　② $4\sqrt{3}\,\pi$　③ $\frac{9\sqrt{6}}{4}\pi$
④ $3\sqrt{6}\,\pi$　⑤ $\frac{9\sqrt{6}}{2}\pi$

24. 다음은 좌표공간에 있는 세 점 A$(3,\ 0,\ 2)$, B$(0,\ 2,\ 1)$, C$(1,\ 1,\ 1)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외접원의 중심 P의 좌표를 벡터를 이용하여 구하는 과정이다.



$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$라 하면
적당한 실수 p, q에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = p\vec{a} + q\vec{b}$
로 나타낼 수 있다.
$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$에서
$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CP}} - \vec{a}|^2$
$\therefore\ |\vec{a}|^2 = \boxed{(가)} \times (p|\vec{a}|^2 + q\vec{a}\cdot\vec{b})$ …… ㉠
마찬가지로
$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$에서
$|\vec{b}|^2 = \boxed{(나)} \times (q|\vec{b}|^2 + p\vec{a}\cdot\vec{b})$ …… ㉡
$\vec{a} = (2,\ -1,\ 1)$, $\vec{b} = (-1,\ 1,\ 0)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -3$이므로
㉠, ㉡으로부터
$\therefore\ p = \boxed{(다)}$, $q = \boxed{(라)}$
따라서 $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (1,\ 2,\ 3)$이므로 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 P$(2,\ 3,\ 4)$이다.

위 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 해당하는 수를 모두 더하면? [4점]

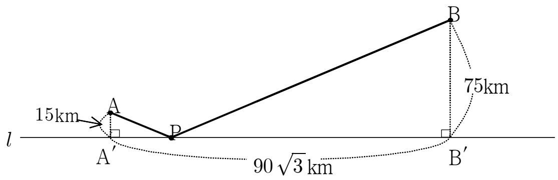
① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

주관식 문항 (25~30)

25. 세 실수 a, b, c가 $ab = 12$, $bc = 8$, $2^a = 27$을 만족시킬 때, 4^c의 값을 구하시오. [2점]

26. 정적분 $\int_2^6 \frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2}\,dx + \int_6^2 \frac{4(y^2+2y+4)}{y+2}\,dy$의 값을 구하시오. [3점]

27. 그림과 같이 A 지점에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{A'}$, B 지점에서 내린 수선의 발을 $\mathrm{B'}$라 하자. $\overline{\mathrm{AA'}}=15\mathrm{km}$, $\overline{\mathrm{BB'}}=75\mathrm{km}$, $\overline{\mathrm{A'B'}}=90\sqrt{3}\,\mathrm{km}$이고 직선 l 위에 있는 P는 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값이 최소가 되는 점이다. 갑과 을은 동시에 출발하여 갑은 A에서 P를 거쳐 B에, 을은 B에서 P를 거쳐 A에 도착하였다. 두 사람이 만난 순간부터 각각 갑은 1시간 후에 B에 도착하였고, 을은 9시간 후에 A에 도착하였다. 을이 B에서 출발하여 갑과 만났을 때까지 이동한 거리를 $x\mathrm{km}$라 할 때, x의 값을 구하시오. (단, 갑과 을은 각각 일정한 속력으로 직선 방향으로 이동한다.) [3점]



28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=1,\ a_2=3,\quad a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=(4n^2-1)2^n+1$$

을 만족시킬 때, b_6의 값을 구하시오. [4점]

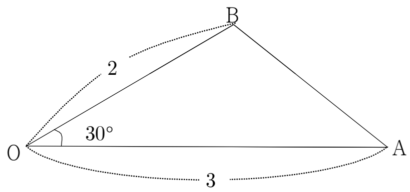
29. 어느 임업연구소의 A, B 두 연구원이 소나무 군락지의 소나무들의 생장 상태를 알아보기 위하여 100 그루의 소나무들을 각각 a, b 그루로 나누어 키를 조사하였더니 오른쪽 표와 같은 결과를 얻었다. A, B 두 연구원이 각자 95 % 의 신뢰도로 군락지의 소나무들의 키의 평균을 추정하였더니 신뢰구간의 길이가 같았다. 소나무들의 키의 분포는 정규분포를 따른다고 할 때, $|a-b|$의 값을 구하시오.
(단, 표준정규분포에서 $\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.96)=0.475$로 계산한다.)

	표본의 크기	표준편차
A연구원	a그루	3cm
B연구원	b그루	4cm

[4점]

30. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$, $\angle\mathrm{AOB}=30^\circ$인 삼각형 OAB가 있다. 연립부등식 $3x+y \geqq 2$, $x+y \leqq 2$, $y \geqq 0$을 만족시키는 x, y에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 종점 P가 존재하는 영역의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.

[4점]



※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2009년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ③

$a_n = ar^{n-1}$이라 두면

$a+ar+ar^2=48$, $ar^3+ar^4+ar^5=12=r^3(a+ar+ar^2)$

$\therefore r^3=\frac{1}{4}$

$\therefore a_7+a_8+a_9=ar^6+ar^7+ar^8=r^6(a+ar+ar^2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 48=3$

2) ①

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{3x^2}=1 \Leftrightarrow f(x)=2x^3+3x^2+ax+b$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-12 \Rightarrow f(0)=0 \quad \therefore b=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2+ax}{x}=\lim_{x\to 0}(2x^2+3x+a)=a=-12$

$\therefore f(x)=2x^3+3x^2-12x \quad \Rightarrow f(1)=2+3-12=-7$

3) ④

$a+d=-1$, $ad-bc=1$이므로 케일리-해밀턴의 정리를 쓰면

$A^2+A+E=O \Rightarrow A^3=E \quad \cdots$ ① 이다.

그러므로 A^k는 주기가 3이므로 집합 X의 원소는

$A, A^2, A^3=E$의 3종류만 있게 된다.

여기서 각각의 행렬을 구해보면

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$, $A^2=-A-E=-\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}$이다.

그러므로 성분의 합이 -3이 되는 행렬은 A^2행렬이고,

①식에 의해 $Q=A$이다.

$\therefore Q$의 성분의합$=1$

4) ⑤

최대공약수가 2라고 하였으므로 짝수에서 그 경우를 따져주면 된다.

짝수는 2, 4, 6이 있고, 사용하는 짝수의 수에 따라 분류할 수 있다.

i) 숫자를 1개만 사용하는 경우 : 이 경우는 세 번 모두 2가 나오는 경우만 해당하므로 경우의 수는 1가지이다.

ii) 숫자를 2개 사용하는 경우 : 사용하는 숫자의 수를 나눠서 세는 방법은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

2번 사용하는 수	1번 사용하는 수
2	4
4	2
2	6
6	2
4	6
6	4

총 6가지 경우가 생기고, a, b, c에 배분하는 경우는 각각 $\frac{3!}{2!}=3$이므로 총 18가지가 나온다.

iii) 숫자 3개를 사용하는 경우

이 경우는 2, 4, 6을 모두 사용하는 경우이므로

2, 4, 6을 a, b, c에 배분하는 경우의 수와 같으므로

총 6가지의 경우의 수가 있다.

$\therefore$ 확률$=\frac{1+18+6}{216}=\frac{25}{216}$

5) ②

(나) 식에서 $\begin{cases}a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\\ b_{n+1}=a_n\end{cases}$ 이다.

여기서 윗식의 n자리에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n \ (\because b_{n+1}=a_n)$

$a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=0$이므로 이 점화식은 계차수열이 등비수열인 점화식이다.

그러므로 일반항 $a_n=p+q\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이라 둘 수 있다.

또한, $a_1=10$, $b_1=1$이므로 $a_2=\frac{11}{2}$이다.

$\therefore a_n=7+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=7$이다.

이 때, $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=7$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=14$

6) ①

주어진 그림에서 $f(1)=-4$, $f(5)=0$이므로

$b=-4$, $a=1$임을 알 수 있다.

주어진 식에서 $f(x)+2=\sqrt{2f(x)+7}$이고,

우변이 양수이므로 좌변도 양수여야 한다.

$\therefore f(x)\geqq -2$

$f(x)=t$라 치환하면 $t\geqq -2$이고 준식을 계산하면

$(t+2)^2=2t+7$, $t^2+2t-3=0$이므로 $t=-3$ or 1이다.

이 때, $t\geqq -2$이므로 $t=1$만 근이 된다.

$\therefore |x-1|-4=\pm 5$이므로 $x=6$ or -4이다.

$\therefore$두 실근의 곱$=-24$

7) ③

$f(g(x))=\begin{cases}2\cos\pi x+1 & (x\neq 0)\\ 2 & (x=0)\end{cases}$

$g(f(x))=\begin{cases}\cos(2x+1)\pi=-\cos 2\pi x & (x\neq 0)\\ \cos 2\pi=1 & (x=0)\end{cases}$

$\therefore \lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)+\lim_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0}\{(f\circ g)(x)+(g\circ f)(x)\}$

$\lim_{x\to 0}(2\cos\pi x+1-\cos 2\pi x)=2+1-1=2$

8) ①

방향을 바꾼다는 것은 가로세로의 진행방향이 바뀐다는 것을 의미한다. (ex : →↑, ↑→)

즉, 7번 방향을 바꾼다는 것은 가로의 진행방향과 세로의 진행방향으로 각각 4번씩 진행할 때 →↑와 같이 꺾이는 부분이 7군데 발생다는 것이다.

이 때 ↑방향이 4번, → 방향이 4번 나와야 된다.

이 때, 세로방향은 4칸, 가로방향은 5칸이므로 가로방향에서 한 번은 2칸을 연속으로 진행해야 한다.

또 가로방향과 세로방향이 서로 엇갈려서 나와야 하므로 경우의 수는 가로방향 진행으로 시작하는 경우와 세로방향의 진행으로 시작되는 경우로 나눌 수 있다.

i) 가로방향으로 진행을 시작하는 경우

→↑→↑→↑→↑으로 진행하는 경우이고, 4개의 가로방향진행 중 2칸을 움직일 순간을 구하면 되므로 총 4가지의 경우가 있다.

ii) 세로방향으로 진행을 시작하는 경우

↑→↑→↑→↑→ 으로 진행하는 경우이고, 4개의 가로방향진행 중 2칸을 움직일 순간을 구하면 되므로 총 4가지의 경우가 있다.

∴ i), ii)에서 총 경우의 수는 8가지가 있다.

cf) 선택지에 나와있는 숫자가 적으므로 직접 세어도 된다.
(→→↑→↑→↑→↑) (→↑→→↑→↑→↑) (→↑→↑→→↑→↑)
(→↑→↑→↑→→↑) (↑→→↑→↑→↑→) (↑→↑→→↑→↑→)
(↑→↑→↑→→↑→) (↑→↑→↑→↑→→)

9) ⑤

x의 범위에 따라 $f(x)$를 나눠주면

$$f(x)=\begin{cases} 2x & |x|>1 \\ x^2+1 & |x|<1 \\ 2 & x=1 \\ 0 & x=-1 \end{cases}$$ 와 같이 정의된다.

ㄱ. $\lim_{x\to -1+0} f(x)=2$, $\lim_{x\to -1-0} f(x)=-2$ 이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)$가 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $|x|<1$인 구간에서 연속이며, $x=0$에서 감소→증가 로 바뀐다.

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2$

$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{2(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1-0}2=2$

$x=1$에서 좌미분계수와 우미분계수가 같으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

10) ③

매일 $r\%$씩 증가한다 하고 7월 1일 이후로 n일 후의 회원수를 $f(n)$이라 하면

$f(n)=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ (단, $A=20000$)

7월 7일의 회원수는 $1.21A=A\left(1+\frac{r}{100}\right)^6$

$\Rightarrow \left(1+\frac{r}{100}\right)^6=1.21=(1.1)^2$

구하라는 값은 3일후 까지의 회원수의 증가율이다.

$\therefore A\left(1+\frac{r}{100}\right)^3=1.1A=\left(1+\frac{1}{10}\right)$ ⇒ 3일간 10% 증가했음을 알 수 있다.

11) ④

4과목중 2과목을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이므로

A,B를 선택할 확률은 $\frac{1}{6}$이 된다.

A,B를 선택한 서류전형자의 수를 확률변수 X라 두면

X는 이항분포 $B\left(720,\frac{1}{6}\right)$를 따른다.

이 때, 720은 충분히 큰 수이므로 X는

정규분포 $N(120,10^2)$에 근사한다.

$\therefore P(110\le X\le 145)=P(-1\le Z\le 2.5)$

$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.3413+0.4938=0.8351$

12) ③

$f(x)=t$라 두자.

$(g\circ f)(x)=0$의 근을 구한다는 것은 $g(t)=0$을 만족시키는 t값을 우선 구해야 한다.

$t^2-1=0\Rightarrow t=\pm1$

즉, $f(x)=1$ or -1이 되게하는 x값의 개수를 구하면 된다.

$f(x)=2x^3-3x^2$에서 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

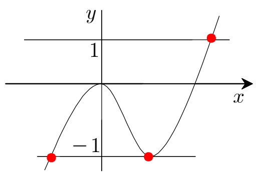
증감표를 그려보면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\cdots$	0	$\cdots$	−1	$\cdots$

$\therefore$ $f(x)=1$은 1개의 실근을 가지며, $f(x)=-1$은 2개의 실근을 가지게 된다.

$\therefore$ 총 3개의 실근을 갖는다.

cf) $f(x)$의 그래프와 실근의 위치를 표현하면 다음과 같다.



13) ①

$\int_n^{n+1}f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}f(x)dx$

$=\int_1^n f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore\int_1^n f(x)dx-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{2n+1}{2n(n+1)}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}n\left(\int_1^n f(x)dx-\frac{3}{4}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot-\frac{2n+1}{2n(n+1)}=-1$

14) ④

$\overline{AP}$ 와 y축과의 교점을 C, $\overline{BQ}$ 와 y축과의 교점을 D, P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\overline{AB}$와 x축과의 교점을 E라 두자.

이 때, $\overline{AC}=1$, $\overline{CP}=4$, $\overline{FH}=3$이고, △PFH에서 $\overline{PH}=4$이다.

$\therefore$ $\overline{PQ}$의 직선의 방정식⇒$y=\frac{4}{3}(x-1)$이므로 $4x=3y+4$이다.

이 식을 $y^2=4x$에 대입하면 $y^2=3y+4$, $y^2-3y-4=0$이므로 $y=4$ or -1이다.

$y=-1$을 직선의 방정식에 대입해 Q의 x좌표를 구해보면

$x=\frac{3}{4}$이므로 $\overline{BQ}=\frac{5}{4}$

$\therefore$ 사각형ABQP의 넓이

$=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{BQ})\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{BQ})\cdot(\overline{AE}+\overline{BE})$

$=\frac{1}{2}\left(5+\frac{5}{4}\right)(4+1)=\frac{125}{8}$

15) ⑤

(가) 주어진 식에 $m+1$을 대입한 것이므로

$(m+1)^2\cdot\frac{1}{(m+1)(2m+3)}=\frac{m+1}{2m+3}$

(나) $\frac{1}{(m+1)(2m+3)}\sum_{k=1}^{m}k^2$항이 나왔으므로

주어진 식의 마지막 항은 $\frac{1}{m(2m+1)}$이다.

(다) 준식

$= \dfrac{m(m+3)}{12} + \dfrac{1}{(m+1)(2m+3)} \sum_{k=1}^{m} k^2 + \dfrac{m+1}{2m+3}$

$= \dfrac{m(m+3)}{12} + \dfrac{1}{(m+1)(2m+3)} \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 \cdot \dfrac{1}{(m+1)2m+3}$

$= \dfrac{m(m+3)}{12} + \dfrac{1}{(m+1)(2m+3)} \sum_{k=1}^{m+1} k^2$

$\therefore$ (가) : $m+1$, (나) : $m(2m+1)$, (다) : k^2

16) ⑤

$A = \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p\,q \\ r\,s \end{pmatrix}$라 두고,

1행 1열의 성분과 2행 2열의 성분만 관찰하면

ㄱ. $A-B = \begin{pmatrix} a-p & \\ & d-s \end{pmatrix}$

$\therefore f(A-B) = (a-p)+(d-s) = (a+d)-(p+s) = f(A)-f(B)$

ㄴ. $AB = \begin{pmatrix} ap+br & \\ & cq+ds \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} ap+cq & \\ & br+ds \end{pmatrix}$

$\therefore f(AB) = (ap+br)+(cq+ds) = (ap+cq)+(br+ds) = f(BA)$

ㄷ. $f(M) = f(ACA^{-1} - BCB^{-1})$

$= f(ACA^{-1}) - f(BCB^{-1})$ $(\because$ ㄱ$)$

$= f(CA^{-1}A) - f(CB^{-1}B)$ $(\because$ ㄴ$)$

$= f(C) - f(C) = 0$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

17) ②

$\overline{\mathrm{F'F}}$를 x축이라 하자.

그럼 문제에서 주어진 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$이 된다.

(편의상 F의 x좌표를 양수라 한다.)

$\triangle \mathrm{AF'F}$의 넓이를 S, 점 A에서 $\overline{\mathrm{F'F}}$에 내린 수선의 발을 H라 두자.

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \overline{\mathrm{AH}} = \sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로

점 H의 y좌표는 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이 된다.

주어진 방정식에 넣어 x좌표를 구해보면 $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $(\because x < 0)$

$\mathrm{F}(\sqrt{3}, 0), \mathrm{F'}(-\sqrt{3}, 0)$이므로 두 점 사이의 거리공식을 이용해 길이를 구하면 $\overline{\mathrm{AF'}} = 1$, $\overline{\mathrm{AF}} = 3$이다.

$\therefore \triangle \mathrm{AF'F}$에서 $\cos\theta = \dfrac{1^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} = -\dfrac{1}{3}$

[다른 풀이]

$\overline{\mathrm{AF}} = a$, $\overline{\mathrm{AF'}} = b$ 라 두면 $a+b=4$, $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta = \sqrt{2}$ 이다.

또, $\triangle \mathrm{AF'F}$에서 제 2cos법칙을 적용하면

$12 = a^2+b^2-2ab\cos\theta$이다.

$a^2+b^2+2ab = 16 \Rightarrow a^2+b^2 = 16-2ab$이므로 위 식에 대입하면

$2ab(1+\cos\theta) = 4 \Rightarrow ab = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$

이 식을 위의 넓이 식에 대입하면 $\sin\theta = \sqrt{2}(1+\cos\theta)$

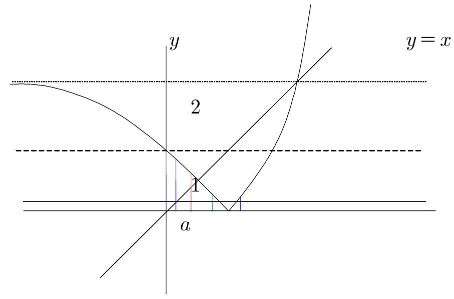
양변을 제곱하여 $\cos\theta$에 대한 식으로 정리하면

$3\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1$ or $-\dfrac{1}{3}$

$0 < \theta < \pi$이므로 $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$

18) ⑤

$f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 그림에서, c는 1보다 클 수 있다.

(단, a와 b는 1보다 작아야 한다.)

ㄴ. $0 < f(a) < 1$이므로 $0 < f(c) < f(b) < f(a) < 1$이다.

$\therefore 0 < f(a)+f(b)+f(c) < 3$

ㄷ. $y=x$ 그래프를 이용하면 $y=a$의 그래프를 그릴 수 있다.

$0 < a < 1$이므로 $f(x) = a$는 2개의 실근을 갖는다.

그러므로 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19) ③

	확률과 통계 배움	확률과 통계 배우지않음	계
통계학성적이 A학점	$6a$	$2a$	$8a$
통계학성적이 A학점이아님	$24a$	$18a$	$42a$
계	$30a$	$20a$	$50a$

$\therefore \dfrac{6a}{8a} = \dfrac{3}{4}$

[다른 풀이]

입교전 확률과 통계를 배우는 사건을 A, 확률과통계 과목에서 A학점을 받을 사건을 B, 사관학교 생도생 수를 a라 두면

$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c)}$

$= \dfrac{\frac{3}{5}a \cdot \frac{2}{10}a}{\frac{3}{5}a \cdot \frac{2}{10}a + \frac{2}{5}a \cdot \frac{1}{10}a} = \dfrac{3}{4}$

20) ④

$\log_2\left[\dfrac{f(x)}{[f(x)]}\right] = 0$이므로 $\left[\dfrac{f(x)}{[f(x)]}\right] = 1$이어야 한다.

$\therefore 1 \leqq \dfrac{f(x)}{[f(x)]} < 2$

여기서, $\log_2 x = k + \alpha$

(단, k는 정수, $0 \leqq \alpha < 1$)라 두면 $[f(x)] = k$

$\therefore 1 \leqq \dfrac{k+\alpha}{k} = 1 + \dfrac{\alpha}{k} < 2 \Rightarrow 0 \leqq \dfrac{\alpha}{k} < 1$

그런데, $0 < x < 1$이므로 $\log_2 x = k + \alpha < 0$이다.

$\therefore k < 0$ $(\because \alpha \geqq 0)$이므로 $k < \alpha \leqq 0$

$\therefore \alpha = 0 (\because 0 \leqq \alpha < 1)$

α가 0이므로 $f(x) = \log_2 x = k$이므로 $x = 2^k$이다.

(단, n은 음의정수)

이 때, $n = -k$라 치환하면 n은 자연수가 되며,

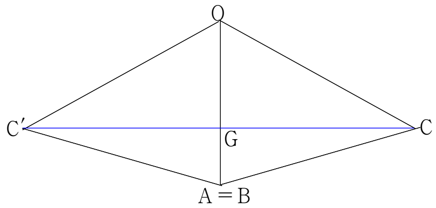
x값은 n이 증가함에 따라 점점 감소한다.

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

21) ②

O, C, C′를 지나는 평면으로 자른 단면도는 다음과 같다.



C(C′)에서 △OAB에 내린 수선의 발을 G라 하면

G는 △OAB의 무게중심과 일치한다.

$\therefore \overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OC}}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{OC'}=2\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}$

이 때, $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$ (∵G가 무게중심)

$\therefore \overrightarrow{OC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$

$\therefore p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{2}{3}$, $r=-1$이므로 $p+q+r=\frac{1}{3}$

[다른 풀이]

좌표로 해결하는 방법

$O(0,0,0)$ $A(0,1,1)$ $B(1,1,0)$ $C(1,0,1)$ $C'(a,b,c)$라 두면

$a^2+b^2+c^2=2$, $a^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$,

$(a-1)^2+(b-1)^2+c^2=2$

이 식을 연립해서 풀면 $C'\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$

$$\therefore\begin{cases}p+q=\frac{4}{3}\\ q+r=-\frac{1}{3}\\ r+p=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow 2(p+q+r)=\frac{2}{3}$$

$\therefore p+q+r=\frac{1}{3}$

22) ②

$\overline{AC}$의 중점을 M이라 두면

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DM}^2}=\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{AC}=2\overline{AM}=3$

△AMD에서 $\overline{AM}\cdot\overline{DE}=\overline{AD}\cdot\overline{DM}$

$\overline{AM}=\frac{3}{2}$, $\overline{AD}=1$, $\overline{DM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이므로 $\overline{DE}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

여기서 △ADE는 직각삼각형이므로 $\overline{AE}=\frac{2}{3}$

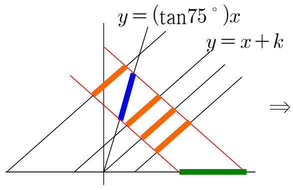
$\therefore |\overrightarrow{AE}|=k\cdot|\vec{a}+\vec{b}|=k\cdot|\overrightarrow{AC}|=3k=\frac{2}{3}$

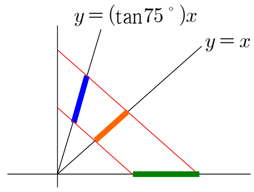
$\therefore k=\frac{2}{9}$

23) ④

$y=(\tan75^\circ)x$를 α, $\vec{v}$에 수직인 평면은 β: $x-y+d=0$라 두고.

$z=0$이라는 평면으로 잘랐을 때의 단면은 다음과 같다.





그림에서 보면 알 수 있듯이 β평면의 위치에 관계없이

S와 zx평면 위의 그림자의 β평면 위로의 정사영의 크기가

일정하므로 $\beta: y=x$라 둬도 무방하다.

여기서, zx평면위의 그림자의 넓이를 A, β평면 위의 정사영의 넓이를

S′이라 두면

$S'=S\cos\theta=A\cos\theta'$

$A=9\pi$, $\theta=30^\circ$, $\theta'=45^\circ$ 이므로 $S\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다

$\therefore S=3\sqrt{6}\pi$

24) ②

(가) : $|\overrightarrow{CP}|^2=|\overrightarrow{CP}-\vec{a}|^2=|\overrightarrow{CP}|^2-2\vec{a}\cdot\overrightarrow{CP}+|\vec{a}|^2$

$\therefore |\vec{a}|^2=2\times\left(p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

(나) : $|\overrightarrow{CP}|^2=|\overrightarrow{CP}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{CP}|^2-2\vec{b}\cdot\overrightarrow{CP}+|\vec{b}|^2$

$\therefore |\vec{b}|^2=2\times\left(q|\vec{b}|^2+p\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

(다), (라) : $|\vec{a}|^2=6$, $|\vec{b}|^2=2$이므로 위의 식에 대입하면

$6=2(6p-3q)$, $2=2(2q-3p)$이므로 연립해서 해결하면

$p=3$, $q=5$이다.

∴(가)+(나)+(다)+(라)=2+2+3+5=12

25) 81

$ab=12$, $bc=8$이므로 $\frac{a}{c}=\frac{3}{2}$이므로 $a=\frac{3}{2}c$다.

$\therefore 2^a=2^{\frac{3}{2}c}=27=3^3 \Rightarrow 2^c=9$

$\therefore (2^c)^2=4^c=9^2=81$

26) 288

$$\int_2^6\frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2}dx+\int_6^2\frac{4(y^2+2y+4)}{y+2}dy$$

$$=\int_2^6\frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2}dx-\int_2^6\frac{4(x^2+2x+4)}{x+2}dx$$

$$=\int_2^6\left\{\frac{x^2(x^2+2x+4)}{x+2}-\frac{4(x^2+2x+4)}{x+2}\right\}dx$$

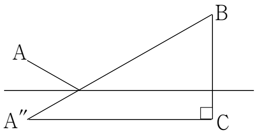
$$=\int_2^6\frac{(x^2-4)(x^2+2x+4)}{x+2}dx$$

$$=\int_2^6(x-2)(x^2+2x+4)dx$$

$$=\int_2^6(x^3-8)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-8x\right]_2^6=288$$

27) 45



A점에 대한 직선 l의 대칭점을 A″라 두면 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A''B}}$가 된다.
그림에서 $\triangle \mathrm{A''BC}$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리를 활용하면 $\overline{\mathrm{A''B}}=180$이다.
이 때, 움직이는 양상은 직선상에서의 움직임과 동일하므로 직선상의 움직임으로 봐도 무방하다.
갑과 을이 만나는 지점을 P′, $\overline{\mathrm{BP'}}=x$ 라 두면 주어진 조건은 다음과 같이 단순화 할 수 있다.
갑의 속력을 $v_1 km/$시, 을의 속력을 $v_2 km/$시 라 하자.

이 때, P′까지 걸린 시간이 같으므로 $\dfrac{180-x}{v_1}=\dfrac{x}{v_2}$ ……①

만난 후 갑은 B까지 1시간 걸렸으므로 $\dfrac{x}{v_1}=1 \Rightarrow v_1=x$ ……②

만난 후 을은 A까지 9시간이 걸렸으므로
$\dfrac{180-x}{v_2}=9 \Rightarrow v_2=\dfrac{180-x}{9}$ ……③

②, ③식을 ①식에 대입하면 $(180-x)^2=9x^2$이므로
$180-x=3x$ or $180-x=-3x$
$\therefore x=45$ or -90 인데, $x>0$이므로 $x=45$

28) 544

$a_1=1$, $a_2=3$이고 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}$이므로
a_n은 초항이 2고 공차가 $a_2-a_1=2$인 등차수열이다.
$\therefore a_n=2n-1$

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$라 두면
$a_6 b_6=S_6-S_5=143\cdot 2^6+1-(99\cdot 2^5+1)$
$=2^5\cdot(286-99)=2^5\cdot 187$
$a_6=11$이므로 $b_6=\dfrac{32\cdot 187}{11}=32\cdot 17=544$

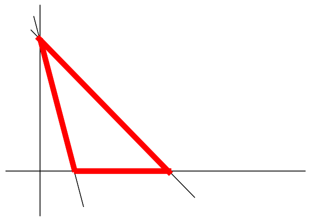
cf) $a_n b_n=S_n-S_{n-1}$
$=\{(4n^2-1)\cdot 2^n+1\}-\{(4(n-1)^2-1)\cdot 2^{n-1}+1\}$
$=(4n^2+8n-5)2^{n-1}$
$=(2n-1)(2n+5)2^{n-1}$
$\therefore b_n=(2n+5)2^{n-1}$

29) 28

신뢰구간의 길이$=2\cdot k\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
여기서 σ는 해당 집단의 표준편차, n은 표본의 크기, k는 신뢰도에 해당하는 Z값이다.
나무가 총 100그루가 있으니 $a+b=100$이다.
신뢰구간의 길이가 서로 같으므로
$2\cdot 1.96\cdot\dfrac{3}{\sqrt{a}}=2\cdot 1.96\cdot\dfrac{4}{\sqrt{b}}$
위 식을 정리하면 $16a=9b$라는 식을 얻을 수 있다.
$b=100-a$를 대입해서 정리하면 $a=36$, $b=64$가 나온다.
$\therefore |a-b|=28$

30) 16

주어진 연립 부등식의 해를 좌표평면에 도시하면 다음과 같다.



주어진 영역을 관찰하면 결국 $x+y=2$인 경우와 $3x+y=2$인 경우 사이의 범위임을 알 수 있다.

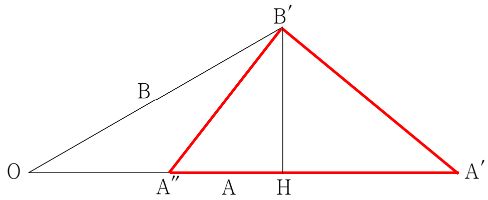
$x+y=2$일 때 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=1$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{x}{2}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{y}{2}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\dfrac{x}{2}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA'}})+\dfrac{y}{2}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB'}})$

$3x+y=2$일 때, $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{y}{2}=1$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{2}x\cdot\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\dfrac{y}{2}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\dfrac{3}{2}x\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA''}})+\dfrac{y}{2}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB'}})$

라 두고, B′에서 $\overline{\mathrm{OA'}}$에 내린 수선의 발을 H라 두자.



$\overline{\mathrm{OB}}=2$, $\overline{\mathrm{OB'}}=4$, $\overline{\mathrm{OA''}}=2$, $\overline{\mathrm{A'A''}}=4$, $\overline{\mathrm{B'H}}=2$이고,
구하고자 하는 넓이는 빨간색(굵은선)으로 둘러쌓인 부분의 넓이이다.
$\therefore \triangle \mathrm{BA''A'}=\mathrm{S}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4 \Rightarrow S^2=16$