2008학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형 | 성명 | | 수험번호 | | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $a^2 \cdot \sqrt[5]{b} = 1$이 성립할 때, $\log_a \frac{1}{ab}$의 값은? [2점]

① -9 ② -3 ③ 3 ④ 5 ⑤ 9

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$와 이차 정사각행렬 B에 대하여 행렬 ABA^{-1}의 역행렬이 A일 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

3. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $\mathrm{P}(A \cap B^c) = \frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

4. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 소수부분을 α라 하면 $(\log x)^2 + \alpha^2 = 8$이 성립한다. 이 때, $\log x$의 값은? [3점]

① $1+\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

5. 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1}a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$의 값은? [3점]

① $\frac{17}{6}$ ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{23}{6}$ ⑤ $\frac{25}{6}$

6. 주머니 속에 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수의 최솟값을 확률변수 X라 하자. 이 때, X의 평균은? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은 $S_n = n^3 + pn$이고, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $b_1 = a_1$
(나) $b_n = a_n - a_{n-1}$ $(n \geq 2)$

수열 $\{b_n\}$이 등차수열일 때, 상수 p의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ -1 ⑤ -3

8. x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2b-3 & b+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ 3 \end{pmatrix}$$

이 해를 갖지 않도록 하는 두 정수 a, b를 정할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -10 ② -6 ③ -2 ④ 1 ⑤ 5

9. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여 $\log_{\frac{1}{2}}(y+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3)$의 최솟값을 m이라 할 때, 2^m의 값은? (단, $y \neq -1$이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{3}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

10. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $a_n = b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$이면 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
ㄴ. 수열 $\{2^{b_n}\}$이 등비수열이면 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
ㄷ. 수열 $\{\log_2 a_n\}$이 공차가 0이 아닌 등차수열이면 $\{b_n\}$은 등비수열이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < c_n < b_n$ 을 만족한다.
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $\{c_n\}$이 수렴하면 $\alpha = \beta$ 이다.

ㄴ. $\{c_n\}$이 발산하면 $\alpha < \beta$ 이다.

ㄷ. $\alpha = \beta = 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

12. 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. $1 < a < b$ 이고 $0 < \log_a c < 1$ 이면 $\log_b c > \log_b a$ 이다.

ㄴ. $0 < a < 1 < b$ 이고 $0 < \log_a c < 1$ 이면 $\log_b a < \log_b c$ 이다.

ㄷ. $0 < a < b < 1$ 이고 $\log_a c < 0$ 이면 $\log_a b < \log_c b$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 한 개의 주사위를 4 번 던질 때, 1 의 눈이 나오는 횟수를 a , 2 의 눈이 나오는 횟수를 b 라 하자. $a-b=1$ 일 확률은? [4점]

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{5}{27}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{19}{81}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

14. n이 자연수일 때, $2n$명의 학생을 두 명씩 n개의 조로 나누는 방법의 수를 a_n이라 하자. 이 때, $\frac{a_{11}}{a_{10}}$의 값은? [3점]

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

15. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 항이 양수인 등차수열일 때, 다음은 수열 $\left\{\sqrt{a_n b_n}\right\}$이 등차수열이면 $\dfrac{b_n}{a_n} = \boxed{(가)}$ 임을 증명한 것이다.

<증명>
수열 $\left\{\sqrt{a_n b_n}\right\}$이 등차수열이므로 모든 자연수 n에 대하여

$\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{a_{n+2} b_{n+2}} = \sqrt{\boxed{(나)}}$ …… ㉠

또, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로

$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ …… ㉡

$b_n + b_{n+2} = 2b_{n+1}$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입한 후, 양변을 제곱하여 정리하면

$2\sqrt{a_n b_n a_{n+2} b_{n+2}} = a_n b_{n+2} + a_{n+2} b_n$

다시 위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$a_{n+2} b_n = \boxed{(다)}$ …… ㉣

따라서 ㉡, ㉢, ㉣에서

$\dfrac{b_n}{a_n} = \boxed{(가)}$

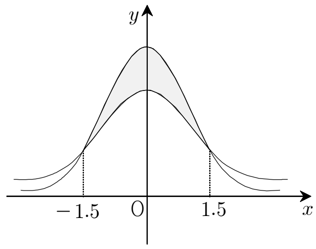
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$	$2a_{n+1}b_{n+1}$	$2a_n b_{n+2}$
②	$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$	$4a_{n+1}b_{n+1}$	$a_n b_{n+2}$
③	$\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$2a_{n+1}b_{n+1}$	$2a_n b_{n+2}$
④	$\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$4a_{n+1}b_{n+1}$	$a_n b_{n+2}$
⑤	$\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$4a_{n+1}b_{n+1}$	$2a_n b_{n+2}$

16. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Z의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 다음 조건이 모두 성립한다.

(가) $\sigma > 1$
(나) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $x=-1.5$, $x=1.5$일 때 만난다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 0.096일 때, X의 표준편차 σ의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]



z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.2	0.385
1.5	0.433
2.0	0.477

① 1.20 ② 1.25 ③ 1.50 ④ 1.75 ⑤ 2.00

17. 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_n, T_n을 다음과 같이 정의하자.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보기>
ㄱ. $a_n + S_n = 2$ (단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)
ㄴ. $T_n = a_{n-1}$ (단, $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

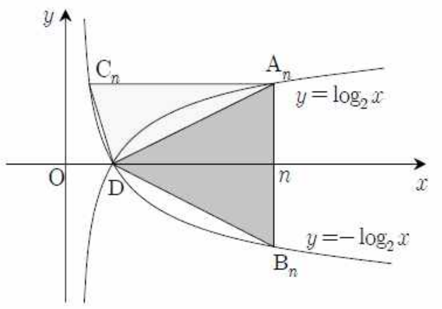
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 어느 농장에서 생산된 포도송이의 무게는 평균 600 g, 표준편차 100 g 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 생산된 포도송이 중 임의로 100 송이를 추출할 때, 포도송이의 무게가 636 g 이상인 것이 42 송이 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.36	0.14
1.00	0.34
1.25	0.39
2.00	0.48

① 0.02 ② 0.11 ③ 0.14 ④ 0.16 ⑤ 0.36

19. 그림과 같이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = -\log_2 x$ 가 직선 $x = n$ (n은 2 이상의 자연수)과 만나는 점을 각각 A_n, B_n 이라 하고, 점 A_n 을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y = -\log_2 x$ 와 만나는 점을 C_n 이라 하자. 점 $\mathrm{D}(1, 0)$ 에 대하여 두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}$, $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}$ 의 넓이를 각각 S_n, T_n 이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{S_n}$ 의 값은? [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ 1

20. [표 1]은 20 개의 행과 20 개의 열로 이루어진 표에 자연수를 규칙적으로 적어놓은 것이다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	⋯	제k열	⋯	제20열
제1행	1	2	3	4	5	⋯	k	⋯	20
제2행	2	2	3	4	5	⋯	k	⋯	20
제3행	3	3	3	4	5	⋯	k	⋯	20
제4행	4	4	4	4	5	⋯	k	⋯	20
제5행	5	5	5	5	5	⋯	k	⋯	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋯	⋮
제k행	k	k	k	k	k	⋯	k	⋯	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
제20행	20	20	20	20	20	⋯	⋯	⋯	20

[표 1]

[표 2]는 [표 1]의 홀수 번째 행에 있는 수와, 짝수 번째 열에 있는 수를 모두 지운 것이다.

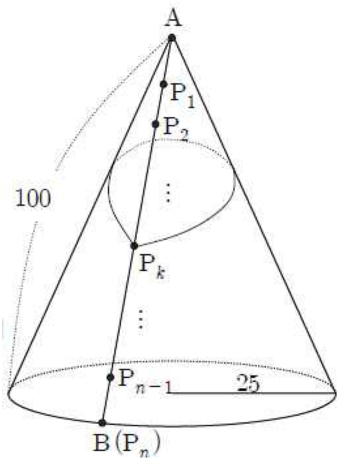
	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	⋯	제20열
제1행							
제2행	2		3		5	⋯	
제3행							
제4행	4		4		5	⋯	
제5행							
⋮	⋮		⋮		⋮	⋱	
제20행	20		20		20	⋯	

[표 2]

[표 2]에 남아 있는 모든 자연수의 합은? [4점]

① 1024 ② 1155 ③ 1225
④ 1280 ⑤ 1385

21. 밑면의 반지름의 길이가 25, 모선의 길이가 100인 원뿔이 있다. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 모선 $\overline{\mathrm{AB}}$를 n등분한 점 중 꼭지점 A에 가까운 점부터 차례로
P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고, 점 B를 P_n이라 하자.
또, 점 P_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에서 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아서 점 P_k로 되돌아오는 최단 경로의 길이를 l_k라 할 때,
$S_n=\sum_{k=1}^{n} l_k$라 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]

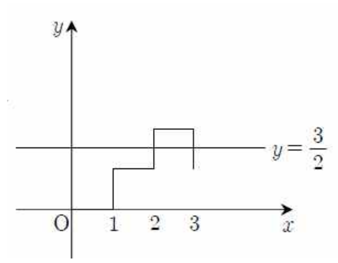


① $50\sqrt{2}$ ② $75\sqrt{2}$ ③ $100\sqrt{2}$
④ $125\sqrt{2}$ ⑤ $150\sqrt{2}$

22. 좌표평면 위의 원점에 놓인 점 P가 1개의 동전을 던질 때마다 다음과 같이 움직인다고 한다.

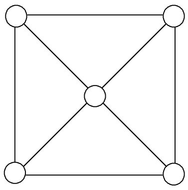
앞면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하고, 뒷면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

예를 들어, 동전을 3번 던져서 차례로 앞면, 앞면, 뒷면이 나왔을 때 점 P가 지나간 자취는 그림과 같고, 이 자취는 직선 $y=\frac{3}{2}$과 두 점에서 만난다. 동전을 5번 던질 때, 점 P가 지나간 자취와 직선 $y=\frac{3}{2}$이 오직 한 점에서 만날 확률은? [4점]



① $\frac{3}{32}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{5}{32}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

23. 그림과 같이 정사각형과 서로 합동인 5개의 원으로 이루어진 놀이판이 있다. 각 원의 중심은 정사각형의 네 꼭지점과 두 대각선이 만나는 점이다. 서로 다른 5개의 돌 중에서 3개를 뽑아 3개의 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는? (단, 회전하여 같은 경우는 한 가지로 계산한다.) [4점]



① 150 ② 160 ③ 170 ④ 190 ⑤ 200

24. 어떤 영화의 흥행수입을 분석한 결과, 개봉한 후 50일째까지의 총 흥행수입이 400억 원이고, 개봉한 후 100일째까지의 총 흥행수입이 640억 원이라고 한다. 이 영화를 개봉한 후 n일째까지의 총 흥행수입을 $f(n)$ (억 원)이라 하면

$f(n) = a(1-b^n)$ (단, a, b는 양의 상수, n은 자연수)

이 성립한다고 하자. 이 영화의 총 흥행수입이 처음으로 800억 원을 넘어서는 날은 개봉한 후 며칠 째인가?
(단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$로 계산한다.) [4점]

① 140일 ② 150일 ③ 160일
④ 170일 ⑤ 180일

25. 방정식 $3(1-\log_2 x)^2 - 2(1-\log_2 x) - 4 = 0$의 두 근을 각각 α, β라 할 때, $\alpha^3\beta^3$의 값을 구하시오. [3점]

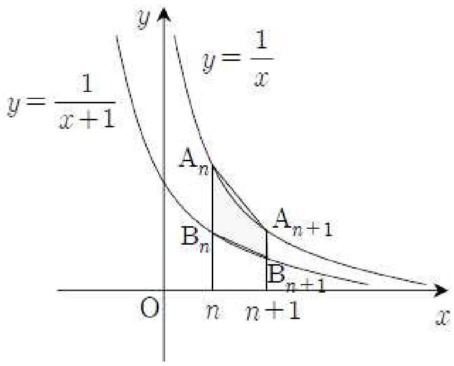
26. 자연수 n과 행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 A^n의 모든 성분의 합을 S_n이라 하자. 이 때, $\log_2 S_{50}$의 값을 구하시오. [3점]

27. 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = [a_n] + \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이 때, a_{39}의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

28. 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x+1}$과 직선 $x=n$ (n은 자연수)이 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고, 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 하자. 이 때, $100\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값을 구하시오. [4점]



29. 그림과 같이 4개의 가로줄과 3개의 세로줄로 이루어진 전화기의 숫자판이 있다. 이 때, 다음 조건을 모두 만족시키면서 숫자판에 있는 숫자를 누르는 방법의 수를 구하시오. [4점]

1	2	3
4	5	6
7	8	9
*	0	#

(가) *, # 을 제외한 10개의 숫자 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 누른다. 이 때, 누르는 순서가 다르면 서로 다른 경우이다.
(나) 4개의 가로줄에서는 각각 숫자를 1개씩 누른다.
(다) 1개의 세로줄에서는 숫자를 2개 누르고, 나머지 2개의 세로줄에서는 각각 숫자를 1개씩 누른다.

30. 자연수 n에 대하여 2.52^{10n}의 최고자리의 숫자를 a_n이라 하자. 예를 들어, $2.52^{10} \fallingdotseq 1.03\times10^4$, $2.52^{20} \fallingdotseq 1.06\times10^8$, $2.52^{30} \fallingdotseq 1.10\times10^{12}$이므로 $a_1=a_2=a_3=1$이다.
$a_n>1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 2.52 = 0.4014$로 계산한다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2008년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ⑤

$a^2\sqrt[5]{b}=1 \Rightarrow a^{10}b=1 \Rightarrow a^{10}=\frac{1}{b}$

$\therefore \log_a \frac{1}{b}=10$

$\therefore \log_a \frac{1}{ab}=-1+\log_a \frac{1}{b}=9$

2) ①

ABA^{-1}의 역행렬이 $A \Leftrightarrow (ABA^{-1})\cdot A=E$

$\therefore AB=E$

$\therefore B=A^{-1}=\frac{1}{(2\cdot(-2)-5\cdot(-1))}\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$\therefore$ 성분의 합 $=-4$

3) ⑤

$A,\ B$ 가 서로 독립 $\Leftrightarrow A,\ B^c$도 독립

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{4}{5}$ …… (1)

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap \mathrm{B}^c)=\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}^c)=\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot(1-\mathrm{P}(\mathrm{B}))=\frac{1}{3}$ ……(2)

(1)식을 변형하면 $\mathrm{P}(\mathrm{A})(1-\mathrm{P}(\mathrm{B}))+\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{4}{5}$

(2)식을 (1)식에 대입하여 계산하면 $\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{7}{15}$ ……(3)

(3)식을 (2)식에 대입하면

$\therefore \mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{5}{8}$

4) ③

$\log x=n+\alpha$ 라 하자.(단, n은 정수, $0\le\alpha<1$)

준식에 대입해서 정리하면 $(n+\alpha)^2+\alpha^2=8,\ n^2+2\alpha n+2\alpha^2=8$

$x>1$이면서 n값은 정수이므로 $n=0,1,2,\cdots$ 등이 가능하다.

i) $n=0$인 경우

$\alpha^2=4$를 만족시키는 실수 α는 존재하지 않는다.

ii) $n=1$인 경우

$2\alpha^2+2\alpha-7=0 \Rightarrow \alpha=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$

(주어진 α의 범위를 만족시키지 않는다.

iii) $n=2$인 경우

$\alpha^2+2\alpha-2=0 \Rightarrow \alpha=-1+\sqrt{3}\ (\because 0\le\alpha<1)$

$n\ge 3$인 경우 가수 조건을 만족시키는 α는 존재하지 않는다.

$\therefore\ \log x=n+\alpha=2+(-1+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$

5) ①

주어진 점화식에 n대신 $2n-1$을 대입하면

$a_{2n}a_{2n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}$ …… (1)

또, 주어진 점화식에 n대신 $2n$을 대입하면

$a_{2n+1}a_{2n}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ …… (2)

(1)식을 정리해서 (2)식에 대입해서 점화식을 유도하면

$a_{2n+1}=\frac{1}{4}a_{2n-1}$

주어진 수열은 초항이 2이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

마찬가지로, 짝수항들에 대해서도 점화식을 유도하면

초항이 $\frac{1}{8}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이 된다.

$\therefore$ 수열의 합 $=\frac{8}{3}+\frac{1}{6}=\frac{17}{6}$

6) ③

꺼낸 공들의 수의 최솟값을 확률변수 X라 두고,

X에 대한 확률분포표를 그리면

X	1	2	3	합
p	$\frac{{}_4C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$	$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$	$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$	1

$\therefore\ X$의 평균은 $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{10}=\frac{3}{2}$

7) ④

(가) 조건에서 $b_1=a_1=p+1$

또한, $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$이므로 a_n을 구해보면

$a_n=n^3+pn-\{(n^3-3n^2+3n-1)+pn-p\}$

$\therefore a_n=3n^2-3n+p+1(n\ge 1,\ \because a_1=S_1)$

(나) 조건에 의해 b_n을 계산해주면

$\therefore b_n=a_n-a_{n-1}=3n^2-3n+p+1-\{3n^2-6n+3-3n+3+p+1\}$

$=6n-6$

이 때, $b_1=p+1=0$을 만족시켜야 초항부터 등차수열을 만족하므로

$\therefore p=-1$

8) ②

연립방정식이 해를 갖지 않아야 하므로 $\frac{a}{-2b-3}=\frac{1}{b+2}\ne\frac{2-a}{3}$

를 만족시켜야 한다.

$\frac{a}{-2b-3}=\frac{1}{b+2}$에서 $ab+2a+2b+3=0,\ (a+2)(b+2)=1$을

만족하며, $a,\ b$는 정수이므로

$\begin{cases}a=-1\ b=-1\\ a=-3\ b=-3\end{cases}$의 두 쌍이 존재한다. 이 값들을 $\frac{1}{b+2}\ne\frac{2-a}{3}$에

대입하면

i) $a=-1, b=-1$ 대입하면 $1=1$

ii) $a=-3, b=-3$을 대입하면 $-1\ne\frac{5}{3}$

i), ii)에서 $a+b=-6$

9) ④

주어진 식은 결국 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+3}\right)$의 최솟값을 구하라는 것과 같다.

그런데, 밑은 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $\frac{y+1}{x+3}$이 최대일때 주어진 식은 최솟값을 갖는다.

여기서, $\frac{y+1}{x+3}$의 의미를 살펴보면 $\frac{y-(-1)}{x-(-3)}$, 즉 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$와 $(-3,\ -1)$을 이은 직선의 기울기의 최댓값을 구하라는 것으로 해석할 수 있다.

이 때, 기울기의 최솟값은 $(-3,\ -1)$을 지나면서 기울기가 k인 직선이 원과 접할 때의 k값이다.

$\therefore y+1=k(x+3),\ kx-y+3k-1=0$

결국 원의 중심으로부터 직선까지의 거리가 1이 되는 그러한 m값을 찾아주면 된다.

$\therefore \frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \Rightarrow 4k^2-3k=0,\ \therefore k=\frac{3}{4}(\because y\neq-1)$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{y+1}{x+3}\right)\geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}=m \quad \therefore 2^m=\frac{4}{3}$

10) ③

ㄱ) $a_n=b_n$이므로 주어진 식에서 $a_n=a_{n+1}-a_n$

$\Rightarrow \therefore a_{n+1}=2a_n \Rightarrow$등비수열

ㄴ) $2^{b_n}\rightarrow$등비수열 $\Rightarrow b_n=$등차수열 $\Rightarrow a_n=n$에대한 2차식 $\neq$ 등차수열

ㄷ) $\log_2 a_n=pn+q$(단, p,q는 상수) $\Rightarrow a_n=2^{pn+q}\Rightarrow$

$b_n=a_{n+1}-a_n=2^{pn+p+q}-2^{pn+q}=2^{pn+q}(2^p-1)$

$\Rightarrow \therefore b_n$은 공비가 2^p인 등비수열이다.

$\therefore$ ㄱ 과 ㄷ이 옳다.

11) ②

ㄱ) (반례)$a_n=1,\ c_n=2,\ b_n=3$이라 두면 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로 $\alpha\neq\beta$이지만 수열 c_n은 수렴한다.

ㄴ) $a_n<b_n$이고 각각의 수열이 수렴하므로 그들의 극한값 사이에는 $\alpha\leq\beta$의 관계가 성립한다.

그런데, 만약 $\alpha=\beta$라면 샌드위치정리에 의해 c_n도 α로 수렴할 수 밖에 없다.

그러므로, c_n이 발산하면 $\alpha<\beta$가 성립한다.

ㄷ) 주어진 조건은 결국 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이면 무한급수가 수렴하는지를 물어본 것인데 이 명제는 거짓이므로 항상 성립하지 않는다.

그러므로 옳은 것은 ㄴ이다.

12) ②

ㄱ) $0<\log_a c<1$이므로 $1<c<a$를 만족시킨다.($\because a>1$)

그러므로, 구한 부등식의 양변에 $\log_b$를 달아주면 $\log_b c<\log_b a$를 만족한다.

ㄴ) $0<\log_a c<1$이므로 $a<c<1$를 만족시킨다.

$b>1$이므로 $\log_b a<\log_b c$가 성립한다.

ㄷ) $\log_a c<0$이므로 $c>1$이다. 그러므로 $\log_a b>\log_c b$가 성립한다 $\therefore$ ㄴ만 옳다.

13) ④

$a=1\ b=0$인 경우: ${}_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{16}{81}$

$a=2\ b=1$인 경우: $\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^1=\frac{1}{27}$

위의 두가지 이외에는 나타나지 않으므로 구하는 모든 확률의 합은

$\frac{16}{81}+\frac{1}{27}=\frac{19}{81}$

14) ④

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$이라 두고 b_n의 값을 구해 보면

$a_{n+1}={}_{2n+2}C_2\times{}_{2n}C_2\times{}_{2n-2}C_2\times\cdots\times{}_2C_2\times\frac{1}{(n+1)!}$,

$a_n={}_{2n}C_2\times{}_{2n-2}C_2\times\cdots\times{}_2C_2\times\frac{1}{n!}$

$\therefore b_n={}_{2n+2}C_2\times\frac{1}{n+1}=\frac{2(n+1)(2n+1)}{2\cdot1}\times\frac{1}{n+1}=2n+1$

$\therefore b_{10}=2\cdot10+1=21$

15) ④

나) 등차수열이므로

$\sqrt{a_n b_n}+\sqrt{a_{n+2}b_{n+2}}=2\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}=\sqrt{4a_{n+1}b_{n+1}}$

다) 산술 – 기하 부등식에서 등호가 성립하는 경우이므로

$a_{n+2}b_n=a_n b_{n+2}$

가) ㉣에 ㉡과 ㉢의식을 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,\ b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n$로 변형하여 대입하여 정리하면

$a_n b_{n+1}=a_{n+1}b_n$이다.

16) ②

$\sigma>1$이므로 위에 있는 그래프가 Z이므로

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)-\mathrm{P}(0\leq X\leq1.5)=0.048$

$\therefore \mathrm{P}(0\leq X\leq1.5)=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{1.5}{\sigma}\right)=0.433-0.048=0.385$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.2)$

$\therefore \frac{1.5}{\sigma}=1.2\Rightarrow\sigma=\frac{5}{4}=1.25$

17) ⑤

$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore S_n=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$T_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=a_{n-1}$

ㄱ) $a_n+S_n=2$

ㄴ) $T_n=a_{n-1}$

ㄷ) $\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=\lim_{n\to\infty}(2-a_n+a_{n-1})=2$

$\left(\because\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=0\right)$

$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$\therefore\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=2$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

18) ②

포도송이 한 송이의 무게를 확률변수 X라 두면

$X\sim N(600,100^2)$이므로 한 송이의 무게가 636g 이상일 확률은

$P(X\geq636)=P(Z\geq0.36)=0.36$

포도송이를 100송이 뽑았을 때 636g 이상인 포도송이의 개수를 확률변수 Y라 두면 $Y\sim B(100,0.36)$가 되고 이 이항분포는

정규분포$N(36,(4.8)^2)$에 근사해 간다.

$\therefore P(Y\geq42)=P(Z\geq1.25)=0.11$

19) ①

$S_n=\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot 2\log_2 n$, $T_n=\frac{1}{2}\cdot(n-\frac{1}{n})\cdot\log_2 n$이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n}}{2(n-1)}=\frac{1}{2}$

20) ⑤

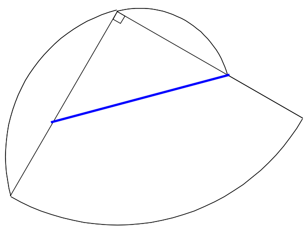
주어진 규칙에서 남은 수 들을 쭉 나열해 보면

수	개수	수	개수	수	개수
2	1	6	3	⋮	⋮
3	1	7	3	18	9
4	2	8	4	19	9
5	2	9	4	20	10

$\therefore$ 구하는 수의 총 합$=\sum_{k=1}^{9}(2k+2k+1)\cdot k+200=1385$

21) ①

주어진 그림의 전개도에서 $l_k=\overline{P_kP_k'}=100\sqrt{2}\cdot\frac{k}{n}$



$\therefore \sum_{k=1}^{n}l_k=\frac{100\sqrt{2}}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=50\sqrt{2}(n+1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{50\sqrt{2}(n+1)}{n}=50\sqrt{2}$

22) ③

전체 경우의 수는 $2^5=32$가지

앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 주어진 직선과 오직 한번만 만나는 경우는

(H,H,H,H,H), (H,H,H,H,T), (H,H,H,T,H), (T,H,H,H,H), (H,T,H,H,H)의 5가지이다.

$\therefore p=\frac{5}{32}$

23) ①

주어진 5개의 돌 중에서 3개의 돌을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

주어진 경우의 수는 가운데 원에 돌을 놓 경우와 그렇지 않은 경우로 분류할 수 있다.

i) 가운데 원에 색칠하는 경우

뽑은 3개의 돌 중에 가운데 배열할 돌을 뽑는 경우의 수는 3가지

이 때, 정사각형의 네 꼭지점에 2개의 돌을 배열하는 경우의 수는 2개의 돌과 2개의 빈자리를 돌리는 원순열의 수와 같으므로

$\frac{(4-1)!}{2}=3$가지가 있다.

$\therefore 10\times{}_3C_1\times 3=90$

ii) 가운데 원에 색칠하지 않는 경우

이 경우는 결국 3개의 돌과 한 개의 빈자리를 돌리는 경우의 수로 생각할 수 있으므로

$\therefore 10\times(4-1)!=60$

i), ii)는 배반사건이므로 구하는 총 경우의 수$=90+60=150$

24) ③

주어진 조건에서 50일 까지의 흥행 수입은 400억 원 이므로

$f(50)=a(1-b^{50})=400$ ……(1)

또한, 100일 까지의 흥행 수입은 640억 원 이므로

$f(100)=a(1-b^{100})=a(1-b^{50})(1+b^{50})=640$ ……(2)

(1)식을 (2)식에 대입하면

$400(1+b^{50})=640,\ 1+b^{50}=\frac{640}{400}=\frac{8}{5}\ \Rightarrow\ \therefore b^{50}=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$

양변에 상용로그를 취해 계산하면

$50\log b=\log 6-\log 10=0.30+0.48-1=-0.22$

$\therefore \log b=-\frac{0.22}{50}=-\frac{44}{10000}\ \Rightarrow b=10^{-\frac{44}{10000}}$

이 여기서, 이 값을 (1)식에 대입하면

$a\left(1-\frac{3}{5}\right)=400$

$\therefore a=1000$

$f(n)=1000\left(1-10^{-\frac{44}{10000}n}\right)$

$f(n)$값이 800이상이 되는 n값을 구해주는 것이므로

$1000\left(1-10^{-\frac{44}{10000}n}\right)\geq 800$

$\frac{2}{10}\geq 10^{-\frac{44}{10000}n}\ \Rightarrow\ \frac{10}{2}\ \leq\ 10^{\frac{44}{10000}n}$

양변에 상용로그를 취하면

$1-\log 2=\frac{7}{10}\ \leq\ \frac{44}{10000}n$

$\therefore n\geq\frac{7000}{44}\fallingdotseq 159.0909\cdots$

따라서 개봉 후 160일 후에 처음으로 흥행 수입이 800억을 넘어간다.

25) 16

$\log_2 x=t$라 두면 주어진 방정식의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$가 된다.

$3(1-t)^2-2(1-t)-4=0,\ 3t^2-4t-3=0$

이 방정식의 두 근의 합은 $\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=-\frac{(-4)}{3}=\frac{4}{3}$

$\therefore \alpha\beta=2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore \alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^3=2^4=16$

26) 101

$A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$이라 두면 $A^{n+1}=A^n\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\\ c_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a_n+b_n & 3b_n+a_n\\ 3c_n+d_n & 3d_n+c_n\end{pmatrix}$이 성립한다.

이 때, $a_{n+1}+b_{n+1}=4(a_n+b_n)$이므로 a_n+b_n은 초항$=a_1+b_1=4$이고 공비가 4인 등비수열이다.

마찬가지로, c_n+d_n역시 초항=공비=4인 등비수열이다.

$\therefore S_n=a_n+b_n+c_n+d_n=4^n+4^n=2^{2n+1}$이므로

$\therefore \log_2 S_n=2n+1$

$\therefore$ 구하는값 $=2\cdot 50+1=101$

27) 362

직접 수열 a_n을 구해보면

$a_1=1,\ a_2=\frac{3}{2},\ a_3=2,\ a_4=\frac{7}{2},\ a_5=5,\ a_6=\frac{15}{2},\ a_7=10,\ a_8=\frac{27}{2}$

$\cdots\cdots$이므로 a_n은 홀수항은 계차수열이 $2n-1$, 짝수번째 항은 계차수열이 각각 $2n$인 수열이다.

여기서, 구하려는 값은 a_{39}이므로 홀수번째 항들만 묶어서 생각하면

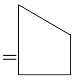
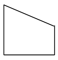
$a_1=1,\ a_3=2,\ a_5=5,\ a_7=10,\ \cdots$로 가는 수열이므로

a_{2n-1}은 초항이 1, 계차수열이 $2n-1$인 수열이다.

$\therefore a_{2n-1}=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=n^2-2n+2$

$\therefore a_{39}=20^2-2\cdot 20+2=362$

28) 75

$S_n=$  $-$ 

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore 100\sum_{n=1}^{\infty}S_n=75$

29) 288

분할-분배의 아이디어를 활용하여, 이 문제에서도 먼저 숫자들을 뽑은 후에 나열하는 방법을 채택하기로 하자.

우선, 주어진 조건에 맞게 수를 뽑는 경우의 수를 구해보면, 각 가로줄마다 숫자를 적어도 한 개씩은 택해야 하니 4행의 0은 반드시 택해야만 한다.

이 경우, 2개의 숫자를 뽑는 열은 0이 포함되어있는 2열과 0이 없는 1열, 3열의 경우로 나누어서 생각할 수 있다.

i) 2열에서 2개의 수를 쓰는 경우

2열의 수 2, 5, 8 중 1개를 택하는 경우의 수는 $_3C_1$

이 때, 1열에서 택할 수 있는 수는 2열에서 택한 수를 제외한 행의 것이어야 하므로 $_2C_1$

그러므로 이 경우에는 숫자를 뽑는 경우의 수가 $3\times 2=6$이 된다.

ii) 1열(3열)에서 2개의 수를 뽑는 경우

1열의 수 1, 4, 7 중 2개를 택하는 경우의 수는 $_3C_2$

이 때, 2열에서는 이미 0이 택해져 있으므로 3열에서는 1열에서 뽑지 않은 행의 수를 택해야 하므로 경우의수는 1가지가 된다.

이 때, 1열에서 2개 뽑는 경우와 3열에서 2개 뽑는 경우는 경우의 수가 같다.

$\therefore {}_3C_2\times 2=6$

i), ii)에서 숫자를 뽑는 총 경우의 수는 12가지가 된다.

문제 조건 (가)에서 누르는 순서가 다르면 다른 것으로 취급하자고 하였기 때문에 주어진 4개의 숫자를 나열해 주어야 한다. 4개의 서로다른 수를 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

$\therefore$ 숫자판의 수를 누르는 방법 $=12\times 24=288$

30) 22

$2.52^{10n}=N$ 이라 두고 양변에 상용로그를 취해주면

$\log N=10n\log 2.52=4+0.014n$이 된다.

이 때, $0.014n$은 $n\leq 71$일 때, 1보다 작으므로 저 범위에서 0.014는 가수가 된다.

최고자리수는 결국 그 가수의 범위와 관련이 있으므로

$\log 2\leq 0.014n<\log 3$을 만족시키는 최소의 n값을 구해주면 된다.

여기서, $\log 2=0.3010$이므로 $0.3010\leq 0.014n$,

$14n\geq 301\ \Rightarrow\ \therefore n\geq\frac{301}{14}=21.5$

따라서, a_n값이 1이 되는 자연수 n의 최솟값은 22이다.