2008학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 1 이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 $a^2 \cdot \sqrt[5]{b} = 1$ 이 성립할 때, $\log_a \frac{1}{ab}$ 의 값은? [2점]

① -9　② -3　③ 3
④ 5　⑤ 9

2. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 와 이차 정사각행렬 B 에 대하여 행렬 ABA^{-1} 의 역행렬이 A 일 때, 행렬 B 의 모든 성분의 합은? [2점]

① -4　② -2　③ 2
④ 4　⑤ 8

3. 부등식 $[x]^3 - 6[x]^2 + 11[x] - 6 \geq 0$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 집합은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [2점]

① $\{x \mid x \geq 1\}$　② $\{x \mid x \geq 3\}$
③ $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$　④ $\{x \mid 1 \leq x < 4\}$
⑤ $\{x \mid 1 \leq x < 2$ 또는 $x \geq 3\}$

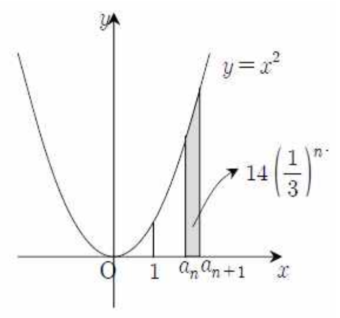
4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $f'(1) = 2$
> (나) 모든 실수 x, y에 대하여
> $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y) - 3$

이 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

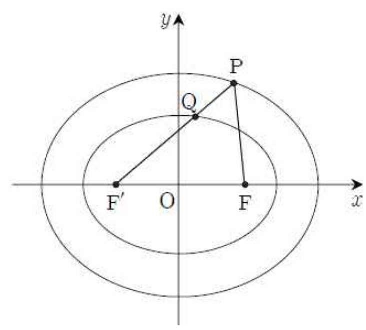
① 9　② 12　③ 15
④ 18　⑤ 21

5. $a_1 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. 곡선 $y = x^2$과 x축 및 두 직선 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $14\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$일 때, $\lim_{n \to \infty} a_n$의 값은? [3점]



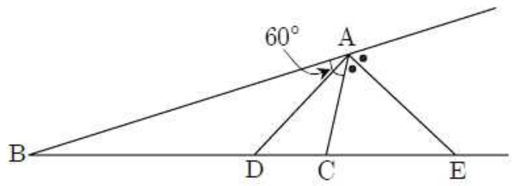
① $5\sqrt[3]{5}$ ② $4\sqrt[3]{4}$ ③ $3\sqrt[3]{3}$
④ 4 ⑤ 5

6. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 이 타원 위의 점 P에 대하여 선분 F′P가 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$과 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{F'Q}} = 8$일 때, 선분 FP의 길이는? [3점]



① 7 ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{31}{4}$ ⑤ 8

7. $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$이고 $\angle BCA > 90^\circ$인 둔각삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 $\angle BAC$의 이등분선과 선분 BC의 교점을 D, $\angle BAC$의 외각의 이등분선과 선분 BC의 연장선의 교점을 E라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



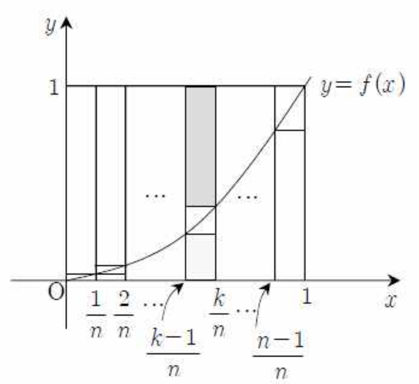
<보기>

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$
ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} > \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$
ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} > \overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 A_n, B_n을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}, \quad B_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{1-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$



이 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보기>

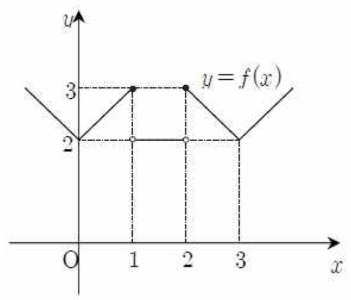
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}B_n=\frac{3}{4}$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(A_n-B_n)=-\frac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to 1-}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 2+}(f\circ f)(x)$

ㄷ. 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

10. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x$가 있다. 임의의 양의 실수 a에 대하여 $f(a)\geq f(b)$를 만족시키는 음의 실수 b의 최댓값은? [3점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

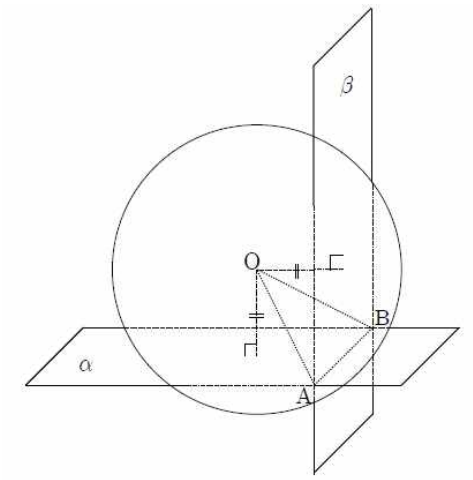
11. 충분히 크고 비어 있는 물탱크에 다음과 같은 방법으로 물을 넣고 빼는 시행을 한다.

> (가) 물을 넣기 시작한 지 t분 ($0 \leq t \leq 20$)이 지난 순간, 물탱크에 넣는 물의 부피의 변화율은 $(t+8)$(L/분)이다.
> (나) 물의 양이 130L가 되는 순간부터는 물탱크의 밑바닥에 있는 출구를 열어 물을 뺀다. 이 때, 빠져 나가는 물의 부피의 변화율은 26(L/분)으로 일정하다. 단, 물탱크의 출구를 열어도 (가)의 방법으로 계속 물을 넣는다.

물탱크의 물의 양이 두 번째로 100L가 될 때까지 걸리는 시간은? [4점]

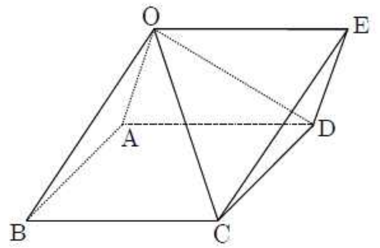
① 10분　② 12분　③ 14분
④ 16분　⑤ 18분

12. 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구와, 점 O로부터 같은 거리에 있고 서로 수직인 두 평면 α, β가 있다. 그림과 같이 두 평면 α, β의 교선이 구와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB가 정삼각형일 때, 점 O와 평면 α 사이의 거리는? [4점]



① $\frac{\sqrt{2}}{5}$　② $\frac{\sqrt{6}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. 그림은 모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔 $O-ABCD$와 정사면체 $O-CDE$를 면 OCD가 공유하도록 붙여놓은 것이다. 평면 $ABCD$와 평면 CDE가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{2}{9}$　⑤ $\frac{1}{9}$

14. n이 자연수일 때, $2n$명의 학생을 두 명씩 n개의 조로 나누는 방법의 수를 a_n이라 하자. 이 때, $\frac{a_{11}}{a_{10}}$의 값은? [3점]

① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

15. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 항이 양수인 등차수열일 때, 다음은 수열 $\{\sqrt{a_n b_n}\}$이 등차수열이면 $\dfrac{b_n}{a_n} = \boxed{\text{(가)}}$ 임을 증명한 것이다.

<증명>
수열 $\{\sqrt{a_n b_n}\}$이 등차수열이므로 모든 자연수 n에 대하여

$\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{a_{n+2} b_{n+2}} = \sqrt{\boxed{\text{(나)}}}$ …… ㉠

또, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이므로

$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ …… ㉡

$b_n + b_{n+2} = 2b_{n+1}$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입한 후, 양변을 제곱하여 정리하면

$2\sqrt{a_n b_n a_{n+2} b_{n+2}} = a_n b_{n+2} + a_{n+2} b_n$

다시 위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$a_{n+2} b_n = \boxed{\text{(다)}}$ …… ㉣

따라서 ㉡, ㉢, ㉣에서

$\dfrac{b_n}{a_n} = \boxed{\text{(가)}}$

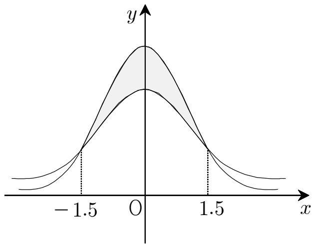
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$	$2a_{n+1}b_{n+1}$	$2a_n b_{n+2}$
②	$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$	$4a_{n+1}b_{n+1}$	$a_n b_{n+2}$
③	$\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$2a_{n+1}b_{n+1}$	$2a_n b_{n+2}$
④	$\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$4a_{n+1}b_{n+1}$	$a_n b_{n+2}$
⑤	$\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$	$4a_{n+1}b_{n+1}$	$2a_n b_{n+2}$

16. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다. 두 확률변수 X, Z의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 다음 조건이 모두 성립한다.

(가) $\sigma > 1$
(나) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $x=-1.5$, $x=1.5$일 때 만난다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 0.096일 때, X의 표준편차 σ의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]



z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.2	0.385
1.5	0.433
2.0	0.477

① 1.20 ② 1.25 ③ 1.50
④ 1.75 ⑤ 2.00

17. 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_n, T_n 을 다음과 같이 정의하자.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad T_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $a_n + S_n = 2$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)
> ㄴ. $T_n = a_{n-1}$ (단, $n = 2, 3, 4, \cdots$)
> ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

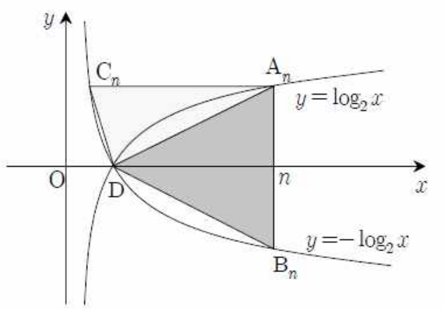
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 어느 농장에서 생산된 포도송이의 무게는 평균 600g, 표준편차 100g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장에서 생산된 포도송이 중 임의로 100송이를 추출할 때, 포도송이의 무게가 636g 이상인 것이 42송이 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.36	0.14
1.00	0.34
1.25	0.39
2.00	0.48

① 0.02 ② 0.11 ③ 0.14 ④ 0.16 ⑤ 0.36

19. 그림과 같이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = -\log_2 x$가 직선 $x = n$ (n은 2 이상의 자연수)과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고, 점 A_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y = -\log_2 x$와 만나는 점을 C_n이라 하자. 점 $D(1, 0)$에 대하여 두 삼각형 A_nB_nD, A_nC_nD의 넓이를 각각 S_n, T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ 1

20. [표 1]은 20개의 행과 20개의 열로 이루어진 표에 자연수를 규칙적으로 적어놓은 것이다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	⋯	제k열	⋯	제20열
제1행	1	2	3	4	5	⋯	k	⋯	20
제2행	2	2	3	4	5	⋯	k	⋯	20
제3행	3	3	3	4	5	⋯	k	⋯	20
제4행	4	4	4	4	5	⋯	k	⋯	20
제5행	5	5	5	5	5	⋯	k	⋯	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋯	⋮
제k행	k	k	k	k	k	⋯	k	⋯	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
제20행	20	20	20	20	20	⋯	⋯	⋯	20

[표 1]

[표 2]는 [표 1]의 홀수 번째 행에 있는 수와, 짝수 번째 열에 있는 수를 모두 지운 것이다.

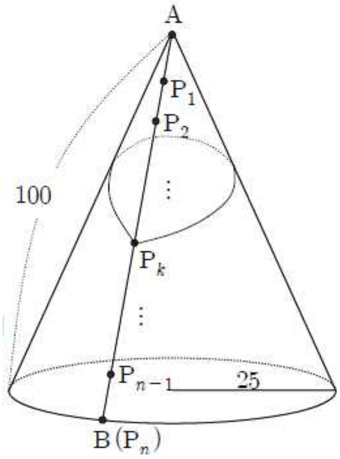
	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	⋯	제20열
제1행							
제2행	2		3		5	⋯	
제3행							
제4행	4		4		5	⋯	
제5행							
⋮	⋮		⋮		⋮	⋱	
제20행	20		20		20	⋯	

[표 2]

[표 2]에 남아 있는 모든 자연수의 합은? [4점]

① 1024 ② 1155 ③ 1225
④ 1280 ⑤ 1385

21. 밑면의 반지름의 길이가 25, 모선의 길이가 100인 원뿔이 있다. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 모선 $\overline{\mathrm{AB}}$를 n등분한 점 중 꼭지점 A에 가까운 점부터 차례로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고, 점 B를 P_n이라 하자.
또, 점 P_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ n)$에서 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아서 점 P_k로 되돌아오는 최단 경로의 길이를 l_k라 할 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n} l_k$라 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]

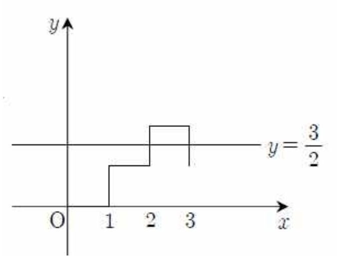


① $50\sqrt{2}$ ② $75\sqrt{2}$ ③ $100\sqrt{2}$
④ $125\sqrt{2}$ ⑤ $150\sqrt{2}$

22. 좌표평면 위의 원점에 놓인 점 P가 1개의 동전을 던질 때마다 다음과 같이 움직인다고 한다.

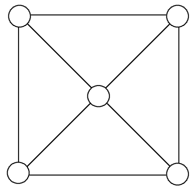
앞면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하고, 뒷면이 나오면 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.

예를 들어, 동전을 3번 던져서 차례로 앞면, 앞면, 뒷면이 나왔을 때 점 P가 지나간 자취는 그림과 같고, 이 자취는 직선 $y=\frac{3}{2}$과 두 점에서 만난다. 동전을 5번 던질 때, 점 P가 지나간 자취와 직선 $y=\frac{3}{2}$이 오직 한 점에서 만날 확률은? [4점]



① $\frac{3}{32}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{5}{32}$ ④ $\frac{7}{32}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

23. 그림과 같이 정사각형과 서로 합동인 5개의 원으로 이루어진 놀이판이 있다. 각 원의 중심은 정사각형의 네 꼭지점과 두 대각선이 만나는 점이다. 서로 다른 5개의 돌 중에서 3개를 뽑아 3개의 원 안에 각각 1개씩 올려놓는 방법의 수는? (단, 회전하여 같은 경우는 한 가지로 계산한다.) [4점]



① 150 ② 160 ③ 170
④ 190 ⑤ 200

24. 어떤 영화의 흥행수입을 분석한 결과, 개봉한 후 50일째까지의 총 흥행수입이 400억 원이고, 개봉한 후 100일째까지의 총 흥행수입이 640억 원이라고 한다. 이 영화를 개봉한 후 n일째까지의 총 흥행수입을 $f(n)$ (억 원)이라 하면

$f(n)=a(1-b^n)$ (단, a, b는 양의 상수, n은 자연수)

이 성립한다고 하자. 이 영화의 총 흥행수입이 처음으로 800억 원을 넘어서는 날은 개봉한 후 며칠 째인가? (단, $\log 2=0.30$, $\log 3=0.48$로 계산한다.) [4점]

① 140일 ② 150일 ③ 160일
④ 170일 ⑤ 180일

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 방정식 $3(1-\log_2 x)^2 - 2(1-\log_2 x) - 4 = 0$의 두 근을 각각 α, β라 할 때, $\alpha^3\beta^3$의 값을 구하시오. [3점]

26. $x \neq 2$인 모든 실수 x에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{x\to 2}\{2f(x)+g(x)\}=1$ (나) $\lim_{x\to 2} g(x)=\infty$

이 때, $\lim_{x\to 2}\dfrac{4f(x)-40g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구하시오. [3점]

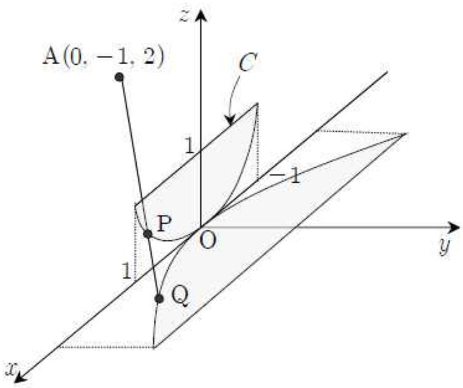
27. y축을 준선으로 하고 초점이 x축 위에 있는 두 포물선이 있다. 두 포물선이 y축에 대하여 서로 대칭이고, 두 포물선의 꼭지점 사이의 거리는 4이다. 두 포물선에 동시에 접하고 기울기가 양수인 직선을 그을 때, 두 접점 사이의 거리를 d라 하자. d^2의 값을 구하시오. [3점]

28. 좌표공간에서 구 $(x-12)^2+(y-5)^2+(z-10)^2=100$이 xy평면과 접하는 점을 A라 하고, 구 위를 움직이는 점을 P라 하자. 이 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

29. 좌표공간에서 집합

$$\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+(z-1)^2 \leqq 1,\quad y=0,\quad 0 \leqq z \leqq 1\}$$

이 나타내는 도형을 C라 하자. 점 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 2)$와 도형 C 위의 점 P를 지나는 직선이 xy평면과 만나는 점을 Q라 하면 점 Q가 나타내는 도형의 넓이는 $\dfrac{b}{a}$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 자연수 n에 대하여 2.52^{10n}의 최고자리의 숫자를 a_n이라 하자. 예를 들어, $2.52^{10} \fallingdotseq 1.03\times10^4$, $2.52^{20} \fallingdotseq 1.06\times10^8$, $2.52^{30} \fallingdotseq 1.10\times10^{12}$ 이므로 $a_1=a_2=a_3=1$이다.
$a_n>1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.
(단, $\log 2=0.3010$, $\log 2.52=0.4014$로 계산한다.) [4점]

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2008년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ⑤

$a^2\sqrt[5]{b}=1 \Rightarrow a^{10}b=1 \Rightarrow a^{10}=\frac{1}{b}$

$\therefore \log_a \frac{1}{b}=10$

$\therefore \log_a \frac{1}{ab}=-1+\log_a \frac{1}{b}=9$

2) ①

ABA^{-1}의 역행렬이 $A \Leftrightarrow (ABA^{-1})\cdot A=E$

$\therefore AB=E$

$\therefore B=A^{-1}=\frac{1}{(2\cdot(-2))-5\cdot(-1)}\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

∴ 성분의 합 $=-4$

3) ①

$[x]=n$이라 두면(단, n은 정수)

준식$=n^3-6n^2+11n-6\geqq 0$

$\Leftrightarrow(n-1)(n-2)(n-3)\geqq 0$

$\therefore 1\leqq n\leqq 2$ or $n\geqq 3\rightarrow n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ ($\because n$은 정수)

$\therefore [x]=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \Rightarrow 1\leqq x<2$ or $2\leqq x<3$ or $3\leqq x<4\cdots$

$\Rightarrow x\geqq 1$

4) ③

y대신 0대입$\rightarrow f(x)=f(x)+f(0)-3\Rightarrow \therefore f(0)=3$

i) 도함수의 정의를 활용하면

ii) 편미분을 활용하면$\rightarrow y$만 변수 취급

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x+y)=f'(y)+x^2+2xy$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)-3-f(x)}{h}$

$\Downarrow y$대신 0대입

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)-3}{h}+x(x+h)\right)$

$\therefore f'(x)=x^2+f'(0)$

$=f'(0)+x^2\quad \left(\because f(0)=3,\ \lim_{h\to 0}x(x+h)=x^2\right)$

문제에서 $f'(1)=2$이므로 대입하면

$f'(1)=1+f'(0)=2\Rightarrow \therefore f'(0)=1$

$\therefore f'(x)=x^2+1$

이 식을 적분하면

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x+3(\because f(0)=3)$

$\Rightarrow\ \therefore f(3)=\frac{1}{3}\cdot(3)^3+3+3=15$

5) ④

$\int_{a_n}^{a_{n+1}}x^2dx=\frac{1}{3}(a_{n+1}^3-a_n^3)=14\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_{n+1}^3-a_n^3=42\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_n^3=1+\sum_{k=1}^{n-1}42\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=1+63\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}a_n^3=\alpha^3=64$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=4$

6) ③

주어진 보조선을 그리고 $\overline{PF}=a$라 두면

$\overline{QF}=6,\ \overline{PQ}=12-a$이므로 직각삼각형$PQF(\because \angle F'QF=90°)$에서

피타고라스의 정리를 사용하면

$a^2=(12-a)^2+6^2 \Rightarrow \therefore a=\frac{15}{2}$

7) ④

ㄱ) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\neq\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}$ ($\because D$는 중점이 아님)

ㄴ) A에서 $\overline{BE}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{c},\overrightarrow{\mathrm{HD}}=\vec{d},\overrightarrow{\mathrm{HE}}=\vec{e}$라 두면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{a})-(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{e}-\vec{a})$

$=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{e}>0$

$(\because \vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{d}\cdot\vec{a}=\vec{e}\cdot\vec{a}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{d}>0,\ \vec{c}\cdot\vec{e}<0)$

ㄷ) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})-(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{e}-\vec{a})$

$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{e}>0$

$(\because \vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{d}\cdot\vec{a}=\vec{e}\cdot\vec{a}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}>0,\ \vec{d}\cdot\vec{e}<0)$

그러므로 ㄴ과 ㄷ이 옳다.

8) ②

주어진 식 $A_n,\ B_n$ 의 극한값을 각각 구해보자.

$\frac{k-1}{n}=x$라 두면 구간은 $[0,1]$, $dx=\frac{1}{n}$이 된다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$

$\frac{k}{n}=x$라 두면 구간은 $[0,1]$, $dx=\frac{1}{n}$이 된다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}B_n=\int_0^1\{1-f(x)\}dx=\frac{3}{4}$가 된다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ과 ㄴ이다.

9) ⑤

ㄱ) $\lim_{x\to\pm 0}(f\circ f)(x)\ =\ \lim_{t\to 2+}f(t)=3$

$\uparrow\ f(x)=t$

$\therefore \lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=3\neq 2$

ㄴ) $\lim_{x\to 1-}(f\circ f)(x)\ =\ \lim_{t\to 3-}f(t)=3$

$\uparrow f(x)=t$

$\lim_{x\to 2+}(f\circ f)(x)\ =\ \lim_{t\to 3-}f(t)=3$

$\uparrow f(x)=t$

$\therefore \lim_{x\to 1-}(f\circ f)(x)=\lim_{x\to 2+}(f\circ f)(x)=3$

ㄷ) $(f\circ f)(3)=f(2)=3$

$\lim_{x\to\pm 3}(f\circ f)(x)\ =\ \lim_{t\to 2+}f(t)=3$

$\uparrow\ f(x)=t$

$\therefore \lim_{x\to 3}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(x)=3$

그러므로 옳은 것은 ㄴ과 ㄷ이다.

10) ⑤

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$\therefore x=1,\ -1$에서 극값을 갖는다.

$a\geq 0$일 때, $f(a)\geq f(1)=-2$($\because x<1$인 구간에서 감소, $x>1$인 구간에서 증가하므로)

$\therefore f(a)\geq -2\geq f(b)$를 만족시키는 음의 실수 b의 최댓값을 구하면 된다.

$f(b)+2=b^3-3b+2\leq 0$

$(b-1)^2(b+2)\leq 0$

$\therefore b=1$ or $b\leq -2$

$\therefore b$의 최댓값 $=-2$

11) ④

$\frac{dV}{dt}=t+8 \Rightarrow V=\frac{1}{2}t^2+8t(\because t=0\rightarrow V=0)$

$V=\frac{1}{2}t^2+8t=130\ \rightarrow\ t=10\ (\because t>0)$

즉, 10초 후부터 물이 빠져나가기 시작한다.

그러므로, 10초 후 남아있는 물의 양은

$V=\frac{1}{2}t^2+8t-26(t-10)=\frac{1}{2}t^2-18t+260$

$\therefore \frac{1}{2}t^2-18t+260=100$

$t^2-36t+320=0\ \Rightarrow (t-16)(t-20)=0$

$\therefore t=16$ ($\because$ 증가할 때 한번 100L가 됐으므로)

12) ②

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M, 점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, β에 내린 수선의 발을 $\overline{\mathrm{H}'}$라 두면

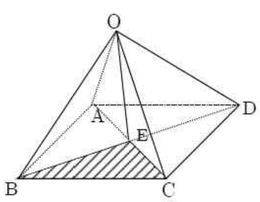
$\overline{\mathrm{OM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,($\because \overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}=1$인 정삼각형) $\overline{\mathrm{OH}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OH}'}=\overline{\mathrm{HM}}=a$이므로 직각삼각형 $\triangle$OHM은 직각이등변삼각형이 된다.

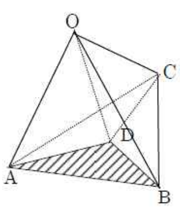
$\therefore \overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HM}}:\overline{\mathrm{OM}}=1:1:\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore a=\frac{\sqrt{6}}{4}$

13) ②



[그림1]



[그림2]

모서리의 길이를 a라 하고,

ㄱ) [그림1]에서 OBC와 BCE가 이루는 각을 α라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\cos\alpha=\frac{1}{4}a^2,$

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ \sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$

ㄴ) [그림2]에서 OAB와 DAB가 이루는 각을 β라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{1}{3},$

$\therefore \cos\beta=\frac{1}{3},\ \ \sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ㄱ),ㄴ)에서

$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha-\beta)=-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{3}$

14) ④

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=b_n$이라 두고 b_n의 값을 구해 보면

$a_{n+1}={}_{2n+2}C_2\times{}_{2n}C_2\times{}_{2n-2}C_2\times\cdots\times{}_2C_2\times\frac{1}{(n+1)!},$

$a_n={}_{2n}C_2\times{}_{2n-2}C_2\times\cdots\times{}_2C_2\times\frac{1}{n!}$

$\therefore b_n={}_{2n+2}C_2\times\frac{1}{n+1}=\frac{2(n+1)(2n+1)}{2\cdot 1}\times\frac{1}{n+1}=2n+1$

$\therefore b_{10}=2\cdot 10+1=21$

15) ④

나) 등차수열이므로

$\sqrt{a_n b_n}+\sqrt{a_{n+2}b_{n+2}}=2\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}=\sqrt{4a_{n+1}b_{n+1}}$

다) 산술 - 기하 부등식에서 등호가 성립하는 경우이므로

$a_{n+2}b_n=a_n b_{n+2}$

가) ㉣에 ㉡과 ㉢의식을 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,\ b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n$로 변형하여 대입하여 정리하면

$a_n b_{n+1}=a_{n+1}b_n$이다.

16) ②

$\sigma>1$이므로 위에 있는 그래프가 Z이므로

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)-\mathrm{P}(0\leq X\leq 1.5)=0.048$

$\therefore \mathrm{P}(0\leq X\leq 1.5)=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{1.5}{\sigma}\right)=0.433-0.048=0.385$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.2)$

$\therefore \frac{1.5}{\sigma}=1.2\Rightarrow\sigma=\frac{5}{4}=1.25$

17) ⑤

$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore S_n=\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$

$T_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=a_{n-1}$

ㄱ) $a_n+S_n=2$

ㄴ) $T_n=a_{n-1}$

ㄷ) $\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)=\lim_{n\to\infty}(2-a_n+a_{n-1})=2$

$\left(\because \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=0\right)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2$$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

18) ②

포도송이 한 송이의 무게를 확률변수 X라 두면

$X \sim N(600, 100^2)$이므로 한 송이의 무게가 636g 이상일 확률은

$P(X \geq 636) = P(Z \geq 0.36) = 0.36$

포도송이를 100송이 뽑았을 때 636g 이상인 포도송이의 개수를 확률변수 Y라 두면 $Y \sim B(100, 0.36)$가 되고 이 이항분포는

정규분포 $N(36, (4.8)^2)$에 근사해 간다.

$\therefore P(Y \geq 42) = P(Z \geq 1.25) = 0.11$

19) ①

$S_n = \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot 2\log_2 n,\ T_n = \frac{1}{2} \cdot (n - \frac{1}{n}) \cdot \log_2 n$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\frac{1}{n}}{2(n-1)} = \frac{1}{2}$$

20) ⑤

주어진 규칙에서 남은 수 들을 쭉 나열해 보면

수	개수
2	1
3	1
4	2
5	2

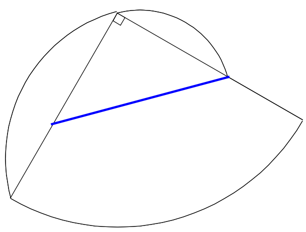
수	개수
6	3
7	3
8	4
9	4

수	개수
⋮	⋮
18	9
19	9
20	10

$\therefore$ 구하는 수의 총 합$= \sum_{k=1}^{9}(2k+2k+1) \cdot k + 200 = 1385$

21) ①

주어진 그림의 전개도에서 $l_k = \overline{P_k P_k'} = 100\sqrt{2} \cdot \frac{k}{n}$



$$\therefore \sum_{k=1}^{n} l_k = \frac{100\sqrt{2}}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 50\sqrt{2}(n+1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{50\sqrt{2}(n+1)}{n} = 50\sqrt{2}$$

22) ③

전체 경우의 수는 $2^5 = 32$가지

앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 주어진 직선과 오직 한번만 만나는 경우는

(H,H,H,H,H), (H,H,H,H,T), (H,H,H,T,H), (T,H,H,H,H),

(H,T,H,H,H)의 5가지이다.

$\therefore p = \frac{5}{32}$

23) ①

주어진 5개의 돌 중에서 3개의 돌을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3 = 10$

주어진 경우의 수는 가운데 원에 돌을 놓 경우와 그렇지 않은 경우로 분류할 수 있다.

i) 가운데 원에 색칠하는 경우

뽑은 3개의 돌 중에 가운데 배열할 돌을 뽑는 경우의 수는 3가지, 이 때, 정사각형의 네 꼭지점에 2개의 돌을 배열하는 경우의 수는 2개의 돌과 2개의 빈자리를 돌리는 원순열의 수와 같으므로 $\frac{(4-1)!}{2} = 3$가지가 있다.

$\therefore 10 \times {}_3C_1 \times 3 = 90$

ii) 가운데 원에 색칠하지 않는 경우

이 경우는 결국 게개의 돌과 한 개의 빈자리를 돌리는 경우의 수로 생각할 수 있으므로

$\therefore 10 \times (4-1)! = 60$

i), ii)는 배반사건이므로 구하는 총 경우의 수$= 90 + 60 = 150$

24) ③

주어진 조건에서 50일 까지의 흥행 수입은 400억 원 이므로

$f(50) = a(1-b^{50}) = 400$ ……(1)

또한, 100일 까지의 흥행 수입은 640억 원 이므로

$f(100) = a(1-b^{100}) = a(1-b^{50})(1+b^{50}) = 640$ ……(2)

(1)식을 (2)식에 대입하면

$400(1+b^{50}) = 640,\ 1+b^{50} = \frac{640}{400} = \frac{8}{5} \Rightarrow \therefore b^{50} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

양변에 상용로그를 취해 계산하면 ㄴ

$50\log b = \log 6 - \log 10 = 0.30 + 0.48 - 1 = -0.22$

$\therefore \log b = -\frac{0.22}{50} = -\frac{44}{10000} \Rightarrow b = 10^{-\frac{44}{10000}}$

이 여기서, 이 값을 (1)식에 대입하면

$a\left(1 - \frac{3}{5}\right) = 400$

$\therefore a = 1000$

$f(n) = 1000\left(1 - 10^{-\frac{44}{10000}n}\right)$

$f(n)$값이 800이상이 되는 n값을 구해주는 것이므로

$1000\left(1 - 10^{-\frac{44}{10000}n}\right) \geq 800$

$\frac{2}{10} \geq 10^{-\frac{44}{10000}n} \Rightarrow \frac{10}{2} \leq 10^{\frac{44}{10000}n}$

양변에 상용로그를 취하면

$1 - \log 2 = \frac{7}{10} \leq \frac{44}{10000}n$

$\therefore n \geq \frac{7000}{44} \fallingdotseq 159.0909\cdots$

따라서 개봉 후 160일 후에 처음으로 흥행 수입이 800억을 넘어간다.

25) 16

$\log_2 x = t$라 두면 주어진 방정식의 두 근은 $\log_2 \alpha,\ \log_2 \beta$가 된다.

$3(1-t)^2 - 2(1-t) - 4 = 0,\ 3t^2 - 4t - 3 = 0$

이 방정식의 두 근의 합은

$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = \log_2 \alpha\beta = -\frac{(-4)}{3} = \frac{4}{3}$

$\therefore \alpha\beta = 2^{\frac{4}{3}}$

$\therefore \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^3 = 2^4 = 16$

26) 21

(나) 조건에서 $\lim_{x\to 2} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{1}{g(x)} = 0$이다.

그러므로 (가) 조건의 식 $2f(x)+g(x)=1$의 양변에 $\frac{1}{g(x)}$를 곱해주면

$2\cdot\frac{f(x)}{g(x)}+1=\frac{1}{g(x)}$

양변에 $x\to 2$인 극한을 취해주면

$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2f(x)}{g(x)}+1\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{g(x)}=0$

$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=-\frac{1}{2}$

여기서 구하라는 식의 분모, 분자를 $g(x)$로 나눠주면

준식 $=\lim_{x\to 2}\frac{4\frac{f(x)}{g(x)}-40}{2\frac{f(x)}{g(x)}-1}=\frac{-2-40}{-1-1}=21$

27) 128

두 포물선은 꼭지점으로부터 준선까지의 거리가 각각 2이면서 각각 x축으로 2, -2 만큼 평행이동한 포물선의 방정식이므로, 포물선의 방정식은 각각 $y^2=-8(x+2)$, $y^2=8(x-2)$가 된다.

이 때, 이 두 포물선에 동시에 접하는 직선의 방정식의 기울기를 m이라 두면, 첫 번째 포물선의 방정식에서의 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=m(x+2)-\frac{2}{m}=mx+2m-\frac{2}{m}$이 되며, 두 번째 포물선의 방정식은 $y=m(x-2)+\frac{2}{m}=mx-2m+\frac{2}{m}$이 된다.

이 두 접선의 방정식이 일치해야 하므로 $-2m+\frac{2}{m}=2m-\frac{2}{m}$,

$4m=\frac{4}{m}$, $\therefore m=1(\because m>0)$가 된다.

주어진 식에 m값을 대입해서 직선의 방정식을 구해보면 $y=x$가 된다.

이 때, $y=x$와 두 포물선과의 교점의 좌표를 연립해서 구해보면 $(-4,-4),(4,4)$가 된다.

그러므로 두점사이의 거리 $d=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{128}$

$\therefore d^2=128$

28) 299

구의 중심 $(12,5,10)$에서 xy평면에 수직이면서 원점을 지나는 평면으로 자른 구의 단면과 xy평면과의 관계에서

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 값은 결국 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$와 점 P의 xy평면 위로의 수선의 발 P′와 원점 O를 이은 선분인 $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|$의 곱과 같다.

그러므로 $13\cdot(13-10)\leq \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\leq 13\cdot(13+10)$

$\therefore 39\leq\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\leq 299$이므로 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 최댓값은 299이다.

29) 11

도형 C 위의 점 $\mathrm{P}(p,0,q)$라 두면 $p^2+(q-1)^2\leq 1$, $0\leq q\leq 1$을 만족한다.

주어진 도형의 자취는 결국 두 점 A와 P를 지나는 직선의 방정식이 xy평면과 만나서 생기는 점들의 자취라 볼 수 있다.

여기서, 두 점을 지나는 직선의 방정식을 유도해보면

$\frac{x-0}{p-0}=\frac{y-(-1)}{0-(-1)}=\frac{z-2}{q-2}\Rightarrow\frac{x}{p}=y+1=\frac{z-2}{q-2}$라 둘 수 있다.

이 직선 위의 임의의 점을 매개변수 t를 활용해 표기하면 $x=pt, y=t-1, z=2+(q-2)t$라 둘 수 있다.

이 때, xy평면과의 교점은 결국 $z=0$인 점들이므로 $2+qt-2t=0$을 만족시킨다.

여기서, $p=\frac{x}{t}$, $t=y+1$, $q=\frac{2(t-1)}{t}$가 성립한다.

$\therefore p=\frac{x}{y+1}$, $q=\frac{2y}{y+1}$

이 식을 위의 원의 방정식에 넣어서 정리하면 $y\geq\frac{1}{4}x^2$, $0\leq y\leq 1$이 된다.

그러므로 주어진 자취의 넓이는 $4-2\int_0^2\frac{1}{4}x^2dx = \frac{8}{3} = \frac{b}{a}$

$\therefore a+b=11$

30) 22

$2.52^{10n}=N$이라 두고 양변에 상용로그를 취해주면

$\log N=10n\log 2.52 = 4+0.014n$이 된다.

이 때, $0.014n$은 $n\leq 71$일 때, 1보다 작으므로 저 범위에서 0.014는 가수가 된다.

최고자리수는 결국 그 가수의 범위와 관련이 있으므로

$\log 2\leq 0.014n<\log 3$을 만족시키는 최소의 n값을 구해주면 된다.

여기서, $\log 2=0.3010$이므로 $0.3010\leq 0.014n$,

$14n\geq 301 \Rightarrow \therefore n\geq\frac{301}{14}=21.5$

따라서, a_n값이 1이 되는 자연수 n의 최솟값은 22이다.