2007학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형

성명	

수험번호							

1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6 - a_7 + a_8 = 2007$일 때, a_7의 값은? [2점]

① $\frac{2007}{4}$ ② 669 ③ $\frac{2007}{2}$ ④ 2007 ⑤ 4014

2. $\left\{ \dfrac{(\sqrt{10}+3)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{10}-3)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{10}+1)^{\frac{1}{2}}} \right\}^2$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

3. 두 사건 A, B에 대하여 사건 C를 $C = A \cup B$라 하자.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

일 때, 조건부확률 $\mathrm{P}(B \mid C)$의 값은? [2점]

① $\frac{8}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

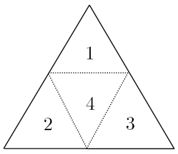
4. $(17.8)^n$의 정수부분이 9자리의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값은? (단, $\log 1.78 = 0.25$로 계산한다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. $a_n = \sum_{k=1}^{n} ck$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 상수 c의 값은? [3점]

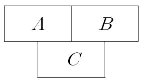
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 그림은 1, 2, 3, 4 가 적힌 정사면체의 전개도이다. 이 전개도로 만든 정사면체를 두 번 던질 때, 밑면에 적힌 수 중 첫 번째 수를 a, 두 번째 수를 b라 하자. $|a-b|$의 값을 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [3점]



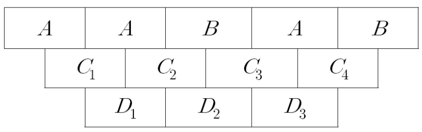
① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ 1 ④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{5}{4}$

7. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=C$일 때, 이를 [그림1]과 같이 나타내기로 하자.



[그림1]

이와 같은 방법으로 [그림2]의 이차정사각행렬 C_1, C_2, C_3, C_4와 D_1, D_2, D_3을 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.) [3점]



[그림2]

<보기>

ㄱ. $C_1=O$ 이면 $A=O$ 이다.
ㄴ. $C_2=C_3$ 이면 $D_2=D_3$ 이다.
ㄷ. $D_2=E$ 이면 $D_3=E$ 이다.

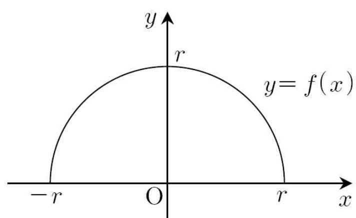
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

8. 어느 양식장에 있는 물고기의 무게는 평균 600g, 표준편차 144g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 양식장에서 36마리의 물고기를 임의추출하였을 때, 무게의 평균이 576g 이상 636g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.7745 ② 0.6826 ③ 0.6687
④ 0.6247 ⑤ 0.5328

9. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 반원의 호가 되도록 상수 r의 값을 정할 때, 확률 $\mathrm{P}\left(X \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$의 값은?
(단, $-r \leq x \leq r$이다.) [3점]



① $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ② $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ ③ $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$
④ $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ⑤ $1-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

10. 이차정사각행렬 A가 $A^2 - A - 2E = O$를 만족할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.) [3점]

> ㄱ. $(A+E)^2 = 3(A+E)$
> ㄴ. 이차정사각행렬 B, C에 대하여 $AB = AC$ 이면 $B = C$ 이다.
> ㄷ. 연립일차방정식 $(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$은 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 5개의 제비 중에서 당첨제비가 2개 있다. 갑이 먼저 한 개의 제비를 뽑은 다음 을이 한 개의 제비를 뽑을 때, 갑이 당첨제비를 뽑을 사건을 A, 을이 당첨제비를 뽑을 사건을 B라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 한 번 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.) [3점]

> <보기>
> ㄱ. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$
> ㄴ. $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B|A^c)$
> ㄷ. $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A|B)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

12. 주머니 속에 빨간 공 3개, 노란 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 시행을 반복할 때, 세 번째 시행에서 처음으로 서로 다른 색의 공이 뽑힐 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.) [3점]

① $\frac{2}{35}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{4}{35}$ ④ $\frac{6}{35}$ ⑤ $\frac{8}{35}$

13. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$의 역행렬을 B라 할 때, B^n의 $(2,\ 1)$성분을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [4점]

① $-11 - \frac{1}{2^{10}}$ ② $-10 - \frac{1}{2^{10}}$ ③ $-9 - \frac{1}{2^{10}}$
④ $-10 - \frac{1}{2^{11}}$ ⑤ $-9 - \frac{1}{2^{11}}$

14. 수열 $\{S_n\}$ 에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ 일 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

> 모든 양의 실수 x 에 대하여 $\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$ 가 성립한다.
> 자연수 $k,\ n\ (k\leq n)$에 대하여 $x=\frac{k}{n^2}$ 를 위 부등식에 대입하여 정리하면
> $$\frac{k}{2n^2+k}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{k}{2n^2} \text{ 이므로}$$
> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}<S_n<\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k \text{ 이다.}$$
> 이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=$ (가)이고,
> $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}$$
> $$\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}=(\text{ 나 })$$
> 이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=$ (다)이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
②	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
③	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
④	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
⑤	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

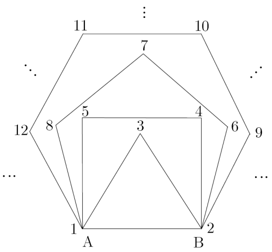
15. 확률변수 X 가 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 3^2)$ 을 따를 때, $\mathrm{P}(|X-5|\leq 3)=0.6826$ 이다. 확률변수 Y 를 $Y=2X+1$ 이라 할 때, $\mathrm{P}(Y\geq 17)$ 의 값은? [3점]

① 0.1037 ② 0.1587 ③ 0.3174 ④ 0.3413 ⑤ 0.6826

16. 좌표평면에서 자연수 k 에 대하여 네 부등식 $x>0$, $y>0$, $y<2^{-x}+k$, $x<k+\frac{1}{2}$ 을 모두 만족하는 영역에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 $N(k)$ 라 하자. $\sum_{k=1}^{10}N(k)$ 의 값은? [4점]

① 55 ② 125 ③ 144 ④ 252 ⑤ 385

17. 선분 AB를 한 변으로 공유하는 정삼각형, 정사각형, 정오각형, ⋯ 을 차례로 그린다. 그림과 같이 선분 AB의 양 끝점에 1 , 2 를 각각 적고, 각 정다각형의 꼭지점 중 두 점 A, B를 제외한 모든 꼭지점에 정삼각형, 정사각형, 정오각형, ⋯ 의 순서로 자연수 3, 4, 5, ⋯ 를 차례로 대응시킨다. 정40각형의 꼭지점에 대응되는 자연수 중에서 가장 큰 수는? [4점]



① 555　② 639　③ 743　④ 857　⑤ 950

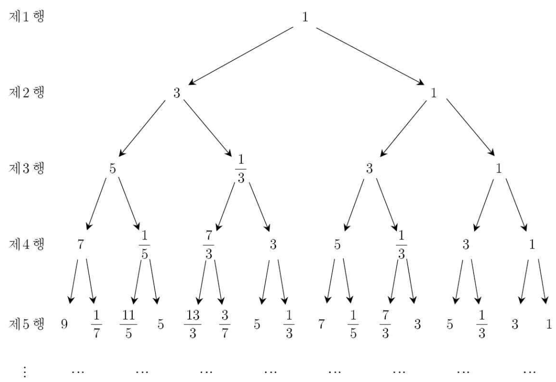
18. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(k)$ 가

$$f(k)=\begin{cases} k-2 & (k \geqq 4) \\ f(f(k+3)) & (k < 4) \end{cases}$$

을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{20} f(k)$ 의 값은? [4점]

① 168　② 172　③ 176　④ 180　⑤ 184

19. 그림은 제1 행에 1 을 시작으로 바로 다음 행에 ↙ 방향으로는 직전의 수에 2 를 더한 수를, ↘ 방향으로는 직전의 수의 역수를 나열하는 과정을 반복한 것이다. 예를 들면, 제3 행의 첫 번째 수 5 는 직전의 수 3 에 2 를 더한 수이고, 두 번째 수 $\frac{1}{3}$ 은 직전의 수 3 의 역수이다.



제10 행의 맨 왼쪽부터 (2^8+2) 번째에 있는 수는? [4점]

① $\frac{1}{17}$　② $\frac{1}{15}$　③ 13　④ 15　⑤ 17

20. 세 로그함수 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=\log_b x$, $h(x)=\log_c x$ 의 밑 a, b, c 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. $a+c$ 의 최솟값은 $2b$ 이다.

ㄴ. $\frac{1}{f(5)}$, $\frac{1}{g(5)}$, $\frac{1}{h(5)}$ 은 이 순서로 등차수열을 이룬다.

ㄷ. $f(x_1)=g(x_2)=h(x_3)=5$ 이면 x_1, x_2, x_3 은 이 순서로 등비수열을 이룬다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(1,0)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$ 가 있다. 선분 AC 의 중점을 P_1 이라 하고, 선분 BP_1 의 중점을 Q_1 이라 하자. 또, 선분 AQ_1 의 중점을 P_2 라 하고, 선분 BP_2 의 중점을 Q_2 라 하자. 이와 같이 모든 자연수 n에 대하여 선분 BP_n의 중점을 Q_n 이라 하고, 선분 AQ_n의 중점을 P_{n+1} 이라 하자. n 이 한없이 커질 때, 점 P_n 은 어떤 점에 한없이 가까워지는가? [4점]

① $\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ ② $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$

22. 집합 $A=\{x\,|\,x$ 는 12의 양의 약수$\}$ 의 원소 중에서 서로 다른 4 개의 원소를 택하여 일렬로 나열할 때, 양 끝에 놓인 두 수의 곱과 나머지 두 수의 곱이 서로 같은 경우의 수는? [4점]

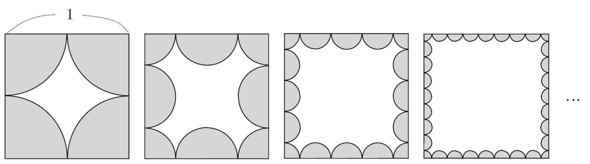
① 18 ② 24 ③ 30 ④ 32 ⑤ 40

23. 공기는 산소, 수소, 질소 등과 같은 여러 가지 원소들로 이루어져 있다. 지표면에서부터 높이가 x (km)인 곳에서의 어떤 원소의 밀도를 $n(x)$라 하면 관계식 $\log n(x)=\log n_0-kx$ (단, n_0 은 지표면에서의 밀도, k는 양의 상수)가 성립한다고 한다. 이 원소의 밀도가 지표면에서의 밀도의 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{1000}$배가 되는 높이를 각각 x_1 , x_2 라 할 때, $\frac{x_2}{x_1}$ 의 값은? (단, $\log 2=0.3$ 으로 계산한다.) [4점]

① 5 ② 8 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

24. 한 변의 길이가 1 인 정사각형을 R라 하자. R의 각 변을 2 등분 한 후 [그림1]과 같이 각 꼭지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 사분원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_1 이라 하자. R의 각 변을 4 등분 한 후 [그림2]와 같이 각 꼭지점 및 각 변의 이등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_2 라 하자.
R의 각 변을 8 등분 한 후 [그림3]과 같이 각 꼭지점 및 각 변의 사등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_3 이라 하자.
이와 같은 방법으로 S_4, S_5, S_6, $\cdots$ 을 구할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?

[4점]



[그림1] [그림2] [그림3] [그림4]

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ $\frac{7}{9}\pi$ ④ $\frac{7}{8}\pi$ ⑤ $\frac{8}{9}\pi$

25. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+3n}$ 의 소수부분을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{10}{a_n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = n - 4\left[\frac{n}{4}\right]$$

일 때, $\sum_{n=1}^{25} a_n$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$이고, $A^{11}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \end{pmatrix}$ 일 때, $x+y$ 의 값을 구하시오. [3점]

28. 어느 사관학교에서는 매년 휴가기간에 4학년 생도 전부를 대상으로 해외 배낭여행을 실시하고 있다. 여행 6개월 전에 희망지역을 조사한 결과, 유럽, 미국, 아시아 지역을 희망한 생도의 비율이 각각 30%, 50%, 20%이었다. 비자발급을 위해 여행 3개월 전에 희망지역을 최종적으로 조사한 결과 유럽 지역을 희망했던 생도의 15%, 미국 지역을 희망했던 생도의 5%, 아시아 지역을 희망했던 생도의 35%가 여행지를 변경하였다. 여행지역을 변경한 생도 1명을 임의로 택할 때, 그 생도가 최초에 미국 지역을 희망했을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 수면에서 수면과 수직인 방향으로 물속을 향해 발사된 총알은 시간이 지날수록 물의 저항에 의해 속도가 줄어든다. 수면에서 1000 (m/초)의 속도로 어떤 총알이 발사된 후 t 초 $\left(0 \leq t < \frac{1}{50}\right)$가 지난 순간 총알의 속도를 $v(t)$ (m/초)라 하면 관계식 $v(t)=a \cdot b^{100t}$ (단, a 와 b 는 양의 상수)이 성립한다고 하자. 발사 후 $\frac{1}{100}$ 초가 지난 순간 총알의 속도가 50(m/초) 이었다. 총알의 속도가 $100\sqrt{5}$ (m/초) 가 되는 것은 총알이 발사된 후 p초가 지난 순간이다. $\frac{1}{p}$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 X 로의 함수 중에서 다음 조건을 모두 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) f 의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) \neq 1$
(다) $f(2) \neq f(f(1))$

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2007년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ④

초항이 a, 공차를 d인 등차수열이라고 하면

$$a_6-a_7+a_8=(a+5d)-(a+6d)+(a+7d)$$
$$=a+6d=a_7=2007$$

2) ②

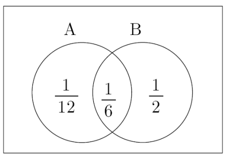
주어진 식을 정리하면

$$\left\{\frac{(\sqrt{10}+3)^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{10}-3)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{10}+1)^{\frac{1}{2}}}\right\}^2$$

$$=\frac{(\sqrt{10}+3)+2\cdot(\sqrt{10}+3)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{10}-3)^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{10}-3)}{\sqrt{10}+1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{10}+1)}{\sqrt{10}+1}=1$$

3) ①



벤 다이어그램을 이용하면

$$P(B\mid C)=\frac{P(B)}{P(C)}=\frac{P(B)}{P(A\cup B)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{9}$$

4) ②

$(17.8)^n$이 9자리수가 되기 위해서 $8\leqq\log(17.8)^n<9$이여야 한다.

$\log17.8=\log1.78\times10=1.25$이므로

$$\frac{8}{\log17.8}\leqq n<\frac{9}{\log17.8}$$

$$\frac{32}{5}\leqq n<\frac{36}{5}$$

$\therefore\ n=7$

5) ④

$$a_n=\sum_{k=1}^{\infty}ck=c\sum_{k=1}^{\infty}=c\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{2}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{2}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{2}{c}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{2}{c}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{c}$$

6) ⑤

네 수 1,2,3,4에서 중복을 허락하여 두 번 꺼냈을 때, 두 수 a와 b의 차와 같으므로 가능한 모든 경우의 수는 16가지이다. 두 수의 차가 0이 되는 경우의 수는 6가지이다. 두 수의 차가 2,3이 되는 경우의 수는 각각 4,2가지이다. 확률변수 $X(=|a-b|)$에 대한 확률분포표를 만들면 표와 같다.

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

따라서, 확률변수 X의 기댓값 $E(X)$는

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{4}\right)+\left(1\times\frac{3}{8}\right)+\left(2\times\frac{1}{4}\right)+\left(3\times\frac{1}{8}\right)=\ \frac{5}{4}$$

7) ⑤

주어진 정의에 의하여

$c_1=AA,\ C_2=C_4=AB,\ C_3=BA$

$D_2=C_2C_3=ABBA, D_3=BABA$이다.

ㄱ. 주어진 명제는 「$A^2=0$이면 $A=0$이다.」(거짓)

(반례) $A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 이면$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

ㄴ. 주어진 명제는 「$AB=BA$ 이면 $ABBA=BAAB$이다.」 따라서,

$ABBA=BAAB$ (참)

ㄷ. 주어진 명제는 「$ABBA=E$ 이면 $BAAB=E$이다.」

$ABBA=(AB)(BA)=E\cdots(1)$ 이므로 AB와 BA는 서로 역행렬 관계이다. 식 (1)의 앞뒤에 각각 $(AB)^{-1}$과 $(BA)^{-1}$을 곱하면

$(AB)^{-1}(AB)(BA)(BA)^{-1}=(AB)^{-1}E(BA)^{-1}$

$\therefore E=BAAB$ (참)

8) ①

임의 추출한 36마리의 물고기의 무게 X의 평균과 표준편차를 각각 $m,\ \sigma$라 하면 $m=600g,\ \sigma=\frac{144}{\sqrt{36}}=24g$

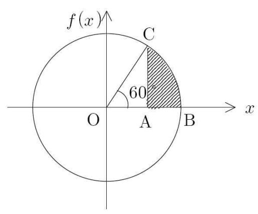
이므로 무게의 평균이 $576g$이상 $636g$이하일 확률은

$P(576\leqq X\leqq636)$
$=p(m-\sigma\leqq X\leqq m+1.5\sigma)$
$=P(m-\sigma\leqq X\leqq0)+P(0\leqq X\leqq m+1.5\sigma)$
$=P(0\leqq X\leqq m+\sigma)+P(0\leqq X\leqq m+1.5\sigma)$

확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$라 하면

$P(576\leqq x\leqq636)=P(0\leqq Z\leqq1)+P(0\leqq Z\leqq1.5)$
$=\ 0.3413+0.4332=0.7745$

9) ④



$\frac{1}{2}\pi r^2=1$에서 $r=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{1}{2}r$

x 좌표가 $\frac{1}{2}r$ 인 반원 위의 점을 A라 하면 동경 OA가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ 는 $\frac{1}{3}\pi$이다.

$\therefore \ \mathrm{P}\left(X \geq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \dfrac{1}{2}r^2\theta - \dfrac{1}{4}r^2\sin\theta = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$

10) ②

ㄱ. $A^2 - 1 - 2E = 0$이므로

$(A+E)^2 = A^2 + 2A + E = (A+2E) + 2A + E = 3(A+E)$ (참)

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하므로 양 변의 외쪽에 A^{-1}을 곱하면

$AB = AC \quad A^{-1}AB = A^{-1}AC \quad \therefore \ B = C$ (참)

ㄷ. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 케일리 헤밀턴의 정리에 의하여

$a + d = 1, \ ad - bc = -2$

따라서, $A - E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$의 판별식 D는

$D = (a-1)(d-1) - bc = (ad-bc) - (a+d) + 1 = -2$

이므로 역행렬이 존재한다.

그러므로 $(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(A-E)^{-1}(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A-E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (거짓)

11) ⑤

갑이 당첨될 확률 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{5}$

을이 당첨될 확률

- 갑이 당첨됐을 경우

  $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$

- 갑이 당첨되지 않았을 경우

  $\mathrm{P}(A^C \cap B) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$

$\therefore \ \mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{2}{5}$

ㄱ. 참

$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{2}{5}$

ㄴ. 거짓

$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{4}$

$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^C) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}^C \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}^C)} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) < \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^C)$

ㄷ. 참

$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12) ③

첫 번째와 두 번째 꺼낸 공의 색이 같은 경우와 다른 경우에 대하여 나누어 구하면

1)색이 다른 경우

${}_2C_1 \times \dfrac{{}_3C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_7C_2 \cdot {}_5C_2} \times \dfrac{{}_1C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_3C_2} = \dfrac{4}{35}$

2)색이 같은 경우: 노랑 공을 2개씩 두 번 꺼낸 경우이므로 남아 있는 공은 모두 빨강 공이 되어 서로 다른 색의공을 꺼낼 수 없다. 따라서, 구하는 값은 $\dfrac{4}{35}$이다.

13) ③

행렬 A의 역행렬 B는 $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이므로

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2^2} - 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2^{2-1}} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3^3} - 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{pmatrix}$

$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2^n} - 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \qquad \therefore a_n = \dfrac{1}{2^n} - 1$

14) ④

모든 양의 실수 x에 대하여 $\dfrac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \dfrac{x}{2}$가 성립한다.

자연수 $k, \ n \, (k \leq n)$에 대하여 $x = \dfrac{k}{n^2}$ 를 위 등식에 대입하여 정리하면

$\dfrac{k}{2n^2 + k} < \sqrt{1 + \dfrac{k}{n^2}} - 1 < \dfrac{k}{2n^2}$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2 + k} < S_n < \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k$

이다. 이 때,

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + n}{4n^2} = \frac{1}{4}$

이고

$\displaystyle\lim_{n \to \infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2 + k}\right\}$

$\displaystyle = \lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^2(2n^2 + k)} \ \leq \lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{4n^4}$

$\displaystyle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{4n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 0$

이므로

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{4}$이다.

15) ②

확률변수 X가 정규분포 $N(5.3^2)$을 따르므로

$m = 5, \ \sigma = 3$

$P(\mid X - 5 \mid \ \leq 3) = P(-3 \leq X - 5 \leq 3)$

$= P(2 \leq X \leq 8) = P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$

$= 2P(0 \leq X \leq m + \sigma) = 0.6826$

$\therefore P(0 \leq X \leq m + \sigma) = 0.3413$

따라서,

$p(y \geq 17) = P(2X + 1 \geq 17)$

$= P(X \geq 8) = P(X \geq m + \sigma) = \dfrac{1}{2} - P(0 \leq X \leq m + \sigma)$

$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

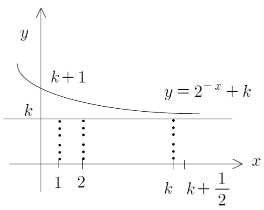
16) ⑤

그림과 같이 $x = k$일 때 주어진 부등식의 영역 내에 있는 격자점의 수

$N(k)$는

$N(k)=\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{1}{2^n}+k\right]=\sum_{n=1}^{k}k=k^2$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10}N(k)=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 21=385$



17) ③

정 n각형 (단, $n\geqq 3$)의 꼭지점에 대응하는 수 중에서 가장 큰 수를 a_n이라고 하면 $a_3=3,\ a_4=5,\ a_5=8,\ \cdots$

수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_{n-2}$라 하면, $\{b_n\}$은 계차가 공차가 1인 등차수열이다.

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1})(k+1)=3+\frac{1}{2}n)(n-1)+(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+n+4)$

따라서, 정 40각형의 가장 큰 수 a_{40}은

$a_{40}=b_n=\frac{1}{2}(38^2+38+4)=743$

18) ③

$k=1$일 때,

$f(1)=f(f(4))=f(2)=f(f(5))=f(3)=f(f(6))=f(4)=2$

같은 방법으로 계산하면

$f(2)=f(3)=2$ 따라서, 구하는 값은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}f(k)&=3\times 2+\sum_{k=4}^{20}f(k)=6+\sum_{k=1}^{20}(k-2)-\sum_{k=1}^{20}(k-2)\\&=6+\left(\frac{1}{2}\times 20\times 21-2\times 20\right)-\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4-2\times 3\right)\\&=6+170=176\end{aligned}$$

19) ②

각 행에 있는 항의 수는 $1,2,4,8,\cdots$ 이므로 n행에 있는 항의 수는 2^{n-1}개다.

또한, $n\geqq 2$인 경우 n행에서 $2^{n-2}+1$ 항의 수열은 $1,3,5,7,\cdots$ 이므로 일반항 a_n은 $a_n=2n-3$ (단, $n\geqq 2$)

따라서, 10행에서 2^8+2번째 항은 9행에서 2^7+1번째 항

즉, a_9의 역함수이므로 $a_9=2\times 9-3=15$

$\therefore \frac{1}{15}$

20) ⑤

밑 조건에 의하여 a,b,c는 1이 아닌 양수이고 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac\cdots(1)$

ㄱ. a,b,c가 양수이므로 산술 ・기하평균에 의하여

$\frac{a+c}{2}\geqq\sqrt{ac}=\sqrt{b^2}=b$

따라서, $a+c$의 최솟값은 $2b$이다 (참)

ㄴ. $\frac{1}{f(5)}=\log_5 a,\ \frac{1}{5}=\log_5 b,\ \frac{1}{h(5)}=\log_5 c$이므로 식 (1)의 양 변에 밑이 5인 로그를 취하면 $2\log_5 b=\log_5 a+\log_5 c$

$\therefore \frac{2}{g(5)}=\frac{1}{f(5)}+\frac{1}{f(5)}$ 따라서 $\frac{1}{f(5)}=\frac{1}{f(5)}+\frac{1}{h(5)}$는 등차수열을 이룬다. (참)

ㄷ. $x_1=a^{5,}\ x_2=b^{5,}\ x_3=c^5$이므로 식 (1)에 대입하면

$\left[x_2^{\frac{1}{5}^2}\right]=\left[x_1^{\frac{1}{5}}\right]\cdot\left[x_3^{\frac{1}{5}}\right]$

$\therefore x_2^2=x_1\cdot x_3$

따라서, $x_1,\ x_2,\ x_3$은 등비수열을 이룬다. (참)

21) ④

P_n을 $(x_n,\ y_n)$이라고 하면 Q_n은 BP_n의 중점이므로

$Q_n=\left(\frac{x_n+1}{2},\frac{y_n}{2}\right)$ 또한, P_{n+1}은 선분 AQ_n의 중점

이므로 $P_{n+1}=\left(\frac{x_n+1}{4},\frac{y_n+2}{4}\right)$이다.

따라서, $x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{4},\ y_{n+1}=\frac{1}{4}y_n+\frac{1}{2}\ \ x_n,\ y_n$은

모두 계차수열이 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로 두 수열의

일반항을 구하면

$x_n=\left(x_1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}\cdots(1)$

$y_n=\left(y_1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\cdots(2)$

$n\to\infty$일 때, 식 (1)과(2)의 극한값은

$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{3},\ \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{2}{3}$

따라서, 점 P_n은 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$에 가까워진다.

22) ⑤

집합 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$이므로 두 수의 곱의 크기에 따라 나누어 고려하면

1) 두 수의 곱이 6인 경우

처음과 끝이 오는 두 수가 1,6 또는 2,3이고 나머지 두 수가 가운데 오는 경우의 수는 ${}_2C_1\times 2!\times 2!=8$ (가지)

2) 두 수의 곱이 12인 경우

두 가지 즉, 1,12와 2,6, 3,4 세 가지이다. 따라서 가능한 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_2C_1\times 2!\times 2!=48$ (가지)

3) 두 수의 곱이 24인 경우

두 가지 즉, 2,12와 4,6일 때 가능하다, 따라서, 가능한 경우의 수는 1)의 경우와 같다. 따라서, 가능한 경우의

수는 $8+24+8=40$ (가지)

23) ③

지표면에서 원소의 밀도를 a라 하면

밀도가 $\frac{1}{2}$배인 지점 x_1에서 다음 관계가 성립한다.

$\log\frac{1}{2}a=\log a-kx_1$

$\therefore x_1=\frac{\log 2}{k}$

마찬가지로 원소의 밀도가 $\frac{1}{1000}$배인 지점 x_2에서 관계식은

$\log\frac{1}{1000}a=\log a-kx_2$

$\therefore x_2 = \frac{3}{k}$

따라서 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{3}{k}}{\frac{\log 2}{k}} = \frac{3}{\log 2} = \frac{3}{0.3} = 10$

24) ①

n번째 도형에서 작은 원 1개의 넓이는 $\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\pi = \frac{1}{4^n}\pi$

n번째 도형에서 작은 원의 개수는 $2^n - 1$

$S_n = \frac{2^n - 1}{4^n}\pi = \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)\pi$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)\pi = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\pi = \frac{2}{3}\pi$

25) 20

임의의 자연수 n에 대하여 $(n+1)^2 < n^2 + 3n < (n+2)^2$이 성립하므로 $\sqrt{n^2+3n}$의 정수부분은 $n+1$이다. 그러므로 소수 부분 a_n은

$a_n = \sqrt{n^2+3n} - (n+1)$

따라서, 구하는 값은

$\lim_{n\to\infty}\frac{10}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{\sqrt{n^2+3n}-(n+1)}$

$= \lim_{n\to\in}\frac{10\left\{\sqrt{n^2+3n}+(n+1)\right\}}{n^2+3n-(n^2+2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{10\left\{\sqrt{n^2+3n}+(n+1)\right\}}{n-1}$

$= 20$

26) 37

n을 4로 나누었을 때의 나머지에 따라 값이 달라지므로 $n = 4k+r$(단, $r = 0,1,2,3$)인 경우를 고려하면

$a_{4k+r} = (4k+r) - 4\left[\frac{4k+r}{4}\right] = r$

따라서, $\sum_{n=1}^{25} a_n = 6 \cdot (0+1+2+3) + 1 = 37$

27) 13

행렬 A에 대하여 케일리 헤밀턴 정리를 적용하면

$A^2 + A + E = 0,\ \therefore A^3 = E$ 또한 , $-A(A+E) = E$

이므로 행렬 A의 역행렬은 $-(A+E)$이다.

그리고, $A^{11} = (A^2)A^2 = A^2 = -(A+E)$이므로 주어진 관계식을 정리하면

$A^1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\13\end{pmatrix} - (A+E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\13\end{pmatrix}$양 변에 $-(A+E)$의 역행렬 A를 곱하면

$\therefore \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}18\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}57\\-44\end{pmatrix}$ 따라서,

$x + y = 57 - 44 = 13$

28) 33

4학년 생도 수를 a라 하면 여행 3개월 전에 희망지역을 변경한 생도 수는 표와 같다.

희망지역	유럽	미국	아시아
최초 희망자 수	$\frac{3}{10}a$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{5}a$
변경한 희망자 수	$0.15\times\frac{3}{10}a$	$0.05\times\frac{1}{2}a$	$0.35\times\frac{1}{5}a$

따라서, 여행지역을 변경한 생도 1명을 임의로 택할 때, 그 생도가 최초에 미국 지역을 택했을 확률은

$\frac{q}{p} = \frac{\frac{5}{100}\times\frac{1}{2}a}{\left(\frac{15}{100}\times\frac{3}{10}a\right)+\left(\frac{5}{100}\times\frac{1}{2}a\right)+\left(\frac{35}{100}\times\frac{1}{5}a\right)}$

$= \frac{25}{45+25+70} = \frac{5}{28}$

따라서, $p + q = 5 + 28 = 33$

29) 200

$v(0) = a = 1000$

$v\left(\frac{1}{100}\right) = 1000 \cdot b = 50$에서 $b = \frac{1}{20}$

$100\sqrt{5} = 1000 \cdot b^{100p}$에서 $b^{100p} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

$100p\log\frac{1}{20} = \log\sqrt{\frac{1}{20}}$ 에서 $100p = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{p} = 200$

30) 72

㈎ 일대일 대응이다.

㈏ 정의역의 1은 공역의 1과 대응되지 않는다.

㈐ 정의역의 1은 공역의 2와 대응되지 않는다.

㈏, ㈐에서 1은 3, 4, 5로만 갈 수 있고, 나머지는 순열로 계산하면 $3 \times 4! = 72$이다.