제 3 교시 수 학 영 역

'가'형

성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_6 - a_7 + a_8 = 2007$$

일 때, a_7 의 값은? [2점]

① $\frac{2007}{4}$ ② 669 ③ $\frac{2007}{2}$
④ 2007 ⑤ 4014

2. $\left\{ \frac{(\sqrt{10}+3)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{10}-3)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{10}+1)^{\frac{1}{2}}} \right\}^2$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

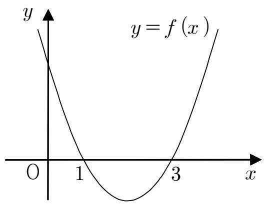
3. 함수 $f(x) = x^2 + k$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \{f(x)\}^2$ 이라 할 때, $g'(1) = 16$ 을 만족하는 상수 k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 어떤 실수 α 의 세제곱에 1 을 더한 값이 α 와 같을 때, 다음 중 α 가 존재하는 구간은? [3점]

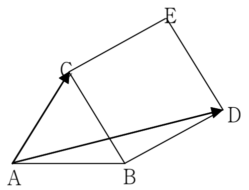
① $(-3,\ -2)$ ② $(-2,\ -1)$ ③ $(-1,\ 0)$
④ $(0,\ 1)$ ⑤ $(1,\ 2)$

5. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 분수부등식 $\dfrac{f(x-2)}{f(x)} \leq 0$ 을 만족하는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]



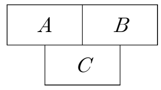
① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

6. 평면 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC와 정사각형 BDEC가 그림과 같이 변 BC를 공유하고 있다. 이 때, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ 의 값은? [3점]



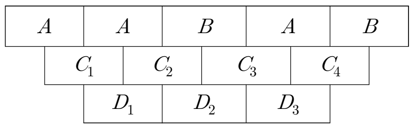
① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

7. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=C$ 일 때, 이를 [그림1]과 같이 나타내기로 하자.



[그림1]

이와 같은 방법으로 [그림2]의 이차정사각행렬 C_1, C_2, C_3, C_4와 D_1, D_2, D_3을 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.) [3점]



[그림2]

[보기]
ㄱ. $C_1=O$ 이면 $A=O$ 이다.
ㄴ. $C_2=C_3$ 이면 $D_2=D_3$ 이다.
ㄷ. $D_2=E$ 이면 $D_3=E$ 이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

8. [보기]의 함수 중 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 의 값이 존재하는 것을 모두 고른 것은? [3점]

[보기]

ㄱ. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

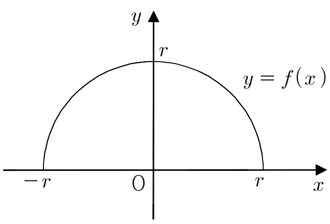
ㄴ. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \text{ 는 유리수}) \\ 0 & (x \text{ 는 무리수}) \end{cases}$

ㄷ. $f(x) = x - [x]$

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프가 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 인 반원의 호가 되도록 상수 r 의 값을 정할 때, 확률 $\mathrm{P}\left(X \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 의 값은? (단, $-r \leq x \leq r$ 이다.) [3점]



① $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ② $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ ③ $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$
④ $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ ⑤ $1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}$

10. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x^2) + f(x) + 12}{x-1} = 12$$

를 만족할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$ 에서의 접선의 y 절편은? [3점]

① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

11. 5개의 제비 중에서 당첨제비가 2개 있다. 갑이 먼저 한 개의 제비를 뽑은 다음 을이 한 개의 제비를 뽑을 때, 갑이 당첨제비를 뽑을 사건을 A, 을이 당첨제비를 뽑을 사건을 B라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 한 번 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.) [3점]

<보기>

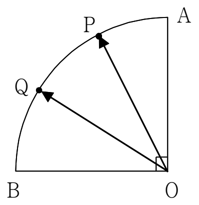
ㄱ. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$

ㄴ. $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B|A^c)$

ㄷ. $\mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(A|B)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

12. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



[보기]
ㄱ. $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$ 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.
ㄴ. $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$ 이다.
ㄷ. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값은 1이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 의 역행렬을 B라 할 때, B^n 의 (2, 1) 성분을 a_n 이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [4점]

① $-11-\frac{1}{2^{10}}$ ② $-10-\frac{1}{2^{10}}$ ③ $-9-\frac{1}{2^{10}}$
④ $-10-\frac{1}{2^{11}}$ ⑤ $-9-\frac{1}{2^{11}}$

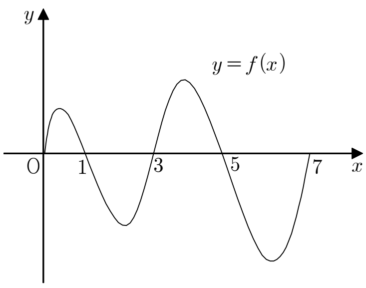
14. 수열 $\{S_n\}$ 에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ 일 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

> 모든 양의 실수 x에 대하여 $\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$ 가 성립한다.
>
> 자연수 k, n $(k\leq n)$에 대하여 $x=\frac{k}{n^2}$ 를 위 부등식에 대입하여 정리하면
>
> $$\frac{k}{2n^2+k}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{k}{2n^2}$$
>
> 이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}<S_n<\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$
>
> 이다. 이 때,
>
> $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\boxed{(가)}$$ 이고
>
> $$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\}$$
>
> $$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}=\boxed{(나)}$$
>
> 이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\boxed{(다)}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
②	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
③	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
④	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
⑤	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

15. 함수 $f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 하자. [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 7\}$ 이다.) [3점]



[보기]

ㄱ. $g(x)$는 $x=5$에서 극대값을 갖는다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖는다.

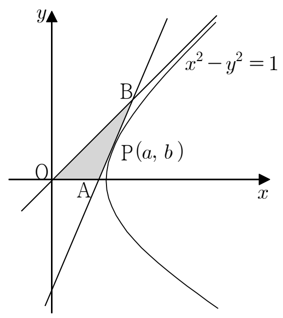
ㄷ. $g(5)=g(1)-\left|\int_1^3 f(t)dt\right|+\left|\int_3^5 f(t)dt\right|$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 좌표공간 위의 두 점 $A(0,0,1)$, $B(1,0,0)$ 이 있다. 점 P 가 점 B 에서 출발하여 xy평면 위의 직선 $x=1$ 을 따라 y축의 양의 방향으로 한없이 움직일 때, 선분 AP 와 평면 $y-z=0$ 이 만나는 점을 Q 라 하자. 점 Q 가 나타내는 자취의 길이는? [4점]

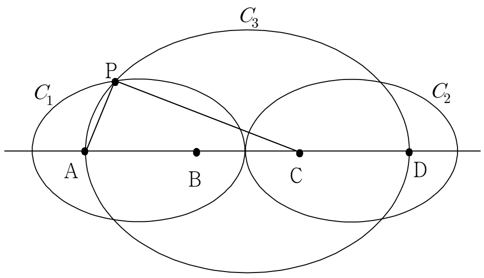
① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

17. 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 점 $P(a,b)$ $(a>1, b>0)$ 에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A, 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 만나는 점을 B 라 하자. 삼각형 OAB 의 넓이를 $S(a)$ 라 할 때, $\lim_{a\to\infty} S(a)$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



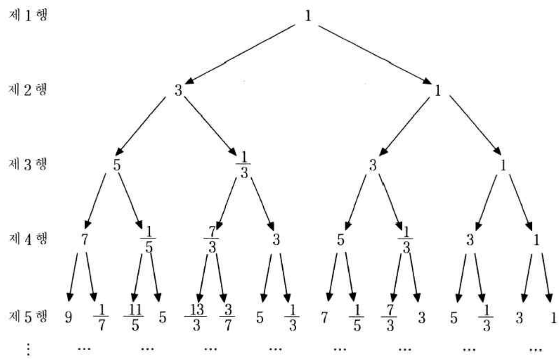
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

18. 그림과 같이 서로 합동인 두 타원 C_1, C_2가 외접하고 있다. 두 점 A, B는 타원 C_1의 초점, 두 점 C, D는 타원 C_2의 초점이고, 네 점 A, B, C, D는 모두 한 직선 위에 있다. 두 점 B, C를 초점, 선분 AD를 장축으로 하는 타원을 C_3이라 하고, 두 타원 C_1, C_3의 교점을 P라 하자.
$\overline{AB}=8$이고 $\overline{BC}=6$일 때, $\overline{CP}-\overline{AP}$의 값은? [4점]



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

19. 그림은 제1행에 1을 시작으로 바로 다음 행에 ↙ 방향으로는 직전의 수에 2를 더한 수를, ↘ 방향으로는 직전의 수의 역수를 나열하는 과정을 반복한 것이다. 예를 들면, 제3행의 첫 번째 수 5는 직전의 수 3에 2를 더한 수이고, 두 번째 수 $\frac{1}{3}$은 직전의 수 3의 역수이다.



제10행의 맨 왼쪽부터 (2^8+2)번째에 있는 수는? [4점]

① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ 13
④ 15 ⑤ 17

20. 세 로그함수

$$f(x)=\log_a x,\ \ g(x)=\log_b x,\ \ h(x)=\log_c x$$

의 밑 a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

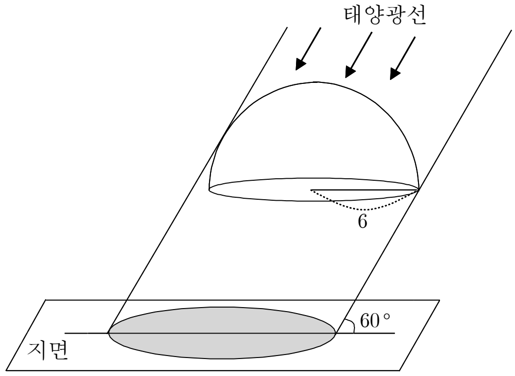
[보기]
ㄱ. $a+c$의 최솟값은 $2b$이다.
ㄴ. $\frac{1}{f(5)}$, $\frac{1}{g(5)}$, $\frac{1}{h(5)}$은 이 순서로 등차수열을 이룬다.
ㄷ. $f(x_1)=g(x_2)=h(x_3)=5$이면 x_1, x_2, x_3은 이순서로 등비수열을 이룬다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(1,0)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$가 있다. 선분 AC의 중점을 P_1이라 하고, 선분 BP_1의 중점을 Q_1이라 하자. 또, 선분 AQ_1의 중점을 P_2라 하고, 선분 BP_2의 중점을 Q_2라 하자. 이와 같이 모든 자연수 n에 대하여 선분 BP_n의 중점을 Q_n이라 하고, 선분 AQ_n의 중점을 P_{n+1}이라 하자. n이 한없이 커질 때, 점 P_n은 어떤 점에 한없이 가까워지는가? [4점]

① $\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ ② $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$

22. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 반구가 평평한 지면 위에 떠 있다. 반구의 밑면이 지면과 평행하고 태양광선이 지면과 $60°$의 각을 이룰 때, 지면에 나타나는 반구의 그림자의 넓이는? (단, 태양광선은 평행하게 비춘다.) [4점]



① $6(3+\sqrt{3})\pi$ ② $6(3+2\sqrt{3})\pi$ ③ $8(2+\sqrt{3})\pi$
④ $8(1+2\sqrt{3})\pi$ ⑤ $8(2+3\sqrt{3})\pi$

23. 공기는 산소, 수소, 질소 등과 같은 여러 가지 원소들로 이루어져 있다. 지표면에서부터 높이가 x(km)인 곳에서의 어떤 원소의 밀도를 $n(x)$라 하면 관계식

$$\log n(x)=\log n_0-kx$$

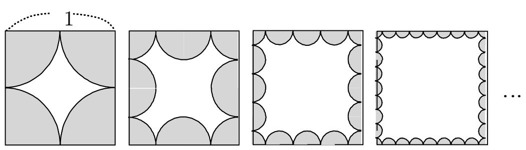
(단, n_0은 지표면에서의 밀도, k는 양의 상수)

가 성립한다고 한다. 이 원소의 밀도가 지표면에서의 밀도의 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{1000}$배가 되는 높이를 각각 x_1, x_2라 할 때, $\frac{x_2}{x_1}$의 값은? (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.) [4점]

① 5 ② 8 ③ 10
④ 15 ⑤ 20

24. 한 변의 길이가 1인 정사각형을 R라 하자. R의 각 변을 2등분 한 후 [그림1]과 같이 각 꼭지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 사분원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_1 이라 하자. R의 각 변을 4등분 한 후 [그림2]와 같이 각 꼭지점 및 각 변의 이등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_2 라 하자. R의 각 변을 8등분 한 후 [그림3]과 같이 각 꼭지점 및 각 변의 사등분점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}$ 인 사분원과 반원을 그릴 때, 어두운 부분의 넓이를 S_3 이라 하자.

이와 같은 방법으로 S_4, S_5, S_6, $\cdots$ 을 구할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



[그림1] [그림2] [그림3] [그림4]

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ $\frac{7}{9}\pi$

④ $\frac{7}{8}\pi$ ⑤ $\frac{8}{9}\pi$

주관식 문항 (25~30)

25. 이차함수 $f(x) = -12x(x-a)$에 대하여 $f'(0)+f'(2)=0$일 때, $\int_0^a f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = n - 4\left[\frac{n}{4}\right]$$

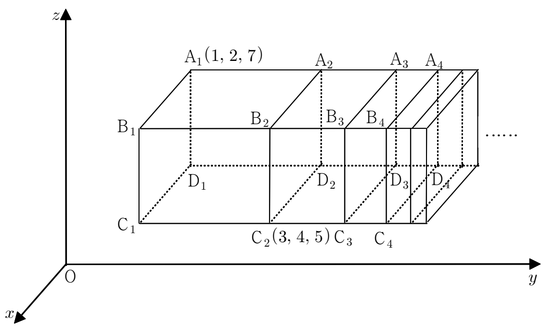
일 때, $\sum_{n=1}^{25} a_n$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

27. 좌표공간에 두 점 $\mathrm{A_1}(1,2,7)$, $\mathrm{C_2}(3,4,5)$가 있다. 그림과 같이 각 면이 xy 평면 또는 yz 평면 또는 zx 평면에 평행한 직육면체 $\mathrm{A_1B_1B_2A_2-D_1C_1C_2D_2}$를 만든다.

면 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 공유하고 $\overline{\mathrm{C_2C_3}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{C_1C_2}}$가 되도록 그림과 같이 직육면체 $\mathrm{A_2B_2B_3A_3-D_2C_2C_3D_3}$을 만든다.

면 $\mathrm{A_3B_3C_3D_3}$을 공유하고 $\overline{\mathrm{C_3C_4}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{C_2C_3}}$이 되도록 그림과 같이 직육면체 $\mathrm{A_3B_3B_4A_4-D_3C_3C_4D_4}$를 만든다.

이와 같은 과정을 계속하여 직육면체 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{D}_n\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$을 만들 때, n의 값이 한없이 커지면 점 D_n은 점 (a,b,c)에 한없이 가까워진다. abc의 값을 구하시오. [3점]



28. 삼차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

> (가) 곡선 $y=f(x)+1$은 $x=1$에서 x축에 접한다.
> (나) 곡선 $y=f(x)-1$은 $x=-1$에서 x축에 접한다.

이 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 수면에서 수면과 수직인 방향으로 물속을 향해 발사된 총알은 시간이 지날수록 물의 저항에 의해 속도가 줄어든다. 수면에서 1000 (m/초)의 속도로 어떤 총알이 발사된 후 t 초 $\left(0 \leq t < \frac{1}{50}\right)$ 가 지난 순간 총알의 속도를 $v(t)$ (m/초)라 하면 관계식

$v(t) = a \cdot b^{100t}$ (단, a 와 b 는 양의 상수)

이 성립한다고 하자. 발사 후 $\frac{1}{100}$ 초가 지난 순간 총알의 속도가 50(m/초) 이었다. 총알의 속도가 $100\sqrt{5}$ (m/초) 가 되는 것은 총알이 발사된 후 p초가 지난 순간이다. $\frac{1}{p}$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 X 로의 함수 중에서 다음 조건을 모두 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) f 의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) \neq 1$
(다) $f(2) \neq f(f(1))$

※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2007년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ④

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 a_7은 a_6, a_8의 등차중항이다.

$a_6+a_8=2a_7$

$\therefore a_6-a_7+a_8=2a_7-a_7=a_7$

$\therefore a_7=2007$

2) ②

(주어진 식)

$$=\frac{\left\{(\sqrt{10}+3)^{\frac{1}{2}}+(\sqrt{10}-3)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}{\left\{(\sqrt{10}+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{10}+3)+(\sqrt{10}-3)+2\{(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)\}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{10}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{10}+2\cdot 1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{10}+1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{10}+1)}{\sqrt{10}+1}$$

$=2$

3) ③

$g(x)=x^4+2kx^2+k^2$

$g'(x)=4x^3+4kx$

$g'(1)=4+4k=16$

$\therefore k=3$

4) ②

$\alpha^3+1=\alpha$에서 $\alpha^3-\alpha+1=0$

$f(\alpha)=\alpha^3-\alpha+1$이라 하면

$f(-2)=(-2)^3-(-2)+1=-5$

$f(-1)=(-1)^3-(-1)+1=1$

이므로 중간값 정리에 의하여 $f(\alpha)=0$을 만족하는 α가 구간 (−2, −1)에서 존재한다.

5) ①

$f(x)=a(x-1)(x-3)$

$f(x-2)=a(x-3)(x-5)$

$$\frac{f(x-2)}{f(x)}=\frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-3)}\leqq 0$$

$(x-1)(x-3)^2(x-5)\leqq 0,\ x\neq 1,\ x\neq 3$

$\therefore 1<x\leqq 5\ (x\neq 3)$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=5$

따라서 x의 값의 합은 $2+4+5=11$이다.

6) ⑤

점 A를 원점으로 하고 직선 AB를 x축으로 하는 좌표평면을 생각하면

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

7) ⑤

ㄱ. 거짓

[반례] $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이라 하면

$C_1=A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

따라서 $C_1=O$이지만 $A\neq O$이다.

ㄴ. 참

$C_2=AB,\ C_3=BA,\ C_4=AB$에서

$C_2=C_3$이면 $AB=BA$이므로

$D_2=C_2C_3=(AB)(BA)=(AB)(AB)$

$=ABAB$

$D_3=C_3C_4=(BA)(AB)=(AB)(AB)$

$=ABAB$

$\therefore D_2=D_3$

ㄷ. 참

$D_2=ABBA=E$이면

$(AB)^{-1}=BA,\ (BA)^{-1}=AB$이므로

$D_3=BAAB=(AB)^{-1}AB=E$

그러므로 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8) ③

ㄱ. $-1\leqq\sin\frac{1}{x}\leqq 1$이므로 $\lim_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=0$이다.

ㄴ. 유리수인 경우 (좌극한)=(우극한)=0

ㄷ. (좌극한)=0, (우극한)=1

그러므로 $\lim_{x\to 0}f(x)$의 값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

9) ④

$\frac{1}{2}\pi r^2=1$에서 $r=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{1}{2}r$$

x좌표가 $\frac{1}{2}r$인 반원 위의 점을 A라 하면 동경 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ는 $\frac{1}{3}\pi$이다.

$$\therefore \mathrm{P}\left(X\geqq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{4}r^2\sin\theta=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

10) ②

$f(1)+f(1)+12=0$

$\therefore f(1)=-6$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)+f(x)+12}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)+6}{x-1}+\frac{f(x)+6}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\{f(x^2)-f(1)\}(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\{f(x^2)-f(1)\}(x+1)}{x^2-1}+\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$=2f'(1)+f'(1)$

$=3f'(1)=12$

$\therefore f'(1)=4$

따라서 접선의 방정식이 $y=4(x-1)-6=4x-10$이므로 y절편은

-10이다.

11) ⑤

갑이 당첨될 확률 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

을이 당첨될 확률

- 갑이 당첨됐을 경우

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

- 갑이 당첨되지 않았을 경우

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$

ㄱ. 참

$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{2}{5}$

ㄴ. 거짓

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^C)=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}^C\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}^C)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})<\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^C)$

ㄷ. 참

$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12) ⑤

$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ 라 할 때

ㄱ. 참

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{1^2+1^2-2\cos(\pi-\theta)}=\sqrt{1^2+1^2+2\cos\theta}\geqq\sqrt{2}$

ㄴ. 참

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{1^2+1^2-2\cos\theta}\leqq\sqrt{2}$

ㄷ. 참

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\cos\theta\leqq1$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13) ③

$$B=A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$B^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2^2}\begin{pmatrix}2^2&0\\-3&1\end{pmatrix}$$

$$B^3=\frac{1}{2^2}\begin{pmatrix}2^2&0\\-3&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2^3}\begin{pmatrix}2^3&0\\-7&1\end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$B^n=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}2^n&0\\-2^n+1&1\end{pmatrix}$$

$$a_n=\frac{-2^n+1}{2^n}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=-\sum_{k=1}^{10}1+\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2^k}=-10+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=-10+1-\frac{1}{2^{10}}=-9-\frac{1}{2^{10}}$$

14) ④

모든 양의 실수 x에 대하여 $\frac{x}{2+x}<\sqrt{1+x}-1<\frac{x}{2}$가 성립한다.

자연수 k, $n\,(k\leqq n)$에 대하여 $x=\frac{k}{n^2}$ 를 위 등식에 대입하여 정리하면

$$\frac{k}{2n^2+k}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{k}{2n^2}$$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}<S_n<\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k$

이다. 이 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^2(2n^2+k)}\leqq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4n^4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=0$$

이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$이다.

15) ③

ㄱ. $f(x)$는 $g(x)$의 도함수이므로 (+)에서 (−)부호로 바뀌는 곳이 극대값이다. 따라서 $x=1$과 $x=5$에서 극대값을 갖는다. (참)

ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 극대값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $g(1)-\left|\int_1^3 f(t)dt\right|+\left|\int_3^5 f(t)dt\right|$

$$=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^3 f(t)dt+\int_3^5 f(t)dt=\int_0^5 f(t)dt=g(5)\ \text{(참)}$$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16) ④

$\mathrm{P}(1,p,\ 0)$이라 하면

직선 AP의 방정식은 $\frac{x}{1}=\frac{y}{p}=\frac{z-1}{-1}$, 평면의 방정식은 $y=z$이므로

직선의 방정식과 평면의 방정식을 연립하여 풀면 $x=\frac{1}{p+1}$, $y=\frac{p}{p+1}$, $z=\frac{p}{p+1}$

P가 처음 B에 있을 때

$\mathrm{Q}=\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$

y축의 양의 방향으로 한없이 움직이므로 $p\to\infty$이다.

$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{p+1},\ \frac{p}{p+1},\ \frac{p}{p+1}\right)$ 가 (0, 1, 1)로 수렴하므로

Q의 자취의 길이는 $\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$이다.

17) ①

쌍곡선의 접선의 방정식이 $ax-by=1$이므로 $y=0$일 때, $x=\frac{1}{a}$

$\therefore \overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{\mathrm{a}}$

또한 점근선의 방정식이 $y=x$이므로

$ax-bx=1$에서 $(a-b)x=1$

$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{1}{\mathrm{a-b}},\ \frac{1}{a-b}\right)$

$\mathrm{P(a,\ b)}$가 쌍곡선 위의 점이므로

$a^2-b^2=1$에서 $b^2=a^2-1$

$\therefore b=\sqrt{a^2-1}\ (\because b>0)$

$S(a)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{a-b}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}=\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2a}$

$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2a}=\lim_{a\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

18) ②

$\overline{\mathrm{CP}}-\overline{\mathrm{AP}}=(\overline{\mathrm{CP}}+\overline{\mathrm{PB}})-(\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}})$

$=(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CD}})-(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})$

$=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}$

$=8$

19) ②

제 n행의 수의 개수는 $2^{(n-1)}$개이므로 10행의 수의 개수는 2^9개이다.

10행의 맨 왼쪽의 수는 $2\cdot 10-1=19$이므로 (2^8+1)번째 수는 17이고

그 위의 수는 $17-2=15$이므로 (2^8+2)번째 수는 $\frac{1}{15}$이다.

20) ⑤

$a=a,\ b=ar,\ c=ar^2$

ㄱ. 참

$a+c=a+ar^2\geqq 2\sqrt{a^2r^2}=2ar=2b$

ㄴ. 참

$\frac{1}{f(5)}=\log 5a,\ \frac{1}{g(5)}=\log 5ar,$

$\frac{1}{h(5)}=\log 5ar^2$

$\log 5ar-\log 5a=\log 5r$

$\log 5ar^2-\log 5ar=\log 5r$

따라서 공차가 $\log 5r$인 등차수열이다.

ㄷ. 참

$f(x_1)=g(x_2)=h(x_3)=5$

$x_1=a^5,\ x_2=a^5r^5,\ x_3=a^5r^{10}$

따라서 첫째항은 a^5이고 공비가 r^5인 등비수열이다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21) ④

n이 한없이 커지게 되면 $\mathrm{P_n}$과 $\mathrm{Q_n}$은 선분 AB 위에 놓이게 된다.

$\mathrm{P_n}(\mathrm{t},\ 1-t)$이라 하면 $\mathrm{Q_n}$은 $\overline{\mathrm{BP_n}}$의 중점이므로

$\mathrm{Q_n}\left(\frac{\mathrm{t}+1}{2},\ \frac{1-t}{2}\right)$

$\mathrm{P_{n+1}}\left(\frac{\mathrm{t}+1}{4},\ \frac{3-t}{4}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P_{n+1}}$이므로 $t=\frac{t+1}{4}$

$t+1=4t$

$\therefore\ t=\frac{1}{3},\ 1-t=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P_n}\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

22) ②

(i) 태양광선과 밑면이 접하는 쪽의 반원의 정사영의 넓이는

$6^2\pi\times\frac{1}{2}=18\pi$

(ii) 태양광선과 구면이 접하는 쪽의 나머지 부분의 정사영의 넓이는

$6^2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos 30°}=12\sqrt{3}\pi$

(i), (ii)에서 $18\pi+12\sqrt{3}\pi=6(3+2\sqrt{3})\pi$

23) ③

지표면에서 원소의 밀도를 a라 하면

밀도가 $\frac{1}{2}$배인 지점 x_1에서 다음 관계가 성립한다.

$\log\frac{1}{2}a=\log a-kx_1$

$\therefore x_1=\frac{\log 2}{k}$

마찬가지로 원소의 밀도가 $\frac{1}{1000}$배인 지점 x_2에서 관계식은

$\log\frac{1}{1000}a=\log a-kx_2$

$\therefore x_2=\frac{3}{k}$

따라서 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{\frac{3}{k}}{\frac{\log 2}{k}}=\frac{3}{\log 2}=\frac{3}{0.3}=10$

24) ①

n번째 도형에서 작은 원 1개의 넓이는 $\left(\frac{1}{2^n}\right)^2\pi=\frac{1}{4^n}\pi$

n번째 도형에서 작은 원의 개수는 2^n-1

$S_n=\frac{2^n-1}{4^n}\pi=\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)\pi$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)\pi=\left(1-\frac{1}{3}\right)\pi=\frac{2}{3}\pi$

25) 16

$f'(x)=-12(x-a)-12x=-24x+12a$

$f'(0)+f'(2)=12a-48+12a=24a-48=0$

$\therefore\ a=2$

$\int_0^a f(x)dx=\int_0^2\{-12x(x-2)\}dx$

$=\int_0^2(-12x^2+24x)dx=[-4x^3+12x^2]_0^2=-32+48=16$

26) 37

(i) $1 \leqq n < 4$일 때 $\left[\frac{n}{4}\right]=0$이므로 $\sum_{n=1}^{3} n = 6$

(ii) $4 \leqq n < 8$일 때 $\left[\frac{n}{4}\right]=1$이므로

$\sum_{n=4}^{7}(n-4)=\sum_{n=1}^{4}(n-1)=6$

(iii) $8 \leqq n < 12$일 때 $\left[\frac{n}{4}\right]=2$이므로

$\sum_{n=8}^{11}(n-8)=\sum_{n=1}^{4}(n-1)=6$

이런 식으로 계속하게 되면

$12 \leqq n < 16$일 때, $16 \leqq n < 20$일 때, $20 \leqq n < 24$일 때도 모두 6이고,

$24 \leqq n \leqq 25$일 때 $0+1=1$이므로

$\sum_{n=1}^{25} a_n = 6 \times 6 + 1 = 37$

27) 30

$\mathrm{D}_1 = (1,\ 2,\ 5)$

$\mathrm{D}_2 = (1,\ 4,\ 5)$

$\mathrm{D}_\mathrm{n} = \left(1,\ 4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^\mathrm{n}},\ 5\right)$

$\lim_{n\to\infty}\mathrm{D}_\mathrm{n} = \left(1,\ 5+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}},\ 5\right) = (1,\ 6,\ 5)$

$\therefore abc = 30$

28) 26

㈎ $f(1)=-1,\ f'(1)=0$

㈏ $f(-1)=1,\ f'(-1)=0$

$f'(x)=a(x-1)(x+1)$이므로

$f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+C$

$f(1)=-\frac{2}{3}a+C=-1$ ………………………… ㉠

$f(-1)=\frac{2}{3}a+C=1$ ……………………………… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$C=0,\ a=\frac{3}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x$

$\therefore f(4)=32-6=26$

29) 200

$v(0)=a=1000$

$v\left(\frac{1}{100}\right)=1000\cdot b=50$에서 $b=\frac{1}{20}$

$100\sqrt{5}=1000\cdot b^{100p}$에서 $b^{100p}=\frac{\sqrt{5}}{10}$

$100p\log\frac{1}{20}=\log\sqrt{\frac{1}{20}}$ 에서 $100p=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{p}=200$

30) 72

㈎ 일대일 대응이다.

㈏ 정의역의 1은 공역의 1과 대응되지 않는다.

㈐ 정의역의 1은 공역의 2와 대응되지 않는다.

㈏, ㈐에서 1은 3, 4, 5로만 갈 수 있고, 나머지는 순열로 계산하면

$3 \times 4! = 72$이다.