2006학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형 | 성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $n=2006$ 이고 $a=\dfrac{3}{4}$ 일 때, 세 수 $A,\ B,\ C$를 각각

$$A=\sqrt[n]{a^{n-1}},\ B=\sqrt[n]{a^{n+1}},\ C=\sqrt[n+1]{a^{n}}$$

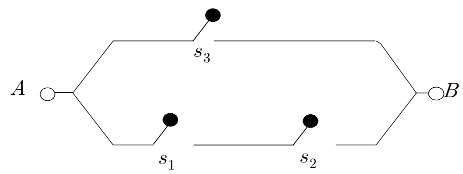
이라 하자. 다음 중 세 수 $A,\ B,\ C$의 대소관계로 옳은 것은? [2점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$ ④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

2. 첫째항이 -312 이고 공차가 8 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$ 로 정의할 때, 극한 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}b_k$ 의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. 그림과 같이 개폐식 스위치 $s_1,\ s_2,\ s_3$ 를 갖춘 전기체계가 있다. 이 전기체계의 각 스위치들은 모두 서로 독립적으로 작동되고, 전류는 스위치 s_1 과 s_2 가 모두 닫혀있거나 s_3 가 닫혀있을 때, A 에서 B 로 흐르도록 되어있다. 이 때, 각각의 스위치 s_k ($k=1,2,3$)가 닫혀있을 확률이 모두 $\dfrac{1}{3}$ 로 같다고 할 때, 전류가 A 에서 B 로 흐를 확률은? [3점]



① $\dfrac{1}{27}$ ② $\dfrac{1}{9}$ ③ $\dfrac{5}{27}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{27}$

4. 무한수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\lim_{n\to\infty}S_n=2$ 이라 할 때, 극한 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+S_n}{{S_n}^3}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$

5. 헌혈을 하려는 학생 10명에게 자신의 혈액형을 A형, B형, AB형, O형으로만 기록하도록 하였더니 다음과 같은 결과가 나왔다.

> (가) A 형인 학생 수와 B 형인 학생 수의 합은 AB 형인 학생수와 O 형인 학생 수의 합과 같다.
> (나) A 형인 학생 수와 AB 형인 학생 수의 합은 B 형인 학생 수와 O 형인 학생 수의 합과 같다.
> (다) A 형인 학생 수는 4 명이다

이 때, 이 10 명의 학생이 모두 헌혈을 하였고, 각 학생의 혈액을 혈액형만 표시된 혈액팩에 넣었다. 이 10개의 혈액팩 모두를 일렬로 나열하는 방법은 모두 몇 가지인가? (단, 각 혈액팩은 A 형, B 형, AB 형, O 형으로만 혈액형이 기록되어 있고, 기록된 혈액형으로만 구별할 수 있다.) [3점]

① 2100 가지 ② 3900 가지 ③ 4200 가지
④ 6300 가지 ⑤ 12600 가지

6. 다음은 극한 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 의 값의 범위를 구하는 풀이 과정의 일부이다.

> [풀이]
> 이항정리에 의해
>
> $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\boxed{(가)}\left(\frac{1}{n}\right)^k$
>
> $= \boxed{(나)} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$
>
> $= \boxed{(나)} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}$
>
> $< \boxed{(나)} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$
>
> $< \boxed{(나)} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$
>
> 그런데, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} > 0$ 이므로
>
> $\boxed{(나)} < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	${}_{n}C_{k}$	1	2
②	${}_{n-1}C_{k}$	1	2
③	${}_{n}C_{k}$	1	3
④	${}_{n-1}C_{k}$	2	3
⑤	${}_{n}C_{k}$	2	3

7. 이차정사각행렬 A 에 대하여

$$A^2-5A+6E=O,\quad A\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}$$

이 성립할 때, $A\begin{pmatrix}-22\\-2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}20\\-30\end{pmatrix}$는? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

① $\begin{pmatrix}-24\\-36\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}24\\36\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}24\\-36\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}-36\\24\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}36\\-24\end{pmatrix}$

8. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 이차함수 $ax^2+y=4$의 그래프와 직선 $by=7$ 이 $(1, 3)$에서 만난다. 이 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{-1}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은? (단, A^{-1}은 A 의 역행렬이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 7 ⑤ 10

9. 빨간 공 4 개와 파란 공 2 개가 들어 있는 상자 A 가 있다. 상자 A 에서 동시에 공 3 개를 꺼내어 비어 있는 상자 B 에 넣은 다음 다시 상자 B 에서 공 1 개를 꺼냈다. 상자 B 에서 꺼낸 공이 파란 공이었을 때 상자 A 에서 상자 B 로 옮겨진 공 3 개가 빨간 공 2 개와 파란 공 1 개일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

10. 수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ 의 값이 65 의 배수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

11. 어떤 혈압강하제를 투여하면 혈액 속에 남아 있는 그 약의 양은 매 4 시간이 지날 때마다 4 시간 전의 양의 반으로 줄어든다고 한다. 그 약은 일단 투여를 시작하면 매 12 시간마다 계속하여 일정한 양을 투여하도록 되어있고, 혈액 속에 남아 있는 그 약의 양은 560 ㎎ 이하를 유지해야 한다. 이 약을 규칙적으로 장기간 투여해야 하는 환자에게 매회 투여 가능한 약의 최대량은 몇 ㎎인가? [3점]

① 300 ㎎ ② 375 ㎎ ③ 400 ㎎
④ 490 ㎎ ⑤ 520 ㎎

12. 자연수 n 에 대하여 $f(n)=\left[\dfrac{n}{4}\right]$ 이라 하고, 수열 $\{a_n\}$ 을

$a_1=a_2=a_3=0$, $a_n=\sum_{k=1}^{f(n)} k$ (단, $n=4,5,6,\ \ldots$)

으로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{28} a_n$ 의 값은? (단, 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

① 204 ② 212 ③ 220 ④ 224 ⑤ 252

13. 어느 대학에서는 공개선발시험으로 40 명의 학생을 선발하여 해외 연수를 보내려고 한다. 이 시험에 응시한 학생 1600 명의 시험성적은 평균 65 점, 표준편차 10 점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 표준 정규분포표를 이용하여 선발된 학생의 최저점수를 구하면? [3점]

① 80.3 점 ② 84.6 점 ③ 86.7 점
④ 87.4 점 ⑤ 90.8 점

<표준정규분포표>

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.53	0.4370
1.96	0.4750
2.17	0.4850
2.24	0.4875
2.58	0.4951

14. 좌표평면 위의 두 점 $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$ 에 대하여 선분 $\overline{P_1P_2}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점을 P_3 , 선분 $\overline{rP_2P_3}$ 을 2 : 1 로 내분하는 점을 P_4 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 선분 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 을 2 : 1 로 내분하는 점을 P_{n+2} (단, $n=1,2,3,\cdots$)라 하자. 이 때, 점P_n 의 좌표를 $P_n(x_n, y_n)$ 이라 하면 $x_{2005}-y_{2005}$ 의 값은? [4점]

① $6+3^{-2003}$ ② $6-3^{-2003}$ ③ $5+3^{-2003}$
④ $5-3^{-2003}$ ⑤ $5-3^{-2005}$

15. 사건 A가 1회의 시행에서 일어날 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 평균이 80이고 분산이 64라 할 때,

$\sum_{r=0}^{n} 5^r \mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{r})$ 의 값은? (단, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{r})$은 $X=r$일 때의 확률이다.) [3점]

① $\left(\frac{9}{5}\right)^{400}$ ② $\left(\frac{7}{5}\right)^{450}$ ③ $\left(\frac{9}{5}\right)^{399}$
④ 2^{399} ⑤ 2^{400}

16. 두 부등식 $\begin{cases} \log_y(1-x^2) \leq 2 \\ 2^y \leq 2\cdot 4^x \end{cases}$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{4}(\pi+1)$ ② $\frac{1}{4}(\pi+3)$ ③ $\frac{1}{4}(\pi+5)$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

17. 실수 a, b와 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B를 $B=PAP^{-1}$라 하자. [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.) [4점]

ㄱ. $B=O$이면 $A=O$이다.
ㄴ. $A^3=E$이면 $B^{100}=B$ 이다.
ㄷ. $AB=E$를 만족하는 행렬 A가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여 두 등식

$$\begin{cases} a^2 b^3 = 64 \\ 3(\log_a c)^2 - 2(\log_b c)^2 = -(\log_a c)(\log_b c) \end{cases}$$

이 성립하도록 하는 두 수 a와 b에 대하여 $\log_2 ab$의 값은? [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

19. 다음은 각 항이 정수이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$ 이 어떤 정수의 제곱임을 증명하는 과정이다.

> [증명]
> 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로
> $a_1 = a - 3k,\ a_2 = a - k,\ a_3 = a + k,\ a_4 = a + 3k$
> 이 성립하도록
> $a =$ (가), $k =$ (나)
> 를 택하면
> $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4 = ($ (다) $)^2$
> 이 성립한다.
> 이 때, (다) $= a_2{}^2 + a_2 d - d^2$ 이고,
> a_2와 d는 정수이므로 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$는 정수의 제곱이 된다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{a_2 + a_3}{2}$	$\frac{d}{2}$	$a^2 - 5k^2$
②	$\frac{a_2 + a_3}{2}$	$\frac{d}{2}$	$a^2 - 3k^2$
③	$\frac{a_2 + a_3}{2}$	$\frac{d}{4}$	$a^2 - 5k^2$
④	$\frac{a_1 + a_4}{2}$	$\frac{d}{2}$	$a^2 - 3k^2$
⑤	$\frac{a_1 + a_4}{2}$	$\frac{d}{4}$	$a^2 - 3k^2$

20. 모든 자연수 n 에 대하여 각 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$ 이

$$a_{n+1}{}^2 + 4a^2 + (a_1 - 2)^2 = 4a_{n+1}\, a_n$$
$$b_n = \log_{\sqrt{2}}\, a_n$$

와 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k = 72$ 가 성립하도록 하는 자연수 m 의 값은? [3점]

① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

21. $a_n = 3n^2 - 3n\ (n = 1, 2, \ldots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, S_n 이 처음으로 16 자리의 정수가 되도록 하는 n 을 10 으로 나눈 나머지는? [4점]

① 0　② 1　③ 2　④ 8　⑤ 9

22. 양궁대회에 참가한 어떤 선수가 활을 쏘아 과녁의 10점 부분을 명중시킨 다음 다시 활을 쏘아 10점 부분을 명중시킬 확률이 $\frac{8}{9}$ 이고, 10점 부분을 명중시키지 못한 다음 다시 10점 부분을 명중시키지 못할 확률이 $\frac{1}{5}$ 이다. 이 선수가 반복하여 계속 활을 쏜다고 할 때, n 번째에 10점 부분을 명중시킬 확률을 p_n 이라 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty} p_n$ 의 값은? [4점]

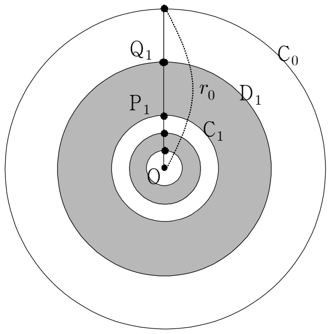
① $\frac{14}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{25}{41}$ ④ $\frac{32}{41}$ ⑤ $\frac{36}{41}$

23. 두 지수함수 $f(x) = 9^x + a$, $g(x) = b \cdot 3^x + 2$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x 좌표가 $x = \log_3 2$, $x = \log_3 k$ (단, $k > 2$)일 때, [보기]에서 a, b 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

ㄱ. $b^2 = 4a - 8$	ㄴ. $a = 2b - 2$	ㄷ. $a > 6$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 다음 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 r_0 인 원 C_0 가 있다. 원 C_0 의 반지름을 3등분하여 원점 O 에서부터 가까운 점을 차례로 P_1, Q_1 이라 하고, 중심이 O 이고 반지름을 $\overline{OP_1}$, $\overline{OQ_1}$ 으로 하는 원을 각각 C_1 , D_1 이라 하자. 같은 방법으로 원 C_1 의 반지름 $\overline{OP_1}$ 을 3등분하여 원점 O 에서부터 가까운 점을 차례로 P_2, Q_2 이라 하고, 중심이 O 이고 반지름을 $\overline{OP_2}$, $\overline{OQ_2}$ 으로 하는 원을 각각 C_2 ,D_2 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 원 C_n, D_n (단, $n = 1, 2, 3, \ldots$)을 만든다. 이 때, 원 D_n 의 넓이에서 원 C_n 의 넓이를 뺀 값을 S_n 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



① $\frac{3}{4}\pi r_0^2$ ② $\frac{3}{8}\pi r_0^2$ ③ $\frac{5}{8}\pi r_0^2$
④ $\frac{9}{16}\pi r_0^2$ ⑤ $\frac{9}{64}\pi r_0^2$

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & a\end{pmatrix}$에 대하여 $A^2X=X$를 만족하는 행렬 X가 2개 이상 존재하도록 실수a의 값을 정할 때, $A\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ 24\end{pmatrix}$ 를 만족하는 상수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오.
(단, X는 2 × 1 행렬이다.) [3점]

26. 연립방정식

$$\begin{cases}\dfrac{2}{\log_x 4}+\dfrac{1}{\log_y 2}=3\\ \log_2 3x+\log_{\sqrt{2}} y=\log_2 48\end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.
[3점]

27. $\dfrac{2^{68}\times 5^{68}}{2^7\times 5^7+2^4\times 5^4}=\alpha\times 10^n$ (단, $1\leqq\alpha<10$)라 할 때, 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

28. 다음은 오존층의 두께를 조사하는 방법 중 하나를 서술한 것이다.

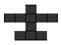
태양광선이 대기권에 도달하기 전의 특정한 파장의 세기를 I_0 , 그 파장이 두께가 x ㎝ 인 오존층을 통과한 후의 파장의 세기를 I 라 하면 $\log_a I_0 - \log_a I = kx$ 이 성립한다. 여기서, a 는 $2 < a < 3$ 인 상수이고, k 는 그 파장에 대한 오존의 흡수상수이다.

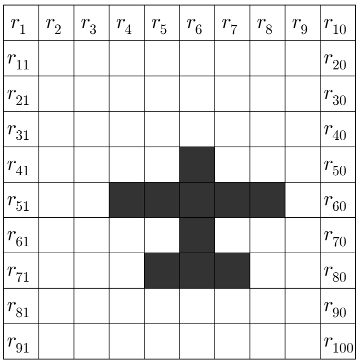
위와 같은 공식을 이용하면, 진폭이 3×10^{-8} ㎝ 인 특정파장이 두께가 0.2 ㎝인 오존층을 통과하였을 때, $I = \frac{5}{6} I_0$ 를 만족한다고 한다. 이 때, $1000 \log_{10} a^k$ 의 값을 구하시오.
(단, $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ 로 계산한다.) [4점]

29. 실수 x 에 대한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = {}_6C_0 + {}_6C_1 x^2 + {}_6C_2 x^4 + {}_6C_3 x^6 + {}_6C_4 x^8 + {}_6C_5 x^{10} + {}_6C_6 x^{12}$$

와 같이 정의될 때, $f(\tan\theta) = 2^{12}$ 을 만족하는 θ 에 대하여 $\frac{36\theta}{\pi}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

30. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{r_n\}$의 제n 항 r_n은 a_n을 a_5로 나눈 나머지로 정의하자. 예를 들어 r_1은 a_1을 a_5로 나눈 나머지이고, r_2는 a_2를 a_5로 나눈 나머지이다. 이 때, 다음 그림과 같이 100개의 작은 사각형으로 이루어진 바둑판 모양의 사각형 각 칸에 r_1부터 r_{100}까지의 수를 차례로 채워나갈 때, 글자  모양의 어두운 부분에 채워지는 수들의 합을 구하시오. [4점]



※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2006년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ④

$0 < a < 1$ 에서 $f(x) = a^x$는 감소 함수이고

$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n}$ 이므로 $A > C > B$

2) ④

$b_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = 8n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}b_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}8k$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} = 1$

3) ⑤

s_3가 연결될 확률 : $\frac{1}{3}$

s_1과 s_2가 연결될 확률 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

[A에서 B로 전류가 흐를 확률]

$=\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{9}) + (1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{9} = \frac{11}{27}$

4) ②

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n + S_n}{S_n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2S_n - S_{n-1}}{S_n^3} = \frac{1}{4}$

($\because \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}S_{n-1} = 2$)

5) ④

A형 학생수를 x, B형 학생수를 y, AB형 학생수를 z, O형 학생수를 w라고 하면

$x + y = z + w$ -----①

$x + z = y + w$ -----②

$x = 4$ -----③

$x + y + z + w = 10$ -----④

[① − ②] : $y - z = z - y \Leftrightarrow y - z = 0 \Leftrightarrow y = z$ ---①′

[③,①′→②] : $4 + y = y + w \Leftrightarrow w = 4$ -----②′

[③,①′→④] : $4 + 2y + w = 10 \Leftrightarrow 2y + w = 6$ -----④′

[②′ → ④′] : $y = 1 = z$

∴ A형은 4명, B형은 1명, AB형은 1명, O형은 4명이다.

∴ (혈액형에 따라서 나열하는 방법의 수)$=\frac{10!}{4!1!1!4!} = 6300$ (가지)

6) ⑤

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\, 1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1}{n}\right)^k = {}_nC_0\,(\frac{1}{n})^0 + {}_nC_1\,(\frac{1}{n})^1$

$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$

$= 2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$

$= 2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}$

$<2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$ ($\because 1 \leq i \leq n-1$ 일 때, $1-\frac{i}{n} < 1$)

$<2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$

그런데, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} > 0$ 이므로

$2 < 2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\times\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} < 2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$

$2 < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$

$2 < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$

7) ③

$A\begin{pmatrix}-22\\-2\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}20\\-30\end{pmatrix} = -2A\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix} + 10A\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$= -2A^2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + 10A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = (-2A^2 + 10A)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$= 12E\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\-36\end{pmatrix}$

$[\because -2A^2 + 10A = -2(A^2 - 5A) = -2(-6E)]$

8) ③

$ax^2 + y = 4$ 와 $by = 7$ 이 $(1, 3)$에서 만나므로

$a + 3 = 4,\ 3b = 7$

$a = 1, b = \frac{7}{3} \Rightarrow A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & \frac{7}{3}\end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{7}\\0 & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{7}\\0 & \frac{3}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

∴ (성분의 합)$= 1 + 3 = 4$

9) ⑤

상자 A에서 선택한 3개의 공 중에서 파란 공이 k개($0 \leq k \leq 2$)가 있는 사건을 C_k, 상자 B에서 파란 공을 선택하는 사건을 G라고 하면

$P(G) = P(C_1 \cap G) + P(C_2 \cap G)$

$= \frac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}\times\frac{1}{3} + \frac{{}_2C_2\times{}_4C_1}{{}_6C_3}\times\frac{2}{3} = \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$

$\therefore P(C_1|G) = \frac{P(C_1\cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$

10) ③

$\sum_{k=1}^{n}2^k = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2(2^n - 1) = 65k$ 이고

2와 65는 서로 소이므로 $2^n - 1 = 65k'$ 이 성립하면 된다.

$2^n = 65k' + 1 = (5\cdot 13)k' + 1$ (n, k 는 자연수)

[i] 수열 $a_n = 2^n$ 을 5로 나눈 나머지의 수열을 $a_n{}'$ 이라고 하면

$a_n{}'$: 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, …… 이므로

2^n 을 5로 나눈 나머지가 1이 되는 경우는 n이 4의 배수일 때이다.

[ii] $2^{4m} = (2^4)^m = (13+3)^m$ 을 13으로 나눈 나머지는 3^m을 13으로 나눈 나머지와 같다.

수열 $b_m = 3^m$ 을 13으로 나눈 나머지의 수열을 $b_m{}'$ 이라고 하면

$b_m{}'$: 3, 9, 1, 3, 9, 1, …… 이므로

2^{4m} 을 13으로 나눈 나머지가 1이 되는 경우는 m이 3의 배수일 때이다.

∴ [i], [ii]에서 2^n을 5, 13으로 나눈 나머지가 모두 1이 되는 경우는 n이 12의 배수가 될 때이다.

11) ④

매회 투여량을 $\beta\ (mg)$ 이라고 하고, n회 투여하였을 때 체내에 존재하는 혈압 강하제의 양을 $a_n\ (mg)$ 이라고 하면

$a_{n+1} = (\frac{1}{2})^3 a_n + \beta = \frac{1}{8}a_n + \beta$

이고 체내에 들어간 혈압 강하제의 양은 투여 시점 이후 다음 투여할 때까지는 계속 감소하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n \leqq 560$ 라는 조건을 만족시키면 체내의 허용량 조건을 만족시킬 수 있다.

$a_{n+1} = \frac{1}{8}a_n + \beta \Leftrightarrow (a_{n+1} - \frac{8}{7}\beta) = \frac{1}{8}(a_n - \frac{8}{7}\beta)$

$\Leftrightarrow a_n - \frac{8}{7}\beta = (\beta - \frac{8}{7}\beta)(\frac{1}{8})^{n-1} = -\frac{1}{7}\beta(\frac{1}{8})^{n-1}$

$\Leftrightarrow a_n = \frac{8}{7}\beta - \frac{1}{7}(\frac{1}{8})^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{8}{7}\beta \leqq 560$ 이므로 $\beta \leqq 490\ (mg)$

∴ 투여 가능한 약의 최대량은 490 mg 이다.

12) ⑤

$4m \leqq n \leqq 4m+3\ (m \geqq 1)$일 때,

$f(n) = [\frac{n}{4}] = m$ 이므로

$a_n = \sum_{k=1}^{f(n)} k = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$

$\sum_{n=1}^{28} a_n = (a_1 + a_2 + a_3) + \sum_{m=1}^{6}(a_{4m} + a_{4m+1} + a_{4m+2} + a_{4m+3}) + a_{4\cdot 7}$

$= (0+0+0) + \sum_{m=1}^{6}\frac{4m(m+1)}{2} + \frac{7(7+1)}{2}$

$= 2\times\frac{6\times7\times8}{3} + 28 = 252$

13) ②

시험 성적을 X라고 하면 X는 $\mathrm{N}(65, 10^2)$을 따르므로

$Z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-65}{10}$ 이라고 하면 Z는 표준 정규분포를 따른다.

1600명 중에서 40등은 2.5% 이므로

$\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq z) = 0.025\ (= 0.5 - 0.4750)$인 z 를 구하면

$z = 1.96$ 이고 이것에 대응하는

$X = 84.6$점$[\Leftarrow \frac{X-65}{10} = 1.96]$이다.

14) ④

내분점 공식에 의해서 $\mathrm{P}_{n+2}(\frac{\mathrm{x}_n + 2\mathrm{x}_{n+1}}{3}, \frac{\mathrm{y}_n + 2\mathrm{y}_{n+1}}{3})$ 이므로

$x_{n+2} = \frac{x_n + 2x_{n+1}}{3}$, $y_{n+2} = \frac{y_n + 2y_{n+1}}{3}$ 이고

문제의 조건에서

$x_1 = 1, x_2 = 4, y_1 = -1, y_2 = -2$ 이므로

$x_n = \frac{13}{4} + \frac{27}{4}(-\frac{1}{3})^n$,

$y_n = -\frac{7}{4} + (-\frac{9}{4})(-\frac{1}{3})^n$

$x_{2005} = \frac{13}{4} + \frac{27}{4}(-\frac{1}{3})^{2005}$ -----①

$y_{2005} = -\frac{7}{4} + (-\frac{9}{4})(-\frac{1}{3})^{2005}$ -----②

[① − ②] : $x_{2005} - y_{2005} = 5 + 9(-\frac{1}{3})^{2005} = 5 - 3^{-2003}$

∴ $x_{2005} - y_{2005} = 5 - 3^{-2003}$

15) ①

$m = np = 80$ -----①

$\sigma^2 = np(1-p) = 64$ -----②

[②÷①] : $1 - p = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$

∴ $p = \frac{1}{5}$, $n = 400$ (∵ ①)

$\sum_{r=0}^{n} 5^r\,\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{r}) = \sum_{r=0}^{400}\left\{5^{\mathrm{r}}\,{}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{r}}(\frac{1}{5})^{\mathrm{r}}(\frac{4}{5})^{\mathrm{n-r}}\right\}$

$= \sum_{r=0}^{400}\left\{{}_nC_r(\frac{5}{5})^r(\frac{4}{5})^{n-r}\right\} = \sum_{r=0}^{400}\left\{{}_nC_r(\frac{4}{5})^{n-r}\right\}$

$= (1+\frac{4}{5})^{400} = (\frac{9}{5})^{400}$

16) ③

$\log_y(1-x^2) \leqq 2$ 에서 y는 로그의 밑이므로 $y > 0,\ y \neq 1$이고

$1 - x^2 > 0$ (∵ 로그의 진수) $\Leftrightarrow -1 < x < 1$

(i) $0 < y < 1$ 일 때, $\begin{cases} 1-x^2 \geqq y^2 \\ y \leqq 2x+1 \end{cases}$, $-1 < x < 1$

(ii) $y > 1$ 일 때, $\begin{cases} 1-x^2 \leqq y^2 \\ y \leqq 2x+1 \end{cases}$, $-1 < x < 1$

이므로 영역의 넓이는 $\frac{\pi+5}{4}$

17) ②

ㄱ. $A = P^{-1}BP$ 이므로 $B = O$ 이면

$A = P^{-1}OP = O$: 참

ㄴ. $B^3 = (PAP^{-1})^3 = PA^3P^{-1}$ 이므로 $A^3 = E$ 이면

$B^3 = PA^3P^{-1} = PEP^{-1} = E$

$\Rightarrow B^{100} = (B^3)^{33}B = (E)^{33}B = B$: 참

ㄷ. $AB = APAP^{-1} = \begin{pmatrix} a^2+ab-b^2 & ab+b^2 \\ a^2-ab & ab \end{pmatrix} = E$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab-b^2 = ab = 1 \text{------①} \\ ab+b^2 = a^2-ab = 0 \text{------②} \end{cases}$

① $\Rightarrow a^2 - b^2 = 0$ -----①′

② $\Rightarrow a^2 - b^2 = 2ab$ -----②′

①′, ②′에서 $ab = 0$ (모순) [∵①에서 $ab = 1$]

$\therefore$ $AB=E$를 만족하는 행렬 A는 존재하지 않는다. : 거짓

18) ④

$a^2b^3 = 64$ -----①

$(\log_a c)^2 - 2(\log_b c)^2 = -(\log_a c)(\log_b c)$ -----②

① $\Leftrightarrow$ $2\log_2 a + 3\log_2 b = 6$ -----①$'$

② $\Leftrightarrow$ $3\dfrac{\log_a c}{\log_b c} - 2\dfrac{\log_b c}{\log_a c} = -1$

$\Leftrightarrow 3\dfrac{\log_c b}{\log_c a} - 2\dfrac{\log_c a}{\log_c b} = -1$

$\Leftrightarrow 3\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a} - 2\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b} = -1$

$\Leftrightarrow 3(\log_2 b)^2 - 2(\log_2 a)^2 = -\log_2 a \log_2 b$

$\Leftrightarrow 3(\log_2 b)^2 - 2\left\{3 - \dfrac{3}{2}log_2 b\right\}^2$

$= -\left\{3 - \dfrac{3}{2}log_2 b\right\}\log_2 b$ ($\because$ ①$'$) -------②$'$

$\log_2 b = x$ 라고 하면

②$'$ $\Leftrightarrow$ $3x^2 - 2(3 - \dfrac{3}{2}x)^2 = -3x + \dfrac{3}{2}x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \therefore\ x = 1$ or 6

[i] $x = 1$ 이면 (즉, $\log_2 b = 1$)

$\log_2 a = 3 - \dfrac{3}{2}log_2 b = \dfrac{3}{2}$ ($\because$ ①$'$)

[ii] $x = 6$ 이면 (즉, $\log_2 b = 6$)

$\log_2 a = 3 - \dfrac{3}{2}log_2 b = -6$ ($\because$ ①$'$)

[문제의 조건을 만족하지 않음]

($\because$ 문제의 조건에서 a, b, c 가 1보다 크기 때문에 $\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c$ 는 0보다 크다.)

$\therefore\ \log_2 a = \dfrac{3}{2},\ \log_2 b = 1$

$\therefore\ \log_2 ab = \log_2 a + \log_2 b = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$

19) ①

수열 $\{a_n\}$이 등차 수열이므로

$a_1 = a - 3k,\ a_2 = a - k,\ a_3 = a + k,\ a_4 = a + 3k$

이 성립하도록 $a = \dfrac{a_2 + a_3}{2},\ k = \dfrac{d}{2}$ 를 택하면

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4 = (a-3k)(a-k)(a+k)(a+3k) + (2k)^4$

$= a^4 - 10k^2a^2 + 25k^2 = (a^2 - 5k^2)^2$

이 성립한다. 이 때,

$a^2 - 5k^2 = (a_2 + k)^2 - 5k^2 = a^2 + 2a_2k - 4k^2 = a^2 + a_2 d - d^2$

이고,

a_2와 d는 정수이므로 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$는 정수의 제곱이 된다.

20) ①

${a_{n+1}}^2 + 4a^2 + (a_1 - 2)^2 = 4a_{n+1}\, a_n$

$\Leftrightarrow$ $(a_{n+1} - 2a_n)^2 + (a_1 - 2)^2 = 0$ 이고 모든 자연수 n에 대하여 각 항이 실수이므로 $a_{n+1} - 2a_n = 0$ 이고 $a_1 - 2 = 0$

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n$ 인 등비수열이므로

$a_n = 2^n$ 이므로 $b_n = \log_{\sqrt{2}} 2^n = 2n$

그러므로 $\sum_{k=1}^{m} b_k = \sum_{k=1}^{m} 2k = m(m+1) = 72$ 에서

$\therefore\ m = 8$

21) ②

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k)$

$= 3 \times \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= (n-1)n(n+1)$

$f(x) = (x-1)x(x+1) - 10^{15}$ 이라고 하면

$x \geqq 1$에서 $y = f(x)$은 증가 함수이고

$f(10^5) = (10^5 - 1)(10^5)(10^5 + 1) - 10^{15} = -10^5 < 0$

$f(10^5 + 1) = (10^5)(10^5 + 1)(10^5 + 2) - 10^{15} = 3 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^5 >$ 0 이므로

$1 \leqq x \leqq 10^5$ 일 때는 $f(x) < 0$ [$(x-1)x(x+1) < 10^{15}$]이고

$x \geqq 10^5 + 1$ 일 때는 $f(x) > 0$ [$(x-1)x(x+1) > 0$]이다.

따라서, 처음으로 $S_n - 10^{15} > 0$ 이 되는 자연수는

$n = 10^5 + 1$ 이 된다.

$\therefore$ $10^5 + 1$을 10으로 나눈 나머지는 1이다.

22) 정답 ⑤

$p_{n+1} = \dfrac{8}{9}p_n + (1 - \dfrac{1}{5})(1 - p_n) = \dfrac{4}{45}p_n + \dfrac{4}{5}$

$\Leftrightarrow$ $(p_{n+1} - \dfrac{36}{41}) = \dfrac{4}{45}(p_n - \dfrac{36}{41})$ [$n \geqq 1$]

$\Leftrightarrow$ $p_n - \dfrac{36}{41} = (p_1 - \dfrac{36}{41})(\dfrac{4}{45})^{n-1}$

$\Leftrightarrow$ $p_n = \dfrac{36}{41} + (p_1 - \dfrac{36}{41})(\dfrac{4}{45})^{n-1}$ [$0 \leqq p_1 \leqq 1$]

$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{36}{41} + (p_1 - \dfrac{36}{41})(\dfrac{4}{45})^{n-1}\right\} = \dfrac{36}{41}$

23) ③

$x = \log_3 z$ 라고 하면

$f(x) = 9^x + a = 9^{\log_3 z} + a = z^2 + a \equiv p(z)$

$g(x) = b \cdot 3^x + 2 = b \cdot 3^{\log_3 z} + 2 = bz + 2 \equiv q(z)$

문제의 조건에서 $f(x) = g(x)$ 의 근은

$x = \log_3 2,\ x = \log_3 k$ ($k > 2$)이므로 $p(z) = q(z)$의 근은 $z = 2$, $z = k$ ($k > 2$)이다.

$p(z) = q(z) \Leftrightarrow z^2 + a = bz + 2$

$\Leftrightarrow z^2 - bz + a - 2 = 0$ -----①

z에 대한 이차 방정식은 서로 다른 두 실근 2, k ($k > 2$)을 가지므로

(판별식)$=(-b)^2 - 4 \cdot (a-2) > 0 \Leftrightarrow b^2 > 4a - 8$: (ㄱ)은 거짓

$z = 2$는 방정식의 근이므로

$4 - 2b + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b - 2$: (ㄴ)은 참

(두 근의 곱)$= 2k = a - 2 > 4$ ($\because k > 2$)

$\Leftrightarrow a > 6$: (ㄷ)은 참

24) ②

$s_1 = \pi\left\{(\dfrac{2}{3})^2 - (\dfrac{1}{3})^2\right\}r_0^2 = \dfrac{1}{3}\pi r_0^2$ 이고

$s_{n+1} = (\dfrac{1}{3})^2 s_n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{\frac{1}{3}\pi r_0^2}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{8}\pi r_0^2$$

25) 10

$A^2X = X \Leftrightarrow (A^2 - E)X = O$

만일 행렬 $(A^2 - E)$의 역행렬이 존재한다면 행렬X는 하나만 존재할 수 있으므로 문제의 조건처럼 행렬 X가 2개 이상 존재하기 위해서는 행렬$(A^2 - E)$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$A^2 - E = \begin{pmatrix} 6 & 2+2a \\ 3+3a & 5+a^2 \end{pmatrix}$ 이므로

$Det(A^2 - E) = 30+6a^2 - 6(a+1)^2 = 24 - 12a = 0$

$\therefore\ a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p + q = 4 + 6 = 10$

26) 20

$\frac{2}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_y 2} = 3$ -----①

$\log_2 3x + \log_{\sqrt{2}} y = \log_2 48$ -----②

① $\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 y = 3$ -----①′

② $\Leftrightarrow \log_2 x + 2\log_2 y = \log_2 \frac{48}{3} = 4$ -----②′

①′,②′의 연립 방정식을 풀면

$\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$

$\log_2 y = 1 \Leftrightarrow y = 2$

$\therefore\ \alpha = 4, \beta = 2$ 이므로 $\alpha^2 + \beta^2 = 20$

27) 60

$\frac{2^{68} \times 5^{68}}{2^7 \times 5^7 + 2^4 \times 5^4} = \frac{10^{68}}{10^7 + 10^4}$ 이고

$a > 0$ 일 때, $y = \frac{a}{x}$ $(x > 0)$는 감소함수이므로

$\frac{9\times 10^{68}}{10^8} < \frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} < \frac{10^{68}}{10^7}$ $(\because \frac{10^8}{9} > 10^7 + 10^5 > 10^7)$

$\frac{9\times 10^{68}}{10^8} = 9\times 10^{60}$, $\frac{10^{68}}{10^7} = 10^{61}$

$\therefore\ 9\times 10^{60} < \frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} < 10^{61}$

$\therefore\ \frac{10^{68}}{10^7 + 10^4} = a\times 10^{60}$ $(9 < a < 10)$ 이므로$n = 60$ 이다.

28) 395

$\log_a \frac{I_0}{I} = kx \Leftrightarrow \frac{I_0}{I} = a^{kx}$

$x = 0.2$ 일 때, $I = \frac{5}{6}I_0$ 이므로 $\frac{I_0}{\frac{5}{6}I_0} = a^{\frac{k}{5}}$

$\therefore\ a^k = (\frac{6}{5})^5$

$\therefore\ 1000\log_{10} a^k = 1000\log_{10} (\frac{6}{5})^5 = 5000\times 0.079 = 395$

29) 12

$f(x) = {}_6C_0 + {}_6C_1\, x^2 + {}_6C_2\, x^4 + {}_6C_3\, x^6 + {}_6C_4\, x^8$
$\quad + {}_6C_5\, x^{10} + {}_6C_6\, x^{12}$
$\quad = \sum_{k=0}^{6} {}_6\mathrm{C}_\mathrm{k}\, \mathrm{x}^{2\mathrm{k}} = (1 + \mathrm{x}^2)^6$

$f(\tan\theta) = (1 + \tan^2\theta)^6 = 2^{12}$

$1 + \tan^2\theta = 4 \Leftrightarrow \tan^2\theta = 3$

$\Leftrightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$ ($\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\tan\theta > 0$)

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\frac{36\theta}{\pi} = 12$

30) 39

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ a_4 = 26,\ a_5 = 677,\ a_6 = a^2_{+15}$, ...

이므로 $r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 5,\ r_4 = 26,\ r_5 = 0,\ r_6 = 1,\ r_7 = 2,$
.....

($\because\ a_n = a_5 \cdot m + p$ $(0 \leqq p < a_5)$ 이면

$a_{n+1} = (a_5 \cdot m + p)^2 + 1 = a_5(a_5 \cdot m^2 + 2pm) + p^2 + 1$ 이므로

$r_n = p \Rightarrow r_{n+1} = p^2 + 1$)

$\therefore\ r_n = \begin{cases} 1 & (n = 5m+1) \\ 2 & (n = 5m+2) \\ 5 & (n = 5m+3) \\ 26 & (n = 5m+4) \\ 0 & (n = 5m) \end{cases}$, m은 정수

$\therefore$ (수의 합)$= 26\times 1 + 0\times 2 + 1\times 4 + 2\times 2 + 5\times 1 = 39$