2006학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시　　수 학 영 역

'가'형　　성명 　　수험번호 　　

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

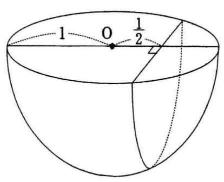
1. $n = 2006$ 이고 $a = \frac{3}{4}$ 일 때, 세 수 A, B, C 를 각각

$$A = \sqrt[n]{a^{n-1}}, \quad B = \sqrt[n]{a^{n+1}}, \quad C = \sqrt[n+1]{a^n}$$

이라 하자. 다음 중 세 수 A, B, C 의 대소관계로 옳은 것은? [2점]

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < A < C$
④ $B < C < A$　⑤ $C < A < B$

2. 반지름의 길이가 1 인 구를 두 개의 반구로 나누었다. 그림과 같이 구의 중심 O 로부터 거리가 $\frac{1}{2}$ 인 곳에서 반구의 단면에 수직인 평면으로 반구를 잘랐다. 이 때, 생긴 두 입체 중에서 작은 입체의 부피는? [2점]

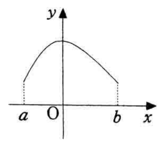


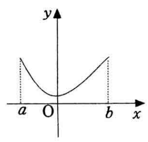
① $\frac{1}{5}\pi$　② $\frac{1}{12}\pi$　③ $\frac{5}{48}\pi$
④ $\frac{2}{27}\pi$　⑤ $\frac{7}{36}\pi$

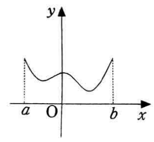
3. 폐구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$가 $a < x_1 < x_2 < b$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

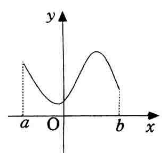
$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} > \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}$$

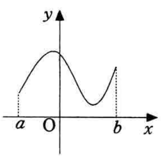
를 만족할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은? [2점]

①


②


③


④


⑤


4. 이차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 등식

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a f(0) + b f(1) + c f(2)$$

이 항상 성립하도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값은? [3점]

① 4　② 8　③ $\frac{4}{27}$　④ $\frac{8}{27}$　⑤ $\frac{8}{9}$

5. 헌혈을 하려는 학생 10명에게 자신의 혈액형을 A 형, B 형, AB 형, O 형으로만 기록하도록 하였더니 다음과 같은 결과가 나왔다.

> (가) A 형인 학생 수와 B 형인 학생 수의 합은 AB 형인 학생 수와 O 형인 학생 수의 합과 같다.
> (나) A 형인 학생 수와 AB 형인 학생 수의 합은 B 형인 학생 수와 O 형인 학생 수의 합과 같다.
> (다) A 형인 학생 수는 4 명이다.

이 때, 이 10 명의 학생이 모두 헌혈을 하였고, 각 학생의 혈액을 혈액형만 표시된 혈액팩에 넣었다. 이 10개의 혈액팩 모두를 일렬로 나열하는 방법은 모두 몇 가지인가?
(단, 각 혈액팩은 A 형, B 형, AB 형, O 형으로만 혈액형이 기록되어 있고, 기록된 혈액형으로만 구별할 수 있다) [3점]

① 2100 가지 ② 3900 가지 ③ 4200 가지
④ 6300 가지 ⑤ 12600 가지

6. 다음은 각 항이 정수이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$ 이 어떤 정수의 제곱임을 증명하는 과정이다.

> [증명]
> 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로
> $a_1 = a - 3k,\ a_2 = a - k,\ a_3 = a + k,\ a_4 = a + 3k$
> 이 성립하도록
> $a = \boxed{(가)}$, $k = \boxed{(나)}$
> 를 택하면
> $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4 = (\boxed{(다)})^2$
> 이 성립한다.
> 이 때, $\boxed{(다)} = {a_2}^2 + a_2 d - d^2$ 이고,
> a_2와 d는 정수이므로 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + d^4$는 정수의 제곱이 된다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{a_2 + a_3}{2}$	$\frac{d}{2}$	$a^2 - 5k^2$
②	$\frac{a_2 + a_3}{2}$	$\frac{d}{2}$	$a^2 - 3k^2$
③	$\frac{a_2 + a_3}{2}$	$\frac{d}{4}$	$a^2 - 5k^2$
④	$\frac{a_1 + a_4}{2}$	$\frac{d}{2}$	$a^2 - 3k^2$
⑤	$\frac{a_1 + a_4}{2}$	$\frac{d}{4}$	$a^2 - 3k^2$

7. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$ 를 $g(x)=f'(x)$, $h(x)=g'(x)$ 로 정의하자. $g(0)=h(0)=0$ 이고 $f(0)h'(0)<0$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$ 의 실근에 대한 설명으로 옳은 것은? [3점]

① 서로 다른 세 개의 양의 실근을 갖는다.
② 서로 다른 세 개의 음의 실근을 갖는다.
③ 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖는다.
④ 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖는다.
⑤ 한 개의 양의 실근을 갖는다.

8. 자연수 n 과 실수 x 에 대하여 함수 $F_n(x)$ 가

$$F_n(x)=\int \frac{x^{3n}-1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$F_n(1)=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-5}+\cdots+\frac{1}{2}-1$$

와 같이 정의될 때, $F_n(0)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{n(n-1)}{2}$ ② $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
③ $\frac{(n-1)(n-2)}{n+1}$ ④ 0
⑤ 1

9. 어느대학에서는 공개선발 시험으로 40 명의 학생을 선발하여 해외연수를 보내려고 한다. 이 시험에 응시한 학생 1600 명의 시험성적은 평균 65 점, 표준편차 10 점인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 표준정규분포표를 이용하여 선발된 학생의 최저점수를 구하면? [3점]

<표준정규분포표>

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.53	0.4370
1.96	0.4750
2.17	0.4850
2.24	0.4875
2.58	0.4951

① 80.3 점 ② 84.6 점 ③ 86.7 점
④ 87.4 점 ⑤ 90.8 점

10. 모든 자연수 n 에 대하여 각 항이 실수인 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$ 이

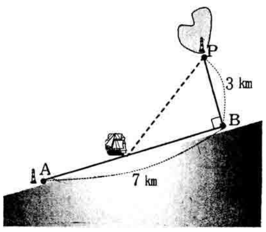
$$a_{n+1}{}^2+4a_n{}^2+(a_1-2)^2=4a_{n+1}a_n$$

$$b_n=\log_{\sqrt{2}} a_n$$

와 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k=72$ 가 성립하도록 하는 자연수 m 의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

11. 어느 항구 A 에서 해안선과 인근 섬의 P 지점을 운항하는 관광 유람선이 있다. 그림과 같이 P 지점에서 해안선까지의 최단거리인 지점 B 까지의 거리는 3 ㎞이고, B 로부터 해안선을 따라 7 ㎞ 떨어진 지점에 A 가 위치하고 있다. 이 유람선은 A 를 출발하여 해안선을 따라서 어떤 지점까지는 매시 12 ㎞의 속력으로 운항한 후, 곧바로 그 지점으로부터 섬의 P 지점을 향하여 매시 10 ㎞의 속력으로 직선거리를 운항한다. 이 때, 이 유람선이 항구 A 를 출발하여 섬의 P 지점에 도착하기까지 45 분 걸리고 운항거리가 최소가 되도록 운항경로를 정한다면 해안선을 따라서 이동한 거리는? (단, 해안선은 직선을 이루고 있다.) [3점]



① 2 ㎞ ② $\frac{21}{11}$ ㎞ ③ $\frac{25}{11}$ ㎞
④ $\frac{27}{11}$ ㎞ ⑤ 3 ㎞

12. 두 부등식 $\begin{cases} \log_y(1-x^2) \leq 2 \\ 2^y \leq 2\cdot 4^x \end{cases}$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{4}(\pi+1)$ ② $\frac{1}{4}(\pi+3)$ ③ $\frac{1}{4}(\pi+5)$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

13. 빨간 공 4 개와 파란 공 2 개가 들어 있는 상자 A 가 있다. 상자 A 에서 동시에 공 3 개를 꺼내어 비어 있는 상자 B 에 넣은 다음 다시 상자 B 에서 공 1 개를 꺼냈다. 상자 B 에서 꺼낸 공이 파란 공이었을 때 상자 A 에서 상자 B 로 옮겨진 공 3 개가 빨간 공 2 개와 파란 공 1 개일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

14. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}_1(1,-1)$, $\mathrm{P}_2(4,-2)$ 에 대하여 선분 $\overline{P_1P_2}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점을 P_3, 선분 $\overline{rP_2P_3}$ 을 2 : 1 로 내분하는 점을 P_4 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 선분 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 을 2 : 1 로 내분하는 점을 P_{n+2} (단, $n=1,2,3,\cdots$)라 하자. 이 때, 점P_n 의 좌표를 $P_n(x_n, y_n)$ 이라 하면 $x_{2005}-y_{2005}$ 의 값은? [4점]

① $6+3^{-2003}$ ② $6-3^{-2003}$ ③ $5+3^{-2003}$
④ $5-3^{-2003}$ ⑤ $5-3^{-2005}$

15. 실수전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(2x)=2f(x)$ 를 만족한다. 이 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x \neq 0) \\ f'(0) & (x=0) \end{cases}$$

으로 정의하자. [보기]에서 함수 $g(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

> [보기]
> ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
> ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(2x)=g(x)$ 이다.
> ㄷ. 함수 $g(x)$는 일차함수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 자연수 n 에 대하여 $f(n)=\left[\dfrac{n}{4}\right]$ 이라 하고, 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_1=a_2=a_3=0\ ,\ a_n=\sum_{k=1}^{f(n)} k \quad (\text{단, } n=4, 5, 6, \ldots)$$

으로 정의할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{28} a_n$ 의 값은? (단, 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

① 204 ② 212 ③ 220
④ 224 ⑤ 252

17. 실수 a, b 와 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B 를 $B=PAP^{-1}$ 라 하자. [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, E 는 단위행렬이고 O 는 영행렬이다.) [4점]

> [보기]
> ㄱ. $B=O$이면 $A=O$이다.
> ㄴ. $A^3=E$이면 $B^{100}=B$ 이다.
> ㄷ. $AB=E$를 만족하는 행렬 A가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 쌍곡선 $4x^2-9y^2=36$ 이 x 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 직선 $x=t$ (단, $t>3$)가 이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 C, D 라 하자. t 의 값이 변함에 따라 두 직선 AC 와 BD 의 교점 P 는 곡선을 그린다. 이 때, 이 곡선의 두 초점 사이의 거리는? [4점]

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{13}$
④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

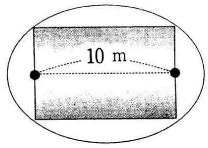
19. 공간에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 3, 4인 두 개의 구 S_1, S_2가 있다. 이 때, 구 S_1 위의 임의의 점을 P, 구 S_2 위의 임의의 점을 Q라 하고, 이 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$을 만족하는 점을 R이라 하자. 다음은 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|$의 최댓값을 구하는 풀이과정이다.

> [풀이]
> $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$ 라 하면
> $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}=(\vec{q}-\vec{p})+(\vec{q}+\vec{p})$ 이므로
> $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|^2$
> $=|\vec{q}-\vec{p}|^2+2(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})+|\vec{q}+\vec{p}|^2$
> $=2(\boxed{\text{(가)}})+2(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})$ ⋯ ㉠
> 그런데, $(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})\leqq|\vec{q}-\vec{p}||\vec{q}+\vec{p}|$
> $=\sqrt{|\vec{q}-\vec{p}|^2|\vec{q}+\vec{p}|^2}$
> $=\boxed{\text{(나)}}$ ⋯ ㉡
> 따라서, ㉠과 ㉡에 의해 $|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|$의 최댓값은 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 쓰면? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\lvert\vec{p}\rvert^2+\lvert\vec{q}\rvert^2$	$\sqrt{25-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	$\sqrt{60}$
②	$\lvert\vec{p}\rvert^2+\lvert\vec{q}\rvert^2$	$\sqrt{25^2-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	15
③	$\lvert\vec{p}\rvert^2+\lvert\vec{q}\rvert^2$	$\sqrt{25^2-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	10
④	$\lvert\vec{p}\rvert^2\lvert\vec{q}\rvert^2$	$\sqrt{25-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	10
⑤	$\lvert\vec{p}\rvert^2\lvert\vec{q}\rvert^2$	$\sqrt{25-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$	$\sqrt{60}$

20. 오른쪽 그림과 같이 편평한 땅에 거리가 $10\,m$ 떨어진 두 개의 말뚝이 있다. 두 개의 말뚝에 길이가 $14\,m$ 인 끈을 묶고 이 끈을 팽팽하게 유지하면서 곡선을 그렸다. 두 말뚝을 지나면서 이 곡선에 접하는 직사각형 모양의 꽃밭을 만들었을 때, 이 꽃밭의 넓이는? [3점]



① $\frac{400}{7}m^2$ ② $\frac{420}{7}m^2$ ③ $\frac{440}{7}m^2$ ④ $\frac{460}{7}m^2$ ⑤ $\frac{480}{7}m^2$

21. 양궁대회에 참가한 어떤 선수가 활을 쏘아 과녁의 10점 부분을 명중시킨 다음 다시 활을 쏘아 10점 부분을 명중시킬 확률이 $\frac{8}{9}$ 이고, 10점 부분을 명중시키지 못한 다음 다시 10점 부분을 명중시키지 못할 확률이 $\frac{1}{5}$ 이다. 이 선수가 반복하여 계속 활을 쏜다고 할 때, n 번째에 10점 부분을 명중시킬 확률을 p_n 이라 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty}p_n$ 의 값은? [4점]

① $\frac{14}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{25}{41}$ ④ $\frac{32}{41}$ ⑤ $\frac{36}{41}$

22. $a_n = 3n^2 - 3n$ ($n = 1, 2, \dots$)과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n이 처음으로 16 자리의 정수가 되도록 하는 n을 10 으로 나눈 나머지는?

[4점]

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 8　　⑤ 9

23. 두 지수함수

$$f(x) = 9^x + a\ ,\ \ g(x) = b \cdot 3^x + 2$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 곡선 $y = g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x 좌표가 $x = \log_3 2$, $x = \log_3 k$ (단, $k > 2$)일 때, [보기]에서 실수 a, b에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

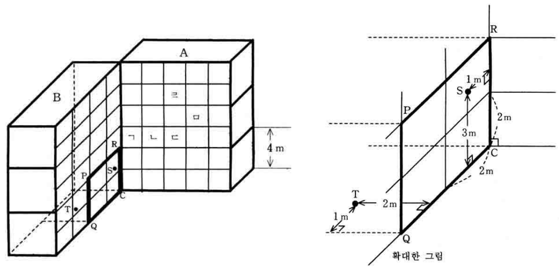
[보기]
ㄱ. $b^2 = 4a - 8$
ㄴ. $a = 2b - 2$
ㄷ. $a > 6$

① ㄴ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 그림과 같이 각층의 높이가4 m 인 직육면체 형태의 두 건물 A, B 가 있다. 건물 A 와 건물 B 는 서로 수직으로 붙어 있고, 두 건물의 외벽은 한변의 길이가 2 m 인 정사각형 모양의 유리창으로 서로 이어져있다. 어떤 사람이 건물 A 의 어느 창가에서 건물 B 의 유리창을 향하여 레이저 빛을 쏘았는데 이 레이저 빛은 건물 B 의 창문의 S 지점과 바닥 면의 T 지점을 지났다. 다음 중 레이저를 쏜 창가는? (단, 유리창틀의 두께는 무시하고, 레이저 빛은 유리창을 통과할 때 굴절되지 않는다고 가정한다.)

[4점]

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄹ　　⑤ ㅁ



주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 행렬$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2X = X$를 만족하는 행렬 X가 2 개 이상 존재하도록 실수 a의 값을 정할 때, $A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix}$를 만족하는 상수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, X는 2×1 행렬이다.) [3점]

26. $xy=10$ 이고 $1 \leqq x \leqq 10^4$ 일 때, $(\log_{10} y)^3 + 3(\log_{10} x)^2 - 6\log_{10} x + 15$ 의 최댓값을 구하시오. [3점]

27. 실수 x에 대한 함수 $f(x)$가

$$f(x) = {}_6C_0 + {}_6C_1\,x^2 + {}_6C_2\,x^4 + {}_6C_3\,x^6 + {}_6C_4\,x^8 + {}_6C_5\,x^{10} + {}_6C_6\,x^{12}$$

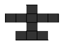
와 같이 정의될 때, $f(\tan\theta) = 2^{12}$을 만족하는 θ에 대하여 $\dfrac{36\theta}{\pi}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$) [4점]

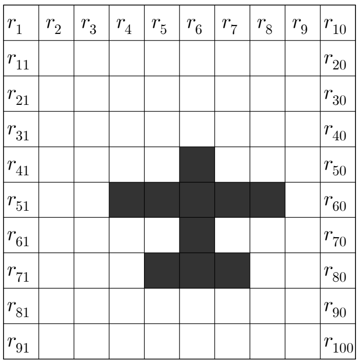
28. 동일한 직선도로 위를 같은 방향으로 달리는 두 자동차 A 와 B 가 있다. 자동차 A 가 매시 $72\,km$ 의 속력으로 달리고 있던 중 P 지점에 이르렀을 때, P 지점에서 $100\,m$ 앞에 정지하고 있던 자동차 B 를 발견하고 제동장치를 작동하여 $-5\,m/$초^2 의 가속도로 운행하였다. A 가 제동장치를 작동한지 4 초가 되는 순간에 정지하고 있던 B 는 $6\,m/$초^2 의 가속도로 출발하였고, 동시에 A 는 $10\,m/$초^2 의 가속도로 계속하여 운행하였다. 이 때, P 지점에서 A 가 B 를 추월하는 지점까지의 거리는 몇 m 인지를 구하시오. [4점]

29. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3-2x^2+3x-4}=1\ ,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-3x+2}=4$$

이 성립하고, 극한 $\lim_{x\to 2}\frac{13f(x)}{x^2-3x+2}$ 이 α 로 수렴할 때, 상수 α 의 값을 구하시오. [3점]

30. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ (단, $n = 1, 2, \ldots$)으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{r_n\}$의 제n 항 r_n은 a_n을 a_5로 나눈 나머지로 정의하자. 예를 들어 r_1은 a_1을 a_5로 나눈 나머지이고, r_2는 a_2를 a_5로 나눈 나머지이다. 이 때, 다음 그림과 같이 100개의 작은 사각형으로 이루어진 바둑판 모양의 사각형 각 칸에 r_1부터 r_{100}까지의 수를 차례로 채워나갈 때, 글자  모양의 어두운 부분에 채워지는 수들의 합을 구하시오. [4점]



※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2006년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ④

$A=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2005}{2006}}$, $B=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2007}{2006}}$, $C=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2006}{2007}}$

$a=\frac{3}{4}$ 에서 감소함수이므로

$\frac{2007}{2006}>\frac{2006}{2007}>\frac{2005}{2006}$ 이므로 $\therefore\ B<C<A$

2) ③

구하는 입체의 부피 V_x 는 좌표평면상에서 원 $x^2+y^2=1$ 의 $\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ 의 부분을 x 축을 회전축으로 하여 회전한 입체의 부피의 $\frac{1}{2}$ 과 같으므로

$\therefore\ V_x=\frac{1}{2}\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}y^2\,dx=\frac{1}{2}\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)\,dx$

$=\frac{1}{2}\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{5}{48}\pi$

3) ①

$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}$ 은 점$(a,\ f(a))$ 과 $(x_1,\ f(x_1))$ 을 이은 선분의 기울기,

$\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$ 은 점$(a,\ f(a))$ 과 $(x_2,\ f(x_2))$ 을 이은 선분의 기울기

$a<x_1<x_2<b$ 에서 $\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$ 이 성립한다는 것은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 이 구간에서 위로 볼록한 그래프이어야 성립한다.

4) ④

$f(x)=px^2+qx+r$ (단, $p,\ q,\ r$ 은 임의의 실수) 라 두면

$f(0)=r$, $f(1)=p+q+r$, $f(2)=4p+2q+r$ 이고

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(px^2+qx+r)\,dx$

$=\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2+rx\right]_0^2=\frac{8p}{3}+2q+2r$

$\frac{8}{3}p+2q+2r=ar+b(p+q+r)+c(4p+2q+r)$

$=(b+4c)p+(b+2c)q+(a+b+c)r$

$b+4c=\frac{8}{3},\ b+2c=2,\ a+b+c=2$ 을 연립하면

$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{3},\ c=\frac{1}{3}$ 이므로

$\therefore\ abc=\frac{8}{27}$

5) ④

혈액형이 A 형, B 형, AB 형, O 형인 학생의 수를 각각 a,b,c,d 라 두면

$a+b+c+d=10$

(다)에서 $a=4$ 이고 (가)에서 $4+b=c+d$

(나)에서 $4+c=b+d$ 연립하면

$a=4,\ b=1,\ c=1,\ d=4$ 이므로

구하는 경우의 수는 같은 것을 포함하는 순열의 수와 같으므로

$\therefore\ \frac{10!}{4!\times 4!}=6300$

6) ①

각 항이 정수이고 공차가 d 인 등차수열$\{a_n\}$ 에 대하여

$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4+d^4$ 이 어떤 정수의 제곱임을 증명

증명]

수열$\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$a_1=a-3k,\ a_2=a-k,\ a_3=a+k,\ a_4=a+3k$ 이 성립하도록 a , k 를 정하면

$a_1+a_4=2a$, $a_2+a_3=2a$ 에서

$a=\frac{a_1+a_4}{2}$ 또는 $a=\frac{a_2+a_3}{2}$ 이고

공차가 $2k=d$ 이므로 $k=\frac{d}{2}$ 이다. 또,

$$
\begin{aligned}
a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4+d^4&=(a-3k)(a-k)(a+k)(a+3k)+d^4\\
&=(a^2-k^2)(a^2-9k^2)+d^4\\
&=a^4-10k^2a^2+9k^4+d^4\ (d=2k)\\
&=a^4-10a^2k^2+25k^4\\
&=(a^2-5k)^2
\end{aligned}
$$

이 성립한다.

이 때, $(a^2-5k^2)^2=a_2+a_2d-d^2$ 이고,

a_2 와 d 는 정수이므로 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4+d^4$ 는 정수의 제곱이 된다.

7) ⑤

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ 라 두면

$g(x)=f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이고 $g(0)=0$ 이므로 $c=0$

$h(x)=g'(x)=6ax+2b$ 이고 $h(0)=0$ 이므로 $b=0$

$f(x)=ax^3+d$

또, $h'(x)=6a$ 에서 $h'(0)=6a$ 이므로

조건 $f(0)h'(0)=6ad<0$ 에서 $ad<0$ 이다.

그러므로 함수$f(x)=ax^3+d$ 의 그래프는 $y=ax^3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 d 만큼 평행이동한 그래프이므로 항상 x 축의 양의 방향에서 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 은 한 개의 양의 실근을 갖는다.

8) ④

$$
\begin{aligned}
x^{3n}-1&=(x^3-1)(x^{3n-3}+x^{3n-6}+\cdots+x^3+1)\\
&=(x-1)(x^2+x+1)(x^{3n-3}+x^{3n-6}+\cdots+x^3+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x^{3n}-1}{x^2+x+1}&=(x-1)(x^{3n-3}+x^{3n-6}+\cdots+x^3+1)\\
&=x^{3n-2}-x^{3n-3}+x^{3n-5}-x^{3n-6}+\cdots+x-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_n(x)&=\int\frac{x^{3n}-1}{x^2+x+1}\,dx\\
&=\int\left(x^{3n-2}-x^{3n-3}+x^{3n-5}-x^{3n-6}+\cdots+x-1\right)\\
&=\frac{1}{3n-1}x^{3n-1}-\frac{1}{3n-2}x^{3n-2}+\cdots+\frac{1}{2}x^2-x+C
\end{aligned}
$$

$F_n(1)=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-2}+\cdots+\frac{1}{2}-1$ 에서 $C=0$ 이므로

$\therefore\ F_n(0)=0$

9) ②

시험에 응시한 학생1600 명의 시험성적을 확률변수X 라 두면 확률변수 X 는 정규분포$\mathrm{N}(65,\ 10^2)$ 을 따른다.

또, 이 시험에 선발될 확률이 $\frac{40}{1600}=\frac{1}{40}$ 이므로 선발된 학생의 최저 점수를 k 라 두면

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqq \mathrm{k})=\mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \geqq \frac{\mathrm{k}-65}{10}\right)=0.025$

$0.5-\mathrm{P}\left(0 \leqq \mathrm{Z} \leqq \frac{\mathrm{k}-65}{10}\right)=0.025$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0 \leqq \mathrm{Z} \leqq \frac{\mathrm{k}-65}{10}\right)=0.4750$

주어진 표준정규분포표에서 $\frac{k-65}{10}=1.96$ 이므로

$\therefore\ k=84.6$

10) ①

${a_{n+1}}^2+4{a_n}^2+(a_1-2)^2=4a_{n+1}a_n$

$\Leftrightarrow\ (a_{n+1}-2a_n)^2+(a_1-2)^2=0$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 각 항이 실수이므로 $a_{n+1}-2a_n=0$ 이고 $a_1-2=0$

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n$ 인 등비수열이므로

$a_n=2^n$ 이므로 $b_n=\log_{\sqrt{2}}2^n=2n$

그러므로 $\sum_{k=1}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{m}2k=m(m+1)=72$ 에서 $\therefore\ m=8$

11) ②

해안선을 따라 이동한 거리를 x 라 두면

$\frac{x}{12}+\frac{\sqrt{3^2+(7-x)^2}}{10}=\frac{45}{60}$

$6\sqrt{x^2-14x+58}=45-5x$, $11x^2-54x+63=0$

$(x-3)(11x-21)=0$ 에서 $x=3$ 또는 $x=\frac{21}{11}$ 이고

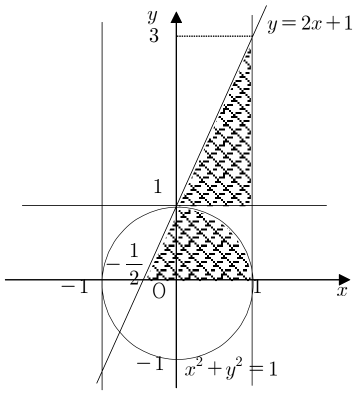
운항거리 $S(x)=x+\sqrt{9+(7-x)^2}$ 라 두면

$S(3)=3+5=8$, $S\left(\frac{21}{11}\right)=\frac{21}{11}+\frac{65}{11}=\frac{86}{11}<8$ 이므로

운항거리가 최소가 되는 x 는 $\frac{21}{11}$

12) ③

$\begin{cases}\log_y(1-x^2)\leqq 2 & \cdots\cdots\cdots ①\\ 2^y\leqq 2\cdot 4^x & \cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$



①식의 진수조건 $1-x^2>0$ 에서 $-1<x<1$ 이고

(i) $0<y<1$ 일 때, $1-x^2\geqq y^2 \ \Leftrightarrow\ x^2+y^2\leqq 1$

(ii) $y>1$ 일 때, $1-x^2\leqq y^2 \ \Leftrightarrow\ x^2+y^2\geqq 1$

②식에서 $2^y\leqq 2^{2x+1} \ \Leftrightarrow\ y\leqq 2x+1$

좌표평면위에 나타내면 위 그림과 같다.

그러므로 빗금친 영역의 넓이 S 는

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times 1\times 2=\frac{1}{4}(\pi+5)$

13) ⑤

상자B 에서 꺼낸 공이 파란공이 나오는 사건을 E ,
상자A 에서 상자B 로 옮겨진 공 3 개가 빨간 공 2 개와 파란 공 1 개인 사건을 F 라 두면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\mathrm{F}\mid\mathrm{E})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{F}\cap\mathrm{E})}{\mathrm{P}(\mathrm{E})}$

(i) $\mathrm{P}(\mathrm{E})=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}\times\frac{2}{3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}\times\frac{1}{3}$

(ii) $\mathrm{P}(\mathrm{F}\cap\mathrm{E})=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}\times\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(\mathrm{F}\mid\mathrm{E})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{F}\cap\mathrm{E})}{\mathrm{P}(\mathrm{E})}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

14) ④

내분점 공식에 의해서 $\mathrm{P}_{n+2}\left(\frac{\mathrm{x_n}+2\mathrm{x}_{n+1}}{3},\ \frac{\mathrm{y_n}+2\mathrm{y}_{n+1}}{3}\right)$ 이므로

$x_{n+2}=\frac{x_n+2x_{n+1}}{3}$, $y_{n+2}=\frac{y_n+2y_{n+1}}{3}$ 이고

문제의 조건에서

$x_1=1,\ x_2=4,\ y_1=-1,\ y_2=-2$ 이므로

$x_n=\frac{13}{4}+\frac{27}{4}(-\frac{1}{3})^n$,

$y_n=-\frac{7}{4}+(-\frac{9}{4})(-\frac{1}{3})^n$

$x_{2005}=\frac{13}{4}+\frac{27}{4}(-\frac{1}{3})^{2005}$ -----①

$y_{2005}=-\frac{7}{4}+(-\frac{9}{4})(-\frac{1}{3})^{2005}$ -----②

[① − ②] : $x_{2005}-y_{2005}=5+9(-\frac{1}{3})^{2005}=5-3^{-2003}$

$\therefore\ x_{2005}-y_{2005}=5-3^{-2003}$

15) ③

모든 실수에 대하여 $f(2x)=2f(x)$ 가 성립하므로 $f(0)=0$ 이다

ㄱ. 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다. (참)

$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 이므로 연속이다.

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(2x)=g(x)$ 이다. (참)

$x=0$ 일 때는 성립한다.

$x\neq 0$ 일 때 $g(2x)=\frac{f(2x)}{2x}=\frac{2f(x)}{2x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$ 이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$ 는 일차함수이다. (거짓)

함수 $g(x)$ 가 일차함수라면 $g(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ 라 두면

ㄴ에서, 모든 실수 x 에 대하여 $g(2x)=g(x)$ 이므로

$2ax+b=ax+b$ 가 성립해야 하므로 $a=0$ 가 되어 모순이다.

그러므로 함수 $g(x)$ 는 일차함수가 아니다.

16) ⑤

$a_n=\sum_{k=1}^{f(n)}k=\frac{f(n)\{f(n)+1\}}{2}=\frac{\left[\frac{n}{4}\right]\left(\left[\frac{n}{4}\right]+1\right)}{2}$ 이다.

(ⅰ) $1 \leqq n < 4$ 일 때, $\left[\frac{n}{4}\right]=0$ 이므로 $a_n=0$

(ⅱ) $4 \leqq n < 8$ 일 때, $\left[\frac{n}{4}\right]=1$ 이므로 $a_n=1$

(ⅲ) $8 \leqq n < 12$ 일 때, $\left[\frac{n}{4}\right]=2$ 이므로 $a_n=3$

(ⅳ) $12 \leqq n < 16$ 일 때, $\left[\frac{n}{4}\right]=3$ 이므로 $a_n=6$

(ⅴ) $16 \leqq n < 20$ 일 때, $\left[\frac{n}{4}\right]=4$ 이므로 $a_n=10$

(ⅵ) $20 \leqq n < 24$ 일 때, $\left[\frac{n}{4}\right]=5$ 이므로 $a_n=15$

(ⅶ) $24 \leqq n < 28$ 일 때, $\left[\frac{n}{4}\right]=6$ 이므로 $a_n=21$

(ⅷ) $n=28$ 일 때, $\left[\frac{n}{4}\right]=7$ 이므로 $a_n=28$

17) ②

ㄱ. $B=O$ 이면 $A=O$ 이다. (참)

$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b&b\\2a-b&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 이면 $a=0,\ b=0$ 이므로

$A=O$ 이다.

ㄴ. $A^3=E$ 이면 $B^{100}=B$ 이다. (참)

$B=PAP^{-1}$ 에서

$B^{100}=PA^{100}P^{-1}=P(A^3)^{33}AP^{-1}=PAP^{-1}=B$

ㄷ. $AB=E$ 를 만족하는 행렬 A 가 존재한다. (거짓)

$$AB=A(PAP^{-1})=\begin{pmatrix}a&b\\a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-b&b\\2a-b&b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a^2+ab-b^2&ab+b^2\\a^2-ab&ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$a^2+ab-b^2=1,\ b(a+b)=0,\ a(a-b)=0,\ ab=1$ 이다.

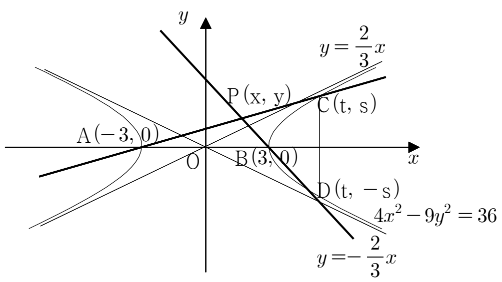
그러므로 $ab=1$ 에서 $a \neq 0,\ b \neq 0$ 이므로

$b(a+b)=0,\ a(a-b)=0$ 에서 $a+b=0,\ a-b=0$ 이 되려면

$a=0,\ b=0$ 이므로 모순이다.

그러므로 $AB=E$ 를 만족하는 행렬 A 가 존재하지 않는다.

18) ②



직선 AC 와 BD 의 교점 P(x, y) 라 두자.

$4t^2-9s^2=36$ ……… ①

직선AC 의 방정식은 $y=\frac{s}{t+3}(x+3)$ 에서

$(t+3)y=s(x+3)$ ……… ②

직선BD 의 방정식은 $y=\frac{-s}{t-3}(x-3)$

$(t-3)y=-s(x-3)$ ……… ③

②, ③을 연립하면 $s=\frac{3y}{x},\ t=\frac{9}{x}$ …… ④

단, $t=\frac{9}{x}>3$ 에서 $x<3$

④를 ①식에 대입하면

$4\times\left(\frac{9}{x}\right)^2-9\times\left(\frac{3y}{x}\right)^2=36$

$36x^2+81y^2=4\times 81$

그러므로 점P 의 자취는 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ 인 타원의 일부이다.

그러므로 초점은 $c^2=3^2-2^2=5$ 에서 $c=\pm\sqrt{5}$ 이므로

두 초점간의 거리는 $\therefore\ 2\sqrt{5}$

19) ③

$\overrightarrow{OP}=\vec{p},\ \overrightarrow{OQ}=\vec{q}$ 라 하면

$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP})=(\vec{q}-\vec{p})+(\vec{q}+\vec{p})$

이므로

$$|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|^2=|(\vec{q}-\vec{p})+(\vec{q}+\vec{p})|^2$$
$$=|\vec{q}-\vec{p}|^2+2(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})+|(\vec{q}+\vec{p})|^2$$
$$=2(|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2)+2(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p})\ \cdots\cdots ㉠$$

그런데,

$$(\vec{q}-\vec{p})\cdot(\vec{q}+\vec{p}) \leqq |\vec{q}-\vec{p}||\vec{q}+\vec{p}|$$
$$=\sqrt{|\vec{q}-\vec{p}|^2|\vec{q}+\vec{p}|^2}$$
$$=\sqrt{(25-2\vec{p}\cdot\vec{q})(25+2\vec{p}\cdot\vec{q})}$$
$$=\sqrt{25^2-4(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

$(\because\ |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=4)$

따라서, ㉠, ㉡에 의해

$|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|^2 \leqq 2(3^2+4^2)+2\times 50=100$ 이므로

$|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OR}|$ 의 최댓값은 10 이다.

20) ⑤

구하는 타원을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0,\ c^2=a^2-b^2)$ 라 두면

$2a=14$ 에서 $a=7$

$c^2=a^2-b^2$ 에서 $25=49-b^2$ 이므로 $b^2=24$

그러므로 타원의 식은 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ 이다.

$x=5$ 을 대입하면 $y=\pm\frac{24}{7}$ 이므로

구하는 꽃밭의 넓이는 $\therefore\ 10\times\frac{48}{7}=\frac{480}{7}\ \mathrm{m}^2$

21) ⑤

n 번째에 10점 부분에 명중시킬 확률이 p_n 이므로

$n+1$ 번째에 10점 부분에 명중시킬 확률이 p_{n+1} 이므로

p_{n+1} 은 n 번째 명중하고 $n+1$ 번째도 명중하거나 n 번째 명중하지 못하고 $n+1$ 번째 명중할 확률의 합이므로

$p_{n+1}=p_n\times\frac{8}{9}+(1-p_n)\times\frac{4}{5} \Leftrightarrow p_{n+1}=\frac{4}{45}p_n+\frac{4}{5}$

$\lim_{n\to\infty}p_n=\alpha$ 라 두면

$\alpha=\frac{4}{45}\alpha+\frac{4}{5}$ 에서 $\therefore\ \alpha=\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{36}{41}$

22) ②

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k)$

$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\times\frac{n(n+1)}{2}=n^3-n$

S_n 이 처음으로 16 자리의 정수가 되는 n 을 찾으려면

n^3 이 16 자리의 정수가 되는 n 을 구해보면

$15\leqq\log n^3<16 \iff 5\leqq\log n<\frac{16}{3}$ 에서

n 은 6 자리의 정수이어야 한다.

$n=10^5$ 이면

$S_n=n^3-n=10^{15}-10^5$ 은 15 자리의 정수이고

$n=10^5+1$ 이면

$S_n=n^3-n=(10^5+1)^3-(10^5+1)$ 은 16 자리의 정수

$=10^{15}+3\cdot10^{10}+2\cdot10^5$

그러므로 S_n 이 처음으로 16 자리의 정수가 되는 n 은

$n=10^5+1$ 이므로 10 으로 나눈 나머지는 1 이다.

23) ③

$f(x)=9^x+a,\ g(x)=b\cdot3^x+2$ 가 만나는 교점은 연립하면

방정식 $9^x+a=b\cdot3^x+2$ 의 두 근이 $\log_3 2,\ \log_3 k$ 이다.

$3^x=t\ (t>0)$ 라 두면

$t^2-bt+(a-2)=0$ 의 서로 다른 두 근이 2, k 이므로

판별식 $D=b^2-4(a-2)>0$ 에서 $b^2>4a-8$ 이므로ㄱ은 거짓

근과 계수와의 관계에서

(i) 두 근의 합 : $2+k=b$ ……①

(ii) 두 근의 곱 : $2k=a-2$ ……②

①, ②에서 k 를 소거하면 $\therefore\ a=2b-2$

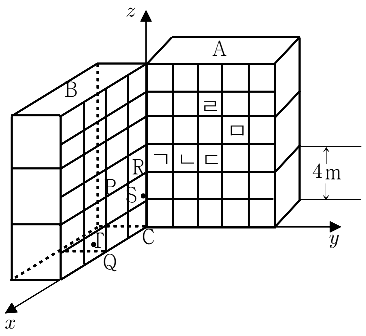
또, 문제의 조건에서 $k>2$ 이므로

$k=\frac{a-2}{2}>2$ 에서 $\therefore\ a>6$

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

24) ①

아래 그림처럼 공간좌표에 옮겨놓으면



S(1, 0, 3), T(3, −2, 0) 이므로 두 점S, T 를 지나는 직선의 방정식

$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}$ 이 yz 평면과 만나는 교점이 레이저를 쏜 창가이다.

$x=0$ 을 대입하면 $y=1,\ z=\frac{9}{2}$ 이므로 $\left(0,\ 1,\ \frac{9}{2}\right)$ 인 곳은 ㄱ지점이다.

25) 10

$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2+2a\\3+3a&6+a^2\end{pmatrix}$

$A^2X=X \iff (A^2-E)X=O$

$\begin{pmatrix}6&2(1+a)\\3(1+a)&5+a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 을 만족하는 행렬X 가 2 개 이상

존재한다는 것은 연립방정식의 해가 부정인 해를 가진다는 뜻이므로

$D=6(5+a^2)-6(1+a)^2=0$ 에서 $a=2$ 이고

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\24\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&-2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

$\therefore\ p+q=10$

26) 16

$xy=10$ 의 양변에 상용로그를 취하면$\log y=1-\log x$

$1\leqq x\leqq10^4$ 의 양변에 상용로그를 취하면 $0\leqq\log x\leqq4$

$(\log_{10}y)^3+3(\log_{10}x)^2-6\log_{10}x+15$ 에서

$\log_{10}x=t$ 라 두면

$f(t)=(1-t)^3+3t^2-6t+15=-t^3+6t^2-9t+16$

(단, $0\leqq t\leqq4$)

$f'(t)=-3t^2+12t-9=-3(t-1)(t-3)$ 이고

$f'(t)=0$ 에서 $t=1$ 또는 $t=4$

증감표를 그리면

x	0	⋯	1	⋯	3	⋯	4
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	16	↘	12	↗	16	↘	12

그러므로 최댓값은 16

27) 12

$f(x)=(1+x^2)^6={}_6C_0+{}_6C_1x^2+{}_6C_2x^4+\cdots+{}_6C_6x^{12}$

$f(\tan\theta)=(1+\tan^2\theta)^6=\sec^2\theta=2^{12}$ 에서

$\sec\theta=2 \iff \cos\theta=\frac{1}{2}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\therefore\ \frac{36\theta}{\pi}=12$

28) 190m

자동차 A 의 속력은 시속72km 이므로

초속은 $\frac{72000}{3600}=20$m 이다.

자동차A 가 P 지점에서 100m 앞의 자동차 B 를 발견하고 제동장치를

작동하여 -5 m/초^2 의 가속도로 운행할 때, t 초 후의 자동차 A 의

속력은 $20-5t$ 이므로 4 초 동안 달린 거리는

$\int_0^4(20-5t)\,dt=\left[20t-\frac{5}{2}t^2\right]_0^4=40$ m 이다.

또, 4 초 후의 자동차A 의 속력은 0 (자동차가 멈춘다)이다.

이때부터 자동차 B 는 6m/초^2 의 가속도로 자동차 A 는 10m/초^2 의

가속도로 운행하므로 자동차A 가 자동차 B 를 t 초 후에 추월한다고 하면

$\int_0^t10t\,dt=60+\int_0^t6t\,dt$, $\left[5t^2\right]_0^t=60+\left[3t^2\right]_0^t$

$t^2=30 \iff t=\sqrt{30}$ (초)이므로

이 때, 달린 거리는 $5\times(\sqrt{30})^2=150$ m

그러므로 자동차A 가 B 를 추월하는 지점까지 달린 거리는

$\therefore\ 40+150=190$ m

29) 65

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3-2x^2+3x-4}=1$ ……… ①

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)}=4$ (수렴) ……… ②

$\lim_{x\to2}\frac{13f(x)}{(x-1)(x-2)}=\alpha$ (수렴) ……… ③

①에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차식이고

②에서 $f(1)=0$ 이고, ③에서 $f(2)=0$ 이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$ 라 두면 ②에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x+a)}{(x-1)(x-2)}=4$ 에서 $1+a=4$ $\therefore$ $a=3$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$ 을 ③에 대입하면

$\therefore$ $\alpha=\lim_{x\to2}\frac{13(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=13\cdot5=65$

30) 39

$a_1=1$, $a_2=1^1+1=2$, $a_3=2^2+1=5$

$a_4=5^2+1=26$, $a_5=26^2+1=677$,

$a_6=a_5^2+1$, $\cdots$, $a_{100}=a_{99}^2+1$이고

r_n 은 a_n 을 $a_5=677$ 로 나눈 나머지이므로

$r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=5$, $r_4=26$, $r_5=0$,

$a_6=a_5^2+1$ 이므로 $r_6=1$

$a_7=a_6^2+1$ 이므로 $r_7=2$

$a_8=a_7^2+1$ 이므로 $r_8=5$

$a_9=a_8^2+1$이므로 $r_9=26$

$a_{10}=a_9^2+1$이므로 $r_{10}=0$

$\vdots$ $\vdots$

1	2	5	26	0	1	2	5	26	0
					1				
			26	0	1	2	5		
					1				
				0	1	2			

그러므로 어두운 부분에 채워진 수들의 합은 39