2005학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'나'형

성명	

수험번호							

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $(\log_{\sqrt{6}} 2)(\log_6 4)+(\log_{\sqrt{6}} 3)(\log_6 9)+(\log_{\sqrt{6}} 4)(\log_6 9)$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

2. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=0.8$, $\mathrm{P}(\mathrm{A})=0.3$, $\mathrm{P}(\mathrm{B})=0.4$일 때, $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$의 값은?
(단, $\mathrm{P}(\mathrm{X})$는 사건 X가 일어날 확률이다.) [2점]

① 0.3 ② 0.4 ③ 0.5 ④ 0.6 ⑤ 0.7

3. 서로 다른 두 수x, y에 대하여 다음 두 수열이 모두 등차수열을 이룬다.

Ⅰ) x, a, b, y	Ⅱ) x, c, d, e, y

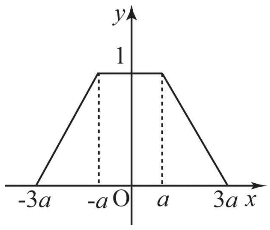
이때, $\dfrac{a-b}{c-e}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

4. 수열 $\left\{\dfrac{\log n}{\log 2n}\right\}$의 극한값을 α, 수열 $\left\{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$의 극한값을 β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

5. 구간 $[-3a, 3a]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 확률 $\mathrm{P}(|X| \leq \frac{1}{2})$의 값은? (단, $f(a) = f(-a) = 1$) [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

6. 이차정사각행렬 A, B, C 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은 ? (단, O 는 영행렬이고 E 는 단위행렬이다.) [3점]

<보기>

ㄱ. $A^2B = E$ 이면 $ABA = E$이다.
ㄴ. $A+B+C = E$ 이면 $AB-BA = AC-CA$ 이다.
ㄷ. $A^3+A+E = O$ 일 때, A 의 역행렬은 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

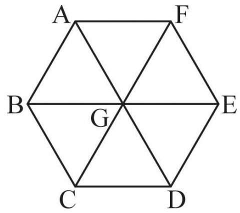
7. $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{n+1}$ 의 전개식에서 $\frac{1}{x^{n-7}}$ 의 계수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} \frac{1}{a_n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{16}$ ④ $\frac{30}{7}$ ⑤ $\frac{30}{13}$

8. 일반항이 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ 인 두 수열 $\{S_n\}$, $\{T_n\}$ 에 대하여 이차방정식 $x^2 - S_n x + T_n = 0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)$ 의 값은? [3점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

9. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 6개로 이루어진 정육각형 모양의 도형이 있다. 동전을 던져 앞면이 나오면 정삼각형의 변을 따라 1만큼씩 움직이고, 뒷면이 나오면 움직이지 않는다. 갑과 을이 각각 동전을 한번씩 던지고 난 후에 갑은 점 A에서, 을은 점 F에서 출발하여 움직였을 때, 두 사람 사이의 거리가 1이 될 확률은? (단, 두 점 A, F에서 각 변을 따라 움직일 확률은 모두 $\frac{1}{3}$이다.) [4점]



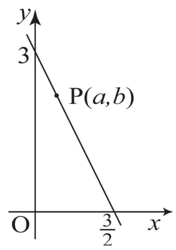
① $\frac{7}{18}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ $\frac{5}{9}$　　④ $\frac{11}{18}$　　⑤ $\frac{13}{18}$

10. 어떤 회사는 20명의 사원을 6시간씩 3개조로 나누어 근무시간표를 운영하고 있다. A조는 오전10시부터 오후4시까지, B조는 오후 2시부터 오후 8시까지, C조는 오후 5시부터 오후 11시까지 근무한다. 오후 2시부터 오후 3시까지는 12명의 사원을, 오후 6시부터 오후 8시까지는 15명의 사원이 근무하도록 조를 편성하려고 한다. A조의 인원수를 x명, B 조의 인원수를 y명, C조의 인원수를 z명으로 놓고 행렬$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$를 만들어서 $MX=\begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$의 꼴로 나타내었을 때, 행렬 M은? [3점]

① $\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}$　　② $\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 1&1&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix}$　　③ $\begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 1&1&1 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&1&0 \\ 1&1&1 \end{pmatrix}$　　⑤ $\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 0&1&1 \\ 1&0&1 \end{pmatrix}$

11. 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,3)$과 $\left(\frac{3}{2},0\right)$을 지나는 직선 l이 있다. 이 직선 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 할 때, 9^a+3^b의 최솟값은? [3점]



① $3\sqrt{2}$　　② $3\sqrt{3}$　　③ $4\sqrt{2}$

④ $6\sqrt{2}$　　⑤ $6\sqrt{3}$

12. $\frac{2^{500}}{A}$을 10^n (n은 음의 정수)의 꼴로 나타낼 수 있을 때, 자연수 A의 최고자리 숫자는?
(단, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$) [3점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

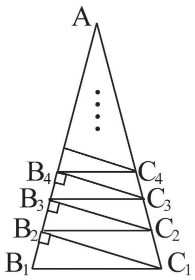
13. 행렬 $N=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 과 단위행렬 E에 대하여 $N^2-3N+2E=O$이 성립한다. 행렬 $N^{2005}+N-2E$는? (단, O는 영행렬이다.) [4점]

① $\begin{pmatrix} 2^{2005} & 2^{2005} \\ 2^{2005} & 2^{2005} \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2^{2005} & 2^{2005} \\ 2^{2006} & 2^{2006} \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2^{2006} & 2^{2006} \\ -2^{2005} & -2^{2005} \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 2^{2006} & 2^{2006} \\ 2^{2005} & 2^{2005} \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 2^{2005} & 2^{2005} \\ -2^{2006} & -2^{2006} \end{pmatrix}$

14. $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=10$ 인 이등변삼각형 AB_1C_1이 있다. 오른쪽 그림과 같이 점 C_1에서 변 AB_1에 내린 수선의 발을 B_2, 점 B_2에서 변 B_1C_1과 평행한 분을 그어 변 AC_1과 만나는 점을 C_2라 한다. 이와 같은 방법으로 변 AB_1과 변 AC_1위에 점을 잡아서 각 점을 $B_3, C_3, B_4, C_4, \cdots$ 라 하자. $\overline{B_1B_2}$의 길이가 $\overline{B_1C_1}$의 길이의 $\frac{1}{4}$일 때, $\sum_{k=1}^{\infty}\overline{B_kC_k}$의 값은? [3점]



① 40 ② 35 ③ 30 ④ 25 ⑤ 20

15. 다음은 $a_0=\frac{\pi}{2},\ a_1=1,\ a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{2n+1} \leqq \frac{I}{\sqrt{n}} \leqq a_{2n-2} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

가 성립할 때, I의 값을 구하는 과정이다.

Ⅰ) 자연수 n에 대하여 $na_na_{n-1}=\frac{\pi}{2}$임을 수학적 귀납법으로 증명하면

ⅰ) $n=1$일 때, $a_1 \cdot a_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때,

$(k+1)a_{k+1}a_k=(k+1)\boxed{\quad(가)\quad}a_k=\frac{\pi}{2}$

이므로 성립한다.

Ⅱ) 수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열임을 수학적 귀납법으로 증명하면

… 중략 …

따라서 $a_n \geqq a_{n+1}\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$이다.

조건에서 $a_{2n+1} \leqq \frac{I}{\sqrt{n}} \leqq a_{2n-2}$이고

수열 $\{a_n\}$이 감소하는 수열이므로

$na_{2n+2}a_{2n+1} \leqq \boxed{\quad(나)\quad} \leqq na_{2n-2}a_{2n-3}$

임을 유추할 수 있다.

그러므로 Ⅰ)에 의해서 2이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{n\pi}{2(2n+2)} \leqq \boxed{\quad(나)\quad} \leqq \frac{n\pi}{2(2n-2)}$

따라서 $I=\boxed{\quad(다)\quad}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{k}{k+1}a_{k-1}$	I	$\frac{\pi}{2}$
②	$\frac{k+1}{k}a_{k-1}$	I	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
③	$\frac{k}{k+1}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\pi}{4}$
④	$\frac{k+1}{k}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\pi}{4}$
⑤	$\frac{k}{k+1}a_{k-1}$	I^2	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

16. 다음은 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 p, q 라 할 때, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 이면 $\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q} \leq 1$ 임을 증명한 것이다.

<증명>

$pq=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로

$$\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q}=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{pq}$$

$$=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{\boxed{\text{(가)}}} \quad \cdots \text{㉠}$$

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 를 $p:q$ 로 내분하는 점을 $\mathrm{R}(x_0, y_0)$ 라 하면

$x_0=\boxed{\text{(나)}}$,

$$y_0=\frac{q\log_2 p+p\log_2 q}{p+q} \quad \cdots \text{㉡}$$

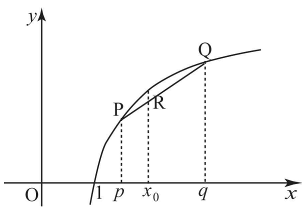
그런데 곡선 $y=\log_2 x$는

$\boxed{\text{(다)}}$ 이므로

$y_0 \leq \log_2 x_0$ 이다.

따라서 ㉠, ㉡ 에서

$\frac{\log_2 p}{p}+\frac{\log_2 q}{q} \leq 1$



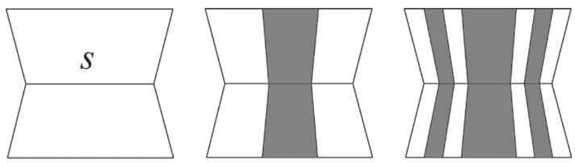
위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$p+q$	2	위로 볼록
②	$-p-q$	3	위로 볼록
③	$p+q$	3	위로 볼록
④	$-p-q$	2	아래로 볼록
⑤	$p+q$	3	아래로 볼록

17. 첫째항이 2004인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n=1+\sum_{k=1}^{n} a_k$ 로 정의되는 수열 $\{b_n\}$도 등비수열일 때, b_2 의 값은? [3점]

① 2004^2 ② $2004 \cdot 2005$ ③ 2005^2
④ $1+2004^2$ ⑤ $1+2005^2$

18. 아래 그림과 같이 세 변이 모두 평행하고 넓이가 S인 도형이 있다. 이 도형의 평행한 세 변을 각각 3등분하여 대응하는 점끼리 연결시킨 후, 세 부분으로 나뉘어진 도형의 가운데 부분을 색칠한다. 다시, 색칠이 안 된 도형의 평행한 세 변을 각각 3등분하여 대응하는 점끼리 연결시킨 후, 각각 세 부분으로 나뉘어진 도형의 가운데 부분들을 색칠한다.

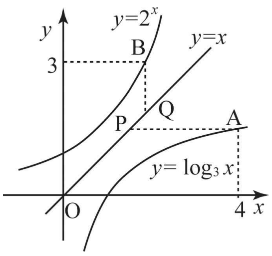


<첫번째> <두번째>

위와 같은 과정을 계속할 때, 10번째까지 색칠한 부분의 넓이의 합은? [4점]

① $\frac{S}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$ ② $\frac{S}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$ ③ $\frac{S}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$
④ $\frac{S}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$ ⑤ $S\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

19. 오른쪽 그림은 직선 $y=x$ 와 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_3 x$ 의 그래프이다. x 좌표가 4 인 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점 A 에서 y 축에 내린 수선이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 P 라 하고, y 좌표가 3 인 곡선 $y=2^x$ 위의 점 B 에서 x 축에 내린 수선이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 Q 라 한다. 이때, $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}$ 의 값은? (단, O 는 원점) [4점]



① 4　② 5　③ 6　④ $4\sqrt{3}$　⑤ $6\sqrt{2}$

20. 아래 그림과 같이, 10×10 체스판에 가로줄로는 공차가 2 인 등차수열을 이루고, 세로줄로는 공차가 3 인 등차수열을 이루도록 수를 배열하였다. 이 때, 색칠한 10 개의 칸에 쓰여지는 수들의 합은 ? [3점]

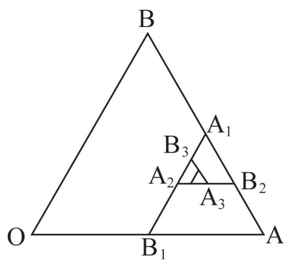
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
4	6	8	10						
7	9	11							
10	12								
13									

① 233　② 235　③ 237　④ 240　⑤ 242

21. 두 개의 주머니 A, B가 있다. A주머니에는 흰 공 1 개와 검은 공 1 개가 들어 있고 B 주머니에는 검은 공 2 개가 들어 있다. A 주머니에 있는 공을 1 개 꺼내어 B 주머니에 넣은 후, 다시 B 주머니에서 공을 1 개 꺼내어 A 주머니에 넣는 과정을 1 번의 시행이라 하자. 이와 같은 시행을 4 번 반복하였을 때, A 주머니에 흰 공이 들어 있을 확률은 ? [4점]

① $\frac{83}{162}$　② $\frac{41}{81}$　③ $\frac{14}{27}$　④ $\frac{33}{64}$　⑤ $\frac{9}{16}$

22. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 12 인 정삼각형 OAB 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 중점을 각각 A_1, B_1 이라 한다. 또 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$, $\overline{\mathrm{AA_1}}$ 의 중점을 각각 A_2, B_2 라 하고, $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$, $\overline{\mathrm{A_1A_2}}$ 의 중점을 각각 A_3, B_3 이라 한다. 이와 같이 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$, $\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}$ 의 중점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1} 로 정하는 과정을 한없이 계속할 때, $\lim_{n\to\infty}\tan(\angle \mathrm{AOA_n})$ 의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{5}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{5}$

23. 광도(물체의 밝기)가 B_0 인 물체를 r(km)의 거리에서 바라볼 때의 물체의 광도가 B이면 대기혼탁도 n(네불/km)은

$$\log B = \log B_0 - 0.03nr$$

의 관계를 만족한다. 예를 들어, 대기혼탁도가 1네불/km인 대기에서 1km 떨어진 물체를 바라보면 $\frac{B}{B_0} = 10^{-0.03} = 0.9333$ 이므로 물체의 밝기 B 는 본래 밝기 B_0 의 93.33%로 줄어든다. 대기혼탁도가 1네불/km인 대기에서 500 m 떨어진 어떤 물체를 바라보면, 이 물체의 밝기는 본래 밝기의 몇 % 정도로 줄어드는가?

[4점]

상용로그표

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863

① 95.5% ② 95.8% ③ 96.2%
④ 96.6% ⑤ 96.9%

24. 지난달에 시행된 2005 학년도 모의 대학수학능력시험에서는 수험생의 상위 15.9 % 가 도심근교의 대학에 합격할 것으로 나타났다. 이 시험에 응시한 전체 수험생의 점수는 평균이 520 점이고 표준편차가 90 점인 정규분포를 이루었고, 수험생이 3000 명 거주하고 있는 K 지역 수험생들의 점수는 평균이 580점이고 표준편차가 20점인 정규분포를 이루었다. K지역의 수험생 중 도심 근교의 대학에 합격할 것으로 나타난 인원수는 ? (단, 대학이나 학과는 고려하지 않는다.) [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.192
1	0.341
1.5	0.353
2	0.477

① 441 명 ② 430 명 ③ 419 명
④ 408 명 ⑤ 392 명

25. 두 이차정사각행렬

$$A = \begin{pmatrix} 23 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -23 \end{pmatrix}$$

에 대하여 행렬 $A^2B + B^{-1}AB$ 의 모든 성분의 합을 구하시오.

[3점]

26. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 에서 제1 행에는 a_1 을 n 개, 제2 행에는 a_2 를 $n-1$ 개, 제3 행에는 a_3 을 $n-2$ 개, $\cdots$, 제n 행에는 a_n 을 1개 나열한 것이다.

(제1행) $a_1 \ a_1 \ a_1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ a_1$
(제2행) $a_2 \ a_2 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ a_2$
(제3행) $a_3 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ a_3$
$\vdots$
(제n행) a_n

제1 행부터 제n 행까지의 모든 항들의 합이 $\frac{n(n+1)(n+5)}{6}$ 일 때, $a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{30}$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. A 고등학교의 학생비율은 1,2 학년이 각각 40 % 이고 3 학년은 20 % 이다. 이 학생들에게 사관학교에 진학할 의향이 있는지를 조사하였더니 1 학년은 30%, 2 학년은 10%, 3 학년은 15%가 졸업 후 사관학교에 진학하기를 희망한다고 답하였다. 사관학교에 진학하기를 희망하는 학생 중 1 명을 택하였을 때, 그 학생이 1 학년이거나 2 학년 학생일 확률은 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, m 과 n 은 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 컴퓨터에 중요한 자료를 넣어 두고 다른 사람이 보는 것을 방지하기 위하여 1부터 9까지 9개의 자연수에서 서로 다른 세 개의 수를 뽑아 세 자리 정수의 비밀번호를 설정하려고 한다. 비밀번호는 소수가 두 개 이상 포함되도록 하여 가장 큰 정수부터 차례로 나열할 때 61번째의 수이다. 이 비밀번호를 구하시오. [3점]

29. 이산확률변수 X 는 이항분포 $B(120, \frac{1}{121})$ 을 따른다.

함수 $f(x)=\sum_{k=0}^{120}(x-ak)^2P(X=k)$ 의 최솟값이 1 이 되도록 하는 양수 a 에 대하여 $120a$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 아래 그림은 제1 행에는 (1 1)을 놓고 제2 행부터는 바로 위 행의 이웃한 두 수 사이에 두 수의 차를 추가하여 수를 배열한 것이다. 즉, 제2 행은 제1 행의 (1 1)사이에 1과 1의 차인 0을 추가한 것이고, 제3 행은 제2 행의 (1 0 1) 의 이웃한 두 수 1과 0 사이에는 1과 0의 차인 1을, 0과 1사이에는 0 과 1의 차인 1을 추가하여 수를 배열한 것이다. 이와 같은 과정을 반복하여 수를 배열할 때 제10행에 나타나는 1의 개수를 구하시오. [4점]

(제1행)	1																1
(제2행)	1								0								1
(제3행)	1				1				0				1				1
(제4행)	1		0		1		1		0		1		1		0		1
(제5행)	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
	⋮								⋮								⋮

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2005년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ②

준식) $=4(\log_6 2)^2+4(\log_6 3)^2+8(\log_6 2)(\log_6 3)$

$=4(\log_6 2+\log_6 3)^2=4$

2) ④

$P(A)=0.3,\ P(B)=0.4,\ P(B\mid A)=0.8$ 에서

$P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=0.8 \quad \therefore\ P(A\cap B)=0.24$

$P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.24}{0.4}=0.6$

3) ③

Ⅰ) $x,\ a,\ b,\ y$ 가 등차수열을 이루므로

$a-x=b-a=y-b \quad \therefore\ x=2a-b\ ,\ y=2b-a$

Ⅱ) $x,\ c,\ d,\ e,\ y$ 가 등차수열을 이루므로

$c-e=x-d=d-y$

$2(c-e)=x-y=(2a-b)-(2b-a)=3(a-b)$

$\therefore\ \dfrac{a-b}{c-e}=\dfrac{2}{3}$

4) ①

ⅰ) 수열$\left\{\dfrac{\log n}{\log 2n}\right\}$ 의 극한은

$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{\log 2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{\log 2+\log n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\log 2}{\log n}+1}=\dfrac{1}{0+1}=1$ ($\because\ \lim\limits_{n\to\infty}log\,n=\infty$)

ⅱ) 수열$\left\{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$ 의 극한은

$\beta=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=(1+0)^0=1$

$\therefore\ \alpha+\beta=2$

5) ⑤

구간$[-3a,\ 3a]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도 함수 $f(x)$는 이 구간에서 함수$f(x)$와 둘러싸인 도형의 넓이가 1 이 되어야 하므로

$\dfrac{1}{2}\times(2a+6a)\times 1=1 \quad \therefore\ a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore P(|X|\le\dfrac{1}{2})=1-2\times P(\dfrac{1}{2}\le X\le\dfrac{3}{4})$

$=1-2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{8}$

6) ④

ㄱ. $A^2B=A(AB)=E$ 이므로 $A^{-1}=AB$ 이다.

$\therefore\ ABA=A^{-1}A=E$ (참)

ㄴ. $A+B+C=E$ 에서 $B=E-A-C$ 이므로

$AB-BA=A(E-A-C)-(E-A-C)A$

$=A-A^2-AC-A+A^2+CA$

$=CA-AC$ (거짓)

ㄷ. $A^3+A+E=O \iff -A(A^2+E)=E$

$\therefore\ A^{-1}=-A^2-E$ 존재 (참)

7) ④

$\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)^{n+1}$ 의 전개식의 일반항은

${}_{n+1}C_r\,(x^3)^{n+1-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$

$={}_{n+1}C_r\,x^{3n-4r+3}$

$\dfrac{1}{x^{n-7}}$ 항의 계수는

$3n-4r+3=7-n$

$\therefore r=n-1$ 일 때 이므로

$\therefore a_n={}_{n+1}C_{n-1}=\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{15}\dfrac{1}{a_n}=2\times\sum\limits_{n=1}^{15}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\times\left(1-\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{15}{8}$

8) ⑤

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$

이차방정식 $x^2-S_nx+T_n=0$ 의 두 근이 $\alpha_n,\ \beta_n$ 이므로

근과 계수와의 관계에서

$\alpha_n+\beta_n=S_n\ ,\ \alpha_n\beta_n=T_n$

$\alpha_n^2+\beta_n^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-2\alpha_n\beta_n=S_n{}^2-2T_n$

$=\left\{2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2-2\times\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=2-4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+2\times\dfrac{1}{n+1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)=2$

9) ④

갑과 을이 각각 동전을 던지면 경우의 수는

$\{(T,T),\ (H,T),\ (T,H),\ (H,H)\}$

ⅰ) (T,T) 일 때,

갑과 을의 위치가 A, F 이고 거리가 1 이므로

$\therefore\ p_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

ⅱ) (H,T) 일 때,

을의 위치는F 이고 을의 위치는G 가 되어야 거리가 1 이므로

$\therefore\ p_2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

ⅲ) (T,H) 일 때,

갑의 위치는 A 이고 을의 위치는 G 가 되어야 거리가 1 이므로

$\therefore\ p_3=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

ⅳ) (H,H) 일 때,

① 갑의 위치가 B 이면 을의 위치는 A 또는 G 가 되어야 거리가 1 이고

② 갑의 위치가 G 이면 을의 위치는 A 또는 E 가 되어야 거리가 1 이고

③ 갑의 위치가 F 이면 을의 위치는 A 또는 G 또는 E 가 되어야 거리가 1 이고

$\therefore\ p_4=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times 7=\dfrac{7}{36}$

그러므로 구하고자하는 확률 p 는

$p=p_1+p_2+p_3+p_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{7}{36}=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

10) ②

ⅰ) 전체 사원이 20 명이고, A 조의 인원수가 x명, B 조의 인원수가 y명, C 조의 인원수가 z명이므로

$x+y+z=20$ …… ①

ⅱ) 오후 2 시부터 3 시까지 12 명의 사원이 근무하므로 A 조의 사원과 B 조의 사원이 같은 시간에 근무하므로

$x+y=12$ …… ②

ⅲ) 오후 6 시부터 8 시까지 15 명의 사원이 근무하므로 B 조의 사원과 C 조의 사원이 같은 시간에 근무하므로

$y+z=15$ …… ③

①, ②, ③의 관계를 행렬을 사용하여 나타내면

$\therefore \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\12\\15\end{pmatrix}$

11) ⑤

직선의 방정식은 $y=-2x+3$ 이고 점 $\mathrm{P}(a, b)$ 가 직선 위의 임의의 점이므로 $b=-2a+3$ 이다.

$\therefore\ 9^a+3^b=3^{2a}+3^{-2a+3}\geqq 2\times\sqrt{3^{2a}\times3^{-2a+3}}=6\sqrt{3}$

12) ③

$\frac{2^{500}}{\mathrm{A}}$ 을 10^n (n 은 음의 정수)의 꼴로 나타낼려면

$\mathrm{A}=2^{500}\times10^{\mathrm{m}}$ (m 은 양의 정수)꼴이어야 하므로

A 의 최고자리의 숫자는 2^{500} 의 최고자리의 수와 같다.

$\log_{10}2^{500}=500\log_{10}2=500\times0.3010=150+0.5000$

그러므로 $\log_{10}2^{500}$ 의 가수가 0.5 는

$\log_{10}3=0.4771<0.5000<0.6020=\log_{10}4$ 이다.

$\log_{10}3\times10^{150}<\log_{10}2^{500}<\log_{10}4\times10^{150}$

$\therefore\ 3\times10^{150}<2^{500}<4\times10^{150}$ 이므로

그러므로 최고자리 숫자는 3

13) ③

$\mathrm{N}^{2005}+\mathrm{N}-2\mathrm{E}$ 을 $\mathrm{N}^2-3\mathrm{N}+2\mathrm{E}$ 로 나눈 나머지는

$x^{2005}+x-2=(x^2-3x+2)\mathrm{Q}(\mathrm{x})+\mathrm{ax}+\mathrm{b}$

$=(x-1)(x-2)\mathrm{Q}(\mathrm{x})+\mathrm{ax}+\mathrm{b}$

ⅰ) $x=1$ 을 대입하면 $a+b=0$ …… ①

ⅱ) $x=2$ 을 대입하면 $2a+b=2^{2005}$ …… ②

①, ②에서

$a=2^{2005},\ b=-2^{2005}$ 이므로 나머지는 $2^{2005}(x-1)$ 이므로

즉, $2^{2005}(\mathrm{N}-\mathrm{E})$ 이다.

$\therefore \mathrm{N}^{2005}+\mathrm{N}-2\mathrm{E}=(\mathrm{N}^2-3\mathrm{N}+2\mathrm{E})\mathrm{M}+2^{2005}(\mathrm{N}-\mathrm{E})$

$=2^{2005}(\mathrm{N}-\mathrm{E})$

$=2^{2005}\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{2006}&2^{2006}\\-2^{2005}&-2^{2005}\end{pmatrix}$

14) ①

$\overline{\mathrm{AB}_1}=\overline{\mathrm{AC}_1}=10$ 이고, $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}$ 이므로

삼각형의 닮음비에서

$\overline{B_kB_{k+1}}=\frac{1}{4}\overline{B_kC_k}$

$\therefore\ \overline{B_kC_k}=4\overline{B_kB_{k+1}}$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}\overline{B_kC_k}=4\sum_{k=1}^{\infty}\overline{B_kB_{k+1}}=4\overline{AB_1}=40$

15) ⑤

Ⅰ) 자연수 n 에 대하여 $na_na_{n-1}=\frac{\pi}{2}$ 임을 수학적귀납법으로 증명하면

ⅰ) $n=1$ 일 때, $a_1\cdot a_0=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$ 일 때, 성립한다고 가정하면

$ka_ka_{k-1}=\frac{\pi}{2}$ ……… ①이 성립한다.

$n=k+1$ 일 때,

$a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$ 에서 $a_{k+1}=\frac{k}{k+1}a_{k-1}$ 이므로

$(k+1)a_{k+1}a_k=(k+1)\times\left[\frac{k}{k+1}a_{k-1}\right]\times a_k=ka_ka_{k-1}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ (k+1)a_{k+1}a_k=\frac{\pi}{2}$

그러므로 $n=k+1$ 일 때도 성립하므로

자연수 n 에 대하여 $na_na_{n-1}=\frac{\pi}{2}$ 이 성립한다.

Ⅱ) 수열$\{a_n\}$ 이 감소하는 수열임을 수학적 귀납법으로 증명하면

…중략…

따라서, $a_n\geqq a_{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이다.

조건에서 $a_{2n+1}\leqq\frac{\mathrm{I}}{\sqrt{n}}\leqq a_{2n-2}$ 이고 수열$\{a_n\}$ 이 감소하는 수열이므로

$na_{2n+2}a_{2n+1}\leqq[\mathrm{I}^2]\leqq \mathrm{n}\,\mathrm{a}_{2\mathrm{n}-2}\mathrm{a}_{2\mathrm{n}-3}$ 임을 유추할 수 있다.

그러므로 Ⅰ)에 의해서2이상의 모든 자연수n 에 대하여

$\frac{n\pi}{2(2n+2)}\leqq[\mathrm{I}^2]\leqq\frac{\mathrm{n}\pi}{2(2\mathrm{n}-2)}$

따라서, $\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{2(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{2(2n-2)}=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}^2=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\ \mathrm{I}=\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$ 이다.

16) ①

$pq=[p+q]$ 이므로

$\frac{\log_2p}{p}+\frac{\log_2q}{q}=\frac{q\log_2p+p\log_2q}{pq}$ …… ㉠

$=\frac{q\log_2p+p\log_2q}{[p+q]}$

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 를 $p:q$ 로 내분하는 점을 $\mathrm{R}(\mathrm{x}_0,\ \mathrm{y}_0)$ 라 하면

$x_0=\frac{pq+qp}{p+q}=\frac{2pq}{p+q}=[2]$,

$y_0=\frac{q\log_2p+p\log_2q}{p+q}$ …… ㉡

그런데 곡선$y=\log_2x$는 [위로 볼록] 이므로

$y_0\leqq\log_2x_0$ 이다.

따라서 ㉠, ㉡에서 $\frac{\log_2p}{p}+\frac{\log_2q}{q}\leqq1$

17) ③

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 두면 $a_n=2004\cdot r^{n-1}$ 이고

$\therefore b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$

$= 1 + \dfrac{2004(r^n - 1)}{r-1} = \dfrac{r-2005}{r-1} + \dfrac{2004r}{r-1} \times r^{n-1}$

수열$\{b_n\}$ 도 등비수열이므로

$\dfrac{r-2005}{r-1} = 0 \quad \therefore \ r = 2005$ 이다.

$\therefore \ b_n = \dfrac{2004 \times 2005}{2005-1} \times (2005)^{n-1} = 2005^n$

$\therefore \ b_2 = 2005^2$

18) ⑤

n 번째 후의 색칠한 부분의 넓이를 S_n 이라 두면

$S_1 = \dfrac{1}{3}S$

$S_2 = \dfrac{1}{3}S + 2 \times \dfrac{1}{3}S \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}S + \dfrac{1}{3}S \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}S \times \left(1 + \dfrac{2}{3}\right)$

$S_3 = \dfrac{1}{3}S + \dfrac{1}{3}S \times \dfrac{2}{3} + 4 \times \dfrac{1}{9}S \times \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{1}{3}S + \dfrac{1}{3}S \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}S \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{3}S \times \left\{1 + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}$

그러므로,

$\therefore S_{10} = \dfrac{1}{3}S \times \left\{1 + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^9\right\}$

$= \dfrac{1}{3}S \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \dfrac{2}{3}} = S\left\{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

19) ①

주어진 그래프에서

$A(4,\ \log_3 4)$ 이므로 $P(2\log_3 2,\ 2\log_3 2)$ 이다.

$\overline{OP} = \sqrt{(2\log_3 2)^2 + (2\log_3 2)^2} = 2\sqrt{2}\, log_3 2$

$B(\log_2 3,\ 3)$ 이므로 $Q(\log_2 3,\ \log_2 3)$ 이다.

$\overline{OQ} = \sqrt{(\log_2 3)^2 + (\log_2 3)^2} = \sqrt{2}\, log_2 3$

$\therefore \ \overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 2\sqrt{2}\log_3 2 \times \sqrt{2}\log_2 3 = 4$

20) ②

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
4	6	8	10						22
7	9	11							
10	12								
13									

↙ 방향으로는 공차가 1 인 등차수열이므로

i) 17의 ↙방향으로 5개의 수는 공차가 2인 등차수열

합$= \dfrac{5\{17 \times 2 + 4 \times 2\}}{2} = 105$

ii) 22 의 ↙방향으로 5개의 수는 공차가 2인 등차수열

합$= \dfrac{5\{22 \times 2 + 4 \times 2\}}{2} = 130$

그러므로 10개 칸에 쓰여진 수들의 합은 235

21) ④

한 번 시행에서 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률을 p_1 이라 두면

$p_1 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ 이다.

n번 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률을 p_n 이라

두면 $(n+1)$ 번 시행 후 주머니A에 흰 공이 들어 있을 확률 p_{n+1}은

$p_{n+1} = p_n \times \dfrac{2}{3} + (1 - p_n) \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \ \left(p_{n+1} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(p_n - \dfrac{1}{2}\right)$ 이므로

수열$\left\{p_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ 은 첫째항은 $p_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$ 이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$p_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow p_n = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$

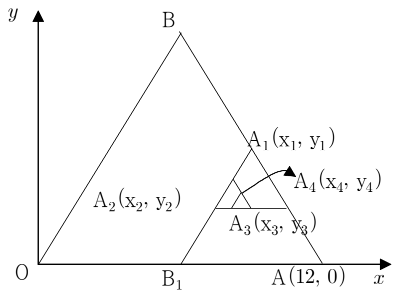
$\therefore \ p_4 = \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{41}{81}$

22) ③

$A_n(x_n,\ y_n)$ 이라 두면

$\lim_{n\to\infty} \tan(\angle AOA_n) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{x_n}$ 이므로

아래 그림에서



삼각형의 한 변의 길이를 $a = 12$ 라 두면

i) $\therefore \lim_{n\to\infty} x_n$

$= a - \dfrac{1}{2}a \times \cos\dfrac{\pi}{3} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 a \times \cos\dfrac{\pi}{3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times a$

$- \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 a \times \cos\dfrac{\pi}{3} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 a \times \cos\dfrac{\pi}{3} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \times a + \cdots$

$= a \times \left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right\}$

$- \left(\dfrac{1}{2}\right) a \times \cos\dfrac{\pi}{3} \times \left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right\}$

$- \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 a \times \cos\dfrac{\pi}{3} \times \left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right\}$

$= a \times \left(1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8}\right) \times \left\{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots\right\}$

$= a \times \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^3} = \dfrac{5}{7}a$

ii) $\therefore \lim_{n\to\infty} y_n$

$$=0+\frac{1}{2}a\times\sin\frac{\pi}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2 a\times\sin\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^4 a\times\sin\frac{\pi}{3}$$
$$-\left(\frac{1}{2}\right)^5 a\times\sin\frac{\pi}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^7 a\times\sin\frac{\pi}{3}+\cdots$$
$$=a\times\sin\frac{\pi}{3}\times\left[\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\right\}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdots\right\}\right]$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\left\{\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{7}a$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}tan(\angle \mathrm{AOA_n})=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{7}a}{\frac{5}{7}a}=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

23) ④

주어진 식 $\log B=\log B_0-0.03nr$ 에 $n=1,\ r=0.5$ 을 대입하면

$\log\frac{B}{B_0}=-0.015 \Leftrightarrow \frac{B}{B_0}=10^{-0.015}$

$\log 10^{-0.015}=-0.015=-1+0.9850$

지표는 -1, 가수는 0.9850 이고

주어진 상용로그표에서 $\log 9.66=0.9850$ 이므로

$\therefore\ \frac{B}{B_0}=10^{-0.015}=0.996$

$\therefore$ $B=0.996B_0$ 이므로 96.6% 정도로 줄어든다.

24) ①

i) 전체 수험생의 점수X 는 정규분포N(520, 90)을 따르고 수험생의 상위15.9%가 도심근교의 대학에 합격할 것으로 나타났으므로 상위 15.9%에 들어가려면 점수X 가 k 점 이상일 확률 $P(X\geq k)=0.159$ 이다.

$0.5-P(0\leq Z\leq\frac{k-520}{90})=0.159$

$\therefore P(0\leq Z\leq\frac{k-520}{90})=0.341$

$\frac{k-520}{90}=1\quad\therefore\ k=610$ (점)

ii) K 지역 수험생 3000명의 점수 Y 는 정규분포 N(580, 20)을 따르므로

$P(Y\geq 610)=P(Z\geq\frac{610-580}{20})=P(Z\geq 1.5)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 1.5)=0.5-0.353=0.147$

$\therefore$ $3000\times 0.147=441$ 명

25) 42

$A=\begin{pmatrix}23&-1\\-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-23\end{pmatrix}$ 에서

$AB=\begin{pmatrix}23&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}23&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ 이므로

$A^2B+B^{-1}AB=(A+B^{-1})AB=A+B^{-1}=\begin{pmatrix}46&-2\\-2&0\end{pmatrix}$

$\therefore$ 모든 성분의 합은 42

26) 265

제1행부터 제n행까지의 모든 항의 합을 S_n 이라 두면

$S_n=na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots\ +2a_{n-1}+a_n$

$S_{n-1}=(n-1)a_1+(n-2)a_2+(n-3)a_3+\cdots+a_{n-1}$

$T_n=S_n-S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 이다.

$T_n=\frac{n(n+1)(n+5)}{6}-\frac{(n-1)n(n+4)}{6}=\frac{n(n+3)}{2}$

$\therefore a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}=T_{30}-T_{20}$

$=\frac{30(30+3)}{2}-\frac{20(20+3)}{2}=265$

27) 35

	1학년	2학년	3학년
A고등학교 학생비율	40%	40%	20%
사관학교 진학을 희망하는 학생비율	30%	10%	15%

전체 학생 중 1명을 택할 때, 사관학교에 진학하기를 희망하는 학생이 택하여 지는 사건을 E, 1학년 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B, 3학년 학생인 사건을 C라 두면 조건부확률에서

$$\therefore P=\frac{P(A\cap E)+P(B\cap E)}{P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)}$$
$$=\frac{\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{10}{100}}{\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{10}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{15}{100}}=\frac{16}{19}$$

$\therefore\ m+n=19+16=35$

28) 675

1부터 9까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7 이고 비밀번호는 소수가 두 개 이상 포함되어야 하므로 가장 큰 수부터 생각하면

i) 9□□ $\Rightarrow\ {}_4P_2=12$ (개)

ii) 8□□ $\Rightarrow\ {}_4P_2=12$ (개)

iii) 7□□

소수 2개 포함 $\Rightarrow {}_3C_1\times{}_5C_1\times 2!=30$ (개)

소수 3개 포함 $\Rightarrow\ {}_3P_2=6$ (개)

i), ii), iii) 까지 60 개이므로

61 번째의 수는 백의 자리의 숫자가 6이고 소수를 두 개 포함하는 가장 큰 수이므로

$\therefore$ 675

29) 121

X 가 이항분포 $B\left(120,\frac{1}{121}\right)$ 을 따르므로

$m=E(X)=\sum_{k=0}^{120}k\cdot P(X=k)=120\times\frac{1}{121}=\frac{120}{121}$

$V(X)=\sum_{k=0}^{120}k^2P(X=k)-m^2=120\times\frac{1}{121}\times\frac{120}{121}=\frac{120^2}{121^2}$

$f(x)=\sum_{k=0}^{120}(x^2-2axk+a^2k^2)P(X=k)$

$=x^2-2ax\sum_{k=0}^{120}k\cdot P(X=k)+a^2\sum_{k=0}^{120}k^2\cdot P(X=k)$

$=x^2-2amx+a^2\sum_{k=0}^{120}k^2\cdot P(X=k)$

$=(x-am)^2+a^2\left(\sum_{k=0}^{120}k^2\cdot P(X=k)-m^2\right)$

$=(x-am)^2+\frac{120^2}{121^2}a^2$

함수 $f(x)$는 $x=am$ 일 때, 최솟값 $\dfrac{120^2}{121^2}a^2$ 이다.

$\therefore\ \dfrac{120^2}{121^2}a^2=1$ 에서 $a=\dfrac{121}{120}$ $(a>0)$

$\therefore\ 120a=121$

30) 342

ⅰ) 각 행의 수의 개수로 된 수열은

2 , 3 , 5 , 9 , 17 , $\cdots$ 이고

제 1 계차수열이 1 , 2 , 4 , 8 , $\cdots$ 이므로

제10행의 수의 개수는

$2+\sum_{k=1}^{9}2^{k-1}=2+\dfrac{2^9-1}{2-1}=513$ (개)

ⅱ) 제10행(짝수 행)의 수의 나열은

(1 , 0 , 1) , (1 , 0 , 1) , (1 , 0 , 1) , $\cdots$, (1 , 0 , 1) 이므로

ⅰ), ⅱ)에서

제10행의 1 의 개수는

$\therefore\ 513\times\dfrac{2}{3}=342$ 이다