# 제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | 수험번호 | 1

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

*1.* $(\log_{\sqrt{6}} 2)(\log_6 4)+(\log_{\sqrt{6}} 3)(\log_6 9)+(\log_{\sqrt{6}} 4)(\log_6 9)$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

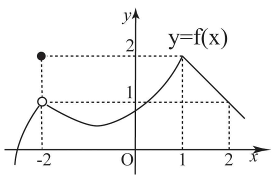
*2.* $\displaystyle\lim_{x\to 2005}\frac{2007(2005-x)}{\sqrt{2006-x}-\sqrt{x-2004}}$ 의 값은? [2점]

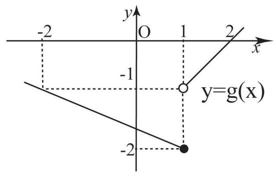
① 2004 ② 2005 ③ 2006 ④ 2007 ⑤ 2008

*3.* 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)=x^2g(x)$ 이고 $g(1)=3$ , $g'(1)=5$ 일 때, 미분계수 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

*4.* 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]




ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\{f(x)+5g(x)\}=-4$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=-4$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

*5.* 세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은 ? (단, $a$, $b$는 상수) [3점]

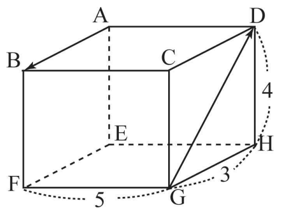
ㄱ. $a \leqq x \leqq b$ 인 모든 $x$ 에 대하여 $f(x) \leqq g(x)$ 이면 $\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ 이다.

ㄴ. $a \leqq x \leqq b$ 인 모든 $x$ 에 대하여 $\int_a^b |f(x)|\, dx \leqq \left| \int_a^b f(x)dx \right|$ 이다.

ㄷ. 임의의 실수 $x$ 에 대하여 $h(-x)=h(x)$ 이고 $\int_0^a h(x)dx=\omega$ 이면 $\int_{-a}^a (x-1)h(x)dx=-2\omega$

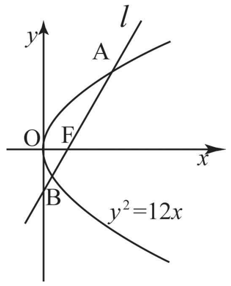
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

*6.* 아래 그림과 같이 각 변의 길이가 3, 4, 5인 직육면체 ABCD−EFGH에서 $\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{GD}$ (단, $0 \leqq k \leqq 1$ )를 만족시키는 점 X가 나타내는 자취의 길이는? [3점]



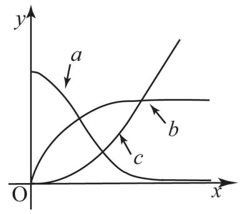

① $\sqrt{34}$ ② $\sqrt{41}$ ③ $2\sqrt{13}$ ④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

*7.* 아래 그림과 같이 포물선 $y^2=12x$ 의 초점 F 를 지나는 직선 $l$ 과 이 포물선이 만나는 두 점을 A, B 라 하자. $\overline{AF}:\overline{BF}=4:1$일 때 직선 $l$ 의 방정식은 $ax+by=12$이다. 이때, 상수 $a$, $b$ 에 대하여 $a-b$ 의 값은? [3점]



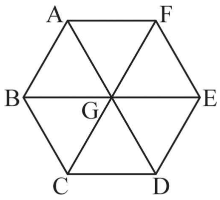

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

*8.* 아래 그림은 실수 전체의 집합에서 정의된 세 함수 $f(x)$, $f'(x)$, $\int_0^x f(t)dt$의 그래프의 일부이다. 각 그래프와 함수가 바르게 대응된 것은? [3점]




| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| ① | $f(x)$ | $f'(x)$ | $\int_0^x f(t)dt$ |
| ② | $f'(x)$ | $f(x)$ | $\int_0^x f(t)dt$ |
| ③ | $f'(x)$ | $\int_0^x f(t)dt$ | $f(x)$ |
| ④ | $\int_0^x f(t)dt$ | $f'(x)$ | $f(x)$ |
| ⑤ | $\int_0^x f(t)dt$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |

9. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 6개로 이루어진 정육각형 모양의 도형이 있다. 동전을 던져 앞면이 나오면 정삼각형의 변을 따라 1만큼씩 움직이고, 뒷면이 나오면 움직이지 않는다. 갑과 을이 각각 동전을 한번씩 던지고 난 후에 갑은 점 A에서, 을은 점 F에서 출발하여 움직였을 때, 두 사람 사이의 거리가 1이 될 확률은? (단, 두 점 A, F에서 각 변을 따라 움직일 확률은 모두 $\frac{1}{3}$이다.) [4점]



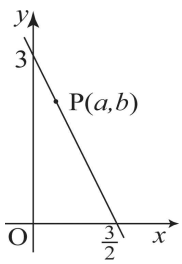

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

10. 어떤 회사는 20명의 사원을 6시간씩 3개조로 나누어 근무시간표를 운영하고 있다. A조는 오전 10시부터 오후 4시까지, B조는 오후 2시부터 오후 8시까지, C조는 오후 5시부터 오후 11시까지 근무한다. 오후 2시부터 오후 3시까지는 12명의 사원을, 오후 6시부터 오후 8시까지는 15명의 사원이 근무하도록 조를 편성하려고 한다. A조의 인원수를 $x$ 명, B 조의 인원수를 $y$ 명, C 조의 인원수를 $z$ 명으로 놓고 행렬 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 를 만들어서 $MX=\begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ 의 꼴로 나타내었을 때, 행렬 $M$은? [3점]

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,3)$과 $\left(\frac{3}{2},0\right)$을 지나는 직선 $l$이 있다. 이 직선 위의 임의의 한 점을 $P(a,\ b)$라 할 때, $9^a+3^b$의 최솟값은? [3점]




① $3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{3}$
③ $4\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{2}$
⑤ $6\sqrt{3}$

12. 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 와 $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여 $x$축, $y$축, $z$축에 대한 $\vec{a}$의 방향코사인을 차례대로 $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$이라 하고, $\vec{b}$의 방향코사인을 차례대로 $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보기>

ㄱ. $\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=1$이다.

ㄴ. 벡터 $\vec{a}$의 각 성분에 대하여 $a_1<a_2<a_3$ 이면 $\gamma_1<\beta_1<\alpha_1$ 이다.

ㄷ. 벡터 $\vec{a}$의 성분 중 $a_3=-5$이면 $\frac{\pi}{2}<\gamma_1<\pi$이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

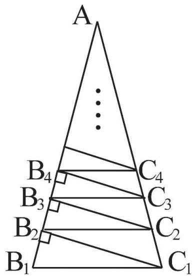
**13.** 행렬 $N=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 과 단위행렬 $E$에 대하여 $N^2-3N+2E=O$이 성립한다. 행렬 $N^{2005}+N-2E$는?
(단, $O$는 영행렬이다.) [4점]

① $\begin{pmatrix} 2^{2005} & 2^{2005} \\ 2^{2005} & 2^{2005} \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2^{2005} & 2^{2005} \\ 2^{2006} & 2^{2006} \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2^{2006} & 2^{2006} \\ -2^{2005} & -2^{2005} \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 2^{2006} & 2^{2006} \\ 2^{2005} & 2^{2005} \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 2^{2005} & 2^{2005} \\ -2^{2006} & -2^{2006} \end{pmatrix}$

**14.** $\overline{\mathrm{AB_1}}=\overline{\mathrm{AC_1}}=10$인 이등변삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$이 있다. 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{C_1}$에서 변 $\mathrm{AB_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{B_2}$, 점 $\mathrm{B_2}$에서 변 $\mathrm{B_1C_1}$과 평행한 선분을 그어 변 $\mathrm{AC_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{C_2}$라 한다. 이와 같은 방법으로 변 $\mathrm{AB_1}$과 변 $\mathrm{AC_1}$위에 점을 잡아서 각 점을 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$, $\mathrm{B_4}$, $\mathrm{C_4}$, $\cdots$ 라 하자. $\overline{\mathrm{B_1B_2}}$의 길이가 $\overline{\mathrm{B_1C_1}}$의 길이의 $\frac{1}{4}$일 때, $\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}$의 값은? [3점]




① 40 ② 35 ③ 30 ④ 25 ⑤ 20

**15.** 다음은 $a_0=\frac{\pi}{2}$, $a_1=1$, $a_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}a_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{2n+1} \leqq \frac{I}{\sqrt{n}} \leqq a_{2n-2} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

가 성립할 때, $I$ 의 값을 구하는 과정이다.

Ⅰ) 자연수 $n$에 대하여 $na_na_{n-1}=\frac{\pi}{2}$임을 수학적귀납법으로 증명하면

i ) $n=1$일 때, $a_1\cdot a_0=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$이므로 성립한다.

ii ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때,

$(k+1)a_{k+1}a_k=(k+1)\boxed{\text{(가)}}a_k=\frac{\pi}{2}$

이므로 성립한다.

Ⅱ) 수열 $\{a_n\}$ 이 감소하는 수열임을 수학적귀납법으로 증명하면

… 중략 …

따라서 $a_n \geqq a_{n+1}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$이다.

조건에서 $a_{2n+1} \leqq \frac{I}{\sqrt{n}} \leqq a_{2n-2}$이고 수열$\{a_n\}$이 감소하는 수열이므로

$na_{2n+2}a_{2n+1} \leqq \boxed{\text{(나)}} \leqq na_{2n-2}a_{2n-3}$

임을 유추할 수 있다.

그러므로 Ⅰ)에 의해서 2이상의 모든 자연수 $n$에 대하여

$\frac{n\pi}{2(2n+2)} \leqq \boxed{\text{(나)}} \leqq \frac{n\pi}{2(2n-2)}$

따라서 $I=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | $\frac{k}{k+1}a_{k-1}$ | $I$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| ② | $\frac{k+1}{k}a_{k-1}$ | $I$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ |
| ③ | $\frac{k}{k+1}a_{k-1}$ | $I^2$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| ④ | $\frac{k+1}{k}a_{k-1}$ | $I^2$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| ⑤ | $\frac{k}{k+1}a_{k-1}$ | $I^2$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ |

*16.* 다음은 △ABC에서 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$라 할 때, $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{0}$ 이면 △ABC는 정삼각형임을 증명한 것이다. (단, $\vec{x}\cdot\vec{y}$ 는 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$의 내적이다.)

> $\vec{c}=\boxed{(가)}$를 주어진 조건식에 대입하여 정리하면
> $(\vec{b}\cdot\boxed{(가)})\vec{a}+(\boxed{(가)}\cdot\vec{a})\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\boxed{(가)}$
> $=(\boxed{(나)}-\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{a}+(\boxed{(나)}-\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}=\vec{0}$
> $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 평행하지 않으므로
> $\begin{cases}\boxed{(나)}-\vec{b}\cdot\vec{b}=0\\ \boxed{(나)}-\vec{a}\cdot\vec{a}=0\end{cases}$
> 위의 두 식에서 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}$
> $\therefore\ |\vec{a}|=|\vec{b}|$
> 같은 방법으로, $\vec{b}=\boxed{(다)}$ 를 주어진 조건식에 대입하여 정리하면 $|\vec{a}|=|\vec{c}|$가 얻어진다.
> 따라서 △ABC는 정삼각형이다.

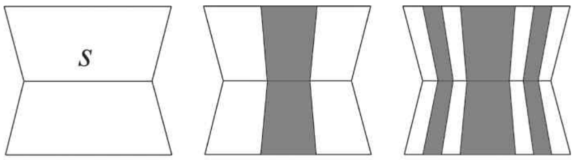
위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

| | (가) | (나) | (다) |
|---|---|---|---|
| ① | $-\vec{a}-\vec{b}$ | $-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ | $-\vec{a}-\vec{c}$ |
| ② | $\vec{a}+\vec{b}$ | $-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ | $\vec{a}+\vec{c}$ |
| ③ | $\vec{a}+\vec{b}$ | $\vec{a}\cdot\vec{b}$ | $-\vec{a}-\vec{c}$ |
| ④ | $-\vec{a}-\vec{b}$ | $-\vec{a}\cdot\vec{b}$ | $\vec{a}+\vec{c}$ |
| ⑤ | $\vec{a}-\vec{b}$ | $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ | $-\vec{a}-\vec{c}$ |

*17.* 첫째항이 2004인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n=1+\sum_{k=1}^{n}a_k$ 로 정의되는 수열 $\{b_n\}$도 등비수열일 때, $b_2$ 의 값은 ? [3점]

① $2004^2$　② $2004\cdot2005$　③ $2005^2$
④ $1+2004^2$　⑤ $1+2005^2$

*18.* 아래 그림과 같이 세 변이 모두 평행하고 넓이가 $S$인 도형이 있다. 이 도형의 평행한 세 변을 각각 3등분하여 대응하는 점끼리 연결시킨 후, 세 부분으로 나뉘어진 도형의 가운데 부분을 색칠한다. 다시, 색칠이 안 된 도형의 평행한 세 변을 각각 3등분하여 대응하는 점끼리 연결시킨 후, 각각 세 부분으로 나뉘어진 도형의 가운데 부분들을 색칠한다.

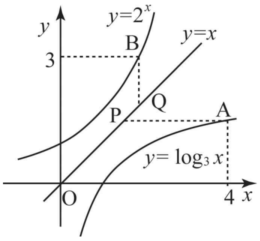



<첫번째>　<두번째>

위와 같은 과정을 계속할 때, 10번째까지 색칠한 부분의 넓이의 합은 ? [4점]

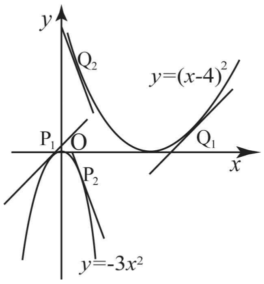
① $\frac{S}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$　② $\frac{S}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$
③ $\frac{S}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$　④ $\frac{S}{2}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$
⑤ $S\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

**19.** 오른쪽 그림은 직선 $y=x$ 와 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_3 x$ 의 그래프이다. $x$ 좌표가 4 인 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점 A 에서 $y$ 축 에 내린 수선이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 P 라 하고, $y$ 좌표가 3 인 곡선 $y=2^x$ 위의 점 B 에서 $x$ 축에 내린 수선이 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 Q 라 한다. 이때, $\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OQ}}$ 의 값은 ? (단, O 는 원점) [4점]




① 4 ② 5 ③ 6 ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

**20.** 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y=-3x^2$ 위에 서로 다른 두 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ 가 있고, 포물선 $y=(x-4)^2$ 위에 두 점 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ 가 있다. 점 $\mathrm{P}_1$ 에서의 접선과 점 $\mathrm{Q}_1$ 에서의 접선이 서로 평행하고, 점 $\mathrm{P}_2$ 에서의 접선과 점 $\mathrm{Q}_2$ 에서의 접선이 서로 평행할 때, 직선 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ 과 직선 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ 의 교점의 좌표는 ? [3점]

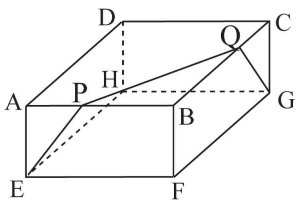



① (2,1) ② (2,0) ③ (1,1)
④ (1,−1) ⑤ (1,0)

**21.** 두 개의 주머니 A, B가 있다. A주머니에는 흰 공 1 개와 검은 공 1 개가 들어 있고 B 주머니에는 검은 공 2 개가 들어 있다. A 주머니에 있는 공을 1 개 꺼내어 B 주머니에 넣은 후, 다시 B 주머니에서 공을 1 개 꺼내어 A 주머니에 넣는 과정을 1 번의 시행이라 하자. 이와 같은 시행을 4 번 반복하였을 때, A 주머니에 흰 공이 들어 있을 확률은 ? [4점]

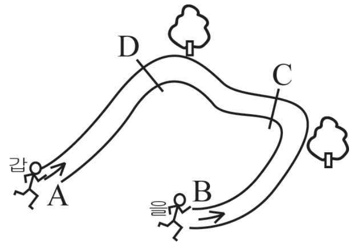
① $\frac{83}{162}$ ② $\frac{41}{81}$ ③ $\frac{14}{27}$ ④ $\frac{33}{64}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

**22.** 오른쪽 그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 5 인 정사각형이고 높이는 2 인 직육면체 ABCD−EFGH 가 있다. 직육면체의 면 위에 점 E 에서부터 두 모서리 AB 와 BC 를 지나고 점 G 에 이르는 최단거리의 선을 그어 모서리 AB 와 만나는 점을 P, 모서리 BC 와 만나는 점을 Q 라 하자. 평면 EPQG 와 평면 EFGH 가 이루는 이면각의 크기를 $\theta$ 라 할 때, $\cos\theta$ 의 값은? [4점]




① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{6}$

*23.* $7.5\,km$ 떨어진 두 지점 A, B 를 잇는 산책로가 있다. 갑은 A 지점에서, 을은 B 지점에서 동시에 출발하여 각각 A, B 사이를 왕복할 때 갑이 먼저 도착하였다. 한편, 갑과 을이 각각 왕복하는 동안에 C 지점에서 처음으로 만났고, 그로부터 50 분 후에 D 지점에서 두 번째로 만났다. C 지점과 D 지점 사이의 거리가 $3\,km$ 일 때, 갑과 을의 속력의 비는? (단, 갑과 을은 각각 일정한 속력으로 움직이고, 을은 반환점 A 를 지난 후 두 번째로 만났다. ) [4점]



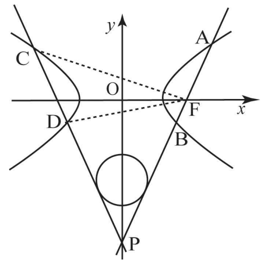

① 3 : 2 ② 4 : 3 ③ 3 : 4 ④ 4 : 5 ⑤ 5 : 3

*24.* 일직선 운동을 하는 두 물체 P, Q 의 $t$ 초 후의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}$ , $v_{\mathrm{Q}}$ 라 하자. 물체 P 는 물체 Q 보다 $54\,m$ 앞에서 출발하여 $v_{\mathrm{P}}=3t^2$ ($m$/초)의 속도로 움직이고 물체 Q 는 일정한 속도 $v_{\mathrm{Q}}$ ($m$/초)로 움직인다. 두 물체가 만나게 되는 $v_{\mathrm{Q}}$ 의 값 중에서 최소인 것을 $a$ 라 하자. $v_{\mathrm{Q}}=a$ 일 때, 두 물체는 Q 가 처음에 있었던 위치보다 얼마만큼 떨어진 위치에서 만나게 되는가? [4점]

① $54m$ ② $61m$ ③ $73m$ ④ $78m$ ⑤ $81m$

## 주관식 문항 (25～30)

*25.* 오른쪽 그림과 같이 $y$ 축 위의 점 P 에서 원 $x^2+(y+k)^2=5$ 에 그은 두 접선이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 과 만나는 교점을 각각 A, B 와 C, D라 한다. $\overline{\mathrm{AB}}=10$일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 $x$ 축과의 교점 F(5,0) 에 대하여 $\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{DF}}$ 의 값을 구하시오. [3점]




*26.* 실수 전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(1)=25$

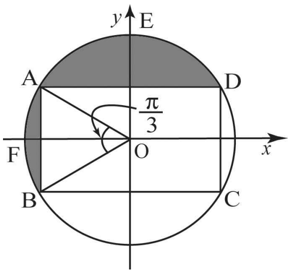
Ⅱ. $f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt-\dfrac{1}{2}\int_x^{x-1} f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt$

Ⅲ. 임의의 실수 $x, y$에 대하여
$f(x+y)+f(x-y)=2\{f(x)+f(y)\}$

이때, 미분계수 $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

**27.** A 고등학교의 학생비율은 1,2 학년이 각각 40 % 이고 3 학년은 20 % 이다. 이 학생들에게 사관학교에 진학할 의향이 있는지를 조사하였더니 1 학년은 30 % , 2 학년은 10 %, 3 학년은 15 % 가 졸업 후 사관학교에 진학하기를 희망한다고 답하였다. 사관학교에 진학하기를 희망하는 학생 중 1 명을 택하였을 때, 그 학생이 1 학년이거나 2 학년 학생일 확률은 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, $m$ 과 $n$ 은 서로소인 자연수이다.) [4점]

**28.** 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 의 내부에 각 변이 좌표축에 평행한 직사각형 ABCD 가 내접해 있다. 활꼴 AED 와 활꼴 AFB 를 $y$ 축의 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 각각 $V_1$, $V_2$ 라 한다. $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ 일 때, $V_1-V_2=\frac{\pi}{(가)}$ 이다.
(가)에 알맞은 값을 구하시오.




[3점]

**29.** 이산확률변수 $X$ 는 이항분포 $B(120, \frac{1}{121})$ 을 따른다. 함수 $f(x)=\sum_{k=0}^{120}(x-ak)^2P(X=k)$ 의 최솟값이 1 이 되도록 하는 양수 $a$ 에 대하여 $120a$ 의 값을 구하시오. [4점]

**30.** 아래 그림은 제1 행에는 (1 1)을 놓고 제2 행부터는 바로 위 행의 이웃한 두 수 사이에 두 수의 차를 추가하여 수를 배열한 것이다. 즉, 제2 행은 제1 행의 (1 1)사이에 '1과 1의 차인 0'을 추가한 것이고, 제3 행은 제2 행의 (1 0 1) 의 이웃한 두 수 1과 0사이에는 '1과 0의 차인 1'을, 0과 1사이에는 '0과 1의 차인 1'을 추가하여 수를 배열한 것이다. 이와 같은 과정을 반복하여 수를 배열할 때 제10행에 나타나는 1의 개수를 구하시오. [4점]

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (제1행) | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| (제2행) | 1 | | | | | | | | 0 | | | | | | | | 1 |
| (제3행) | 1 | | | | 1 | | | | 0 | | | | 1 | | | | 1 |
| (제4행) | 1 | | 0 | | 1 | | 1 | | 0 | | 1 | | 1 | | 0 | | 1 |
| (제5행) | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | ⋮ | | | | | | | | ⋮ | | | | | | | | ⋮ |

※ **확인 사항**
**문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.**

## 2005년 사관학교 1차 선발시험(가형) 및 해설

1) ②

준식) $=4(\log_6 2)^2+4(\log_6 3)^2+8(\log_6 2)(\log_6 3)$

$=4(\log_6 2+\log_6 3)^2=4$

2) ④

$$\lim_{x\to 2005}\frac{2007(2005-x)}{\sqrt{2006-x}-\sqrt{x-2004}}$$

$$=\lim_{x\to 2005}\frac{2007(2005-x)}{\sqrt{2006-x}-\sqrt{x-2004}}\times\frac{\sqrt{2006-x}+\sqrt{x-2004}}{\sqrt{2006-x}+\sqrt{x-2004}}$$

$$=\lim_{x\to 2005}\frac{2007(2005-x)(\sqrt{2006-x}+\sqrt{x-2004})}{(2006-x)-(x-2004)}$$

$$=\lim_{x\to 2005}\frac{2007(2005-x)(\sqrt{2006-x}+\sqrt{x-2004})}{2(2005-x)}$$

$$=\lim_{x\to 2005}\frac{2007(\sqrt{2006-x}+\sqrt{x-2004})}{2}$$

$$=\lim_{x\to 2005}\frac{2007(1+1)}{2}$$

$=2007$

3) ④

$f(x)=x^2g(x)$ 에서 $f'(x)=2xg(x)+x^2g'(x)$ 이므로

$\therefore\ f'(1)=2g(1)+g'(1)=11$

4) ①

ㄱ. $\lim_{x\to -2}f(x)=1,\ \lim_{x\to -2}g(x)=-1$ 이므로

$\therefore\ \lim_{x\to -2}\{f(x)+5g(x)\}=-4$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1}f(x)=2,\ \lim_{x\to 1-}g(x)=-2,\ \lim_{x\to 1+}g(x)=-1$ 이고

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=-4,\ \lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=-2$ 이므로

$\therefore\ \lim_{x\to 1}f(x)g(x)=-4$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 2}f(x)=1,\ \lim_{x\to 2}g(x)=0$ 이므로

$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ (거짓)

5) ④

ㄱ. $a\leqq x\leqq b$ 인 모든 $x$ 에 대하여 $f(x)\leqq g(x)$ 이면

$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

$=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx\leqq 0$

$\therefore\ \int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b g(x)dx$ 이다. (참)

ㄴ. $a\leqq x\leqq b$ 인 모든 $x$ 에 대하여

$\int_a^b|f(x)|dx\geqq\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ 이다. (거짓)

ㄷ. 임의의 실수 $x$ 에 대하여

$h(-x)=h(x)$ 이므로 $h(x)$는 우함수이므로

$\int_{-a}^a h(x)dx=2\int_0^a h(x)dx=2\omega$ 이다.

$\therefore\int_{-a}^a(x-1)h(x)dx$

$=\int_{-a}^a\{xh(x)-h(x)\}dx$

$=-\int_{-a}^a h(x)dx=-2\omega$ (참)

6) ③

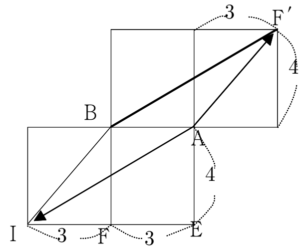
$\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{GD}$ (단, $0\leqq k\leqq 1$) 에서

$\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{AF}$ 을 대입하면

$\overrightarrow{AX}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})-\overrightarrow{AF}$ (단, $0\leqq k\leqq 1$) 이다.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AI}$, $-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AF'}$ 라 두면

아래 그림에서




$\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AF'}$ (단, $0\leqq k\leqq 1$)

$\therefore$ X 의 자취는 $\overline{BF'}$ 이므로 자취의 길이는

$\therefore\ \sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$

7) ④

교점A, B의 $x$ 좌표를 각각 $\alpha,\ \beta$ 라 두면

포물선 $y^2=12x=4\cdot 3\cdot x$ 에서

초점F$(3,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$ 이고

$\overline{AF}:\overline{BF}=4:1$ 이므로 포물선의 정의에서

$(\alpha+3):(\beta+3)=4:1\Leftrightarrow\alpha-4\beta=9$ …… ①

또, 내분점 공식에서 $\frac{4\beta+\alpha}{4+1}=3\Leftrightarrow\alpha+4\beta=15$ …… ②

①, ②에서 $\alpha=12,\ \beta=\frac{3}{4}$ 이다.

$\therefore$ A$(12,\ 12)$, B$\left(\frac{3}{4},\ 3\right)$

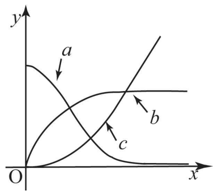
그러므로 직선$l$ 의 방정식은 (직선 AF)

$y-0=\frac{12-0}{12-3}(x-3)\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}(x-3)$

$\therefore\ 4x-3y=12$ 이므로 $a=4,\ b=-3$ 이다.

$\therefore\ a-b=7$

8) ②




$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 두면 $F'(x)=f(x)$ 이므로

$\int_0^x f(t)dt$ 의 도함수가 $f(x)$ 이고 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x)$ 이다. 위쪽 그래프에서 $a$ 의 그래프는 도함수(즉, 접선의 기울기)가 음이므로

함수 $f(x)$ 나 함수 $\int_0^x f(t)dt$ 이 될 수가 없다. ($\because$ 함수 $b$, $c$ 가 모두 양이므로)

따라서, $a$ 의 그래프는 $f'(x)$ 이다. 또, $a$ 의 그래프는 감소하므로 $b$ 와 $c$ 의 그래프의 도함수(즉, 접선의 기울기) 중 감수하는 것은 $b$ 의 그래프이므로 $b$ 의 그래프가 $f(x)$ 이고 $c$ 의 그래프가 $\int_0^x f(t)dt$ 이다.

9) ④

갑과 을이 각각 동전을 던지면 경우의 수는

$\{(\mathrm{T,T}),\ (\mathrm{H,T}),\ (\mathrm{T,H}),\ (\mathrm{H,H})\}$

ⅰ) (T,T) 일 때,

갑과 을의 위치가 A, F 이고 거리가 1 이므로

$\therefore\ p_1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ⅱ) (H,T) 일 때,

을의 위치는 F 이고 을의 위치는 G 가 되어야 거리가 1 이므로

$\therefore\ p_2 = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

ⅲ) (T,H) 일 때,

갑의 위치는 A 이고 을의 위치는 G 가 되어야 거리가 1 이므로

$\therefore\ p_3 = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

ⅳ) (H,H) 일 때,

① 갑의 위치가 B 이면 을의 위치는 A 또는 G 가 되어야 거리가 1 이고
② 갑의 위치가 G 이면 을의 위치는 A 또는 E 가 되어야 거리가 1 이고
③ 갑의 위치가 F 이면 을의 위치는 A 또는 G 또는 E 가 되어야 거리가 1 이고

$\therefore\ p_4 = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 7 = \frac{7}{36}$

그러므로 구하고자하는 확률 $p$ 는

$p = p_1+p_2+p_3+p_4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{7}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$

10) ②

ⅰ) 전체 사원이 20 명이고, A 조의 인원수가 $x$명, B 조의 인원수가 $y$명, C 조의 인원수가 $z$명이므로

$x+y+z=20$ ...... ①

ⅱ) 오후 2 시부터 3 시까지 12 명의 사원이 근무하므로, A 조의 사원과 B 조의 사원이 같은 시간에 근무하므로

$x+y=12$ ...... ②

ⅲ) 오후 6 시부터 8 시까지 15 명의 사원이 근무하므로, B 조의 사원과 C 조의 사원이 같은 시간에 근무하므로

$y+z=15$ ...... ③

①, ②, ③의 관계를 행렬을 사용하여 나타내면

$\therefore\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\12\\15\end{pmatrix}$

11) ⑤

직선의 방정식은 $y=-2x+3$ 이고 점 $\mathrm{P}(\mathrm{a,\ b})$ 가 직선 위의 임의의 점이므로 $b=-2a+3$ 이다.

$\therefore\ 9^a+3^b = 3^{2a}+3^{-2a+3} \geqq 2\times\sqrt{3^{2a}\times3^{-2a+3}} = 6\sqrt{3}$

12) ③

ⅰ) $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 의 방향코사인은

$\Rightarrow\ \cos\alpha_1 = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$ , $\cos\beta_1 = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$ , $\cos\gamma_1 = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$

ⅱ) $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 의 방향코사인은

$\Rightarrow\ \cos\alpha_2 = \frac{b_1}{|\vec{b}|}$ , $\cos\beta_2 = \frac{b_2}{|\vec{b}|}$ , $\cos\gamma_2 = \frac{b_3}{|\vec{b}|}$

ㄱ. $\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$

$= \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ = 알수없음. (거짓)

ㄴ. 벡터 $\vec{a}$ 의 각 성분이 $a_1<a_2<a_3$ 이면

$\cos\alpha_1<\cos\beta_1<\cos\gamma_1$ 이고 $y=\cos x$ 는 감소함수이므로

$\alpha_1>\beta_1>\gamma_1$ 이다. (참)

ㄷ. 벡터 $\vec{a}$ 의 성분 중 $a_3=-5$ 이면

$\cos\gamma_1 = -\frac{5}{|\vec{a}|}<0$ 이므로 $\frac{\pi}{2}<\gamma_1<\pi$ 이다. (참)

13) ③

$\mathrm{N}^{2005}+\mathrm{N}-2\mathrm{E}$ 을 $\mathrm{N}^2-3\mathrm{N}+2\mathrm{E}$ 로 나눈 나머지는

$x^{2005}+x-2 = (x^2-3x+2)\mathrm{Q}(\mathrm{x})+\mathrm{ax+b}$

$=(x-1)(x-2)\mathrm{Q}(\mathrm{x})+\mathrm{ax+b}$

ⅰ) $x=1$ 을 대입하면 $a+b=0$ ...... ①

ⅱ) $x=2$ 을 대입하면 $2a+b=2^{2005}$ ...... ②

①, ②에서

$a=2^{2005}$, $b=-2^{2005}$ 이므로 나머지는 $2^{2005}(x-1)$ 이므로

즉, $2^{2005}(\mathrm{N}-\mathrm{E})$ 이다.

$\therefore\ \mathrm{N}^{2005}+\mathrm{N}-2\mathrm{E} = (\mathrm{N}^2-3\mathrm{N}+2\mathrm{E})\mathrm{M}+2^{2005}(\mathrm{N}-\mathrm{E})$

$=2^{2005}(\mathrm{N}-\mathrm{E}) = 2^{2005}\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^{2006}&2^{2006}\\-2^{2005}&-2^{2005}\end{pmatrix}$

14) ①

$\overline{\mathrm{AB_1}} = \overline{\mathrm{AC_1}} = 10$ 이고, $\overline{\mathrm{B_1B_2}} = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{B_1C_1}}$ 이므로

삼각형의 닮음비에서

$\overline{\mathrm{B_kB_{k+1}}} = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{B_kC_k}}$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{B_kC_k}} = 4\overline{\mathrm{B_kB_{k+1}}}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\mathrm{B_kC_k}} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\mathrm{B_kB_{k+1}}} = 4\overline{\mathrm{AB_1}} = 40$

15) ⑤

Ⅰ) 자연수 $n$ 에 대하여 $na_na_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ 임을 수학적귀납법으로 증명하면

ⅰ) $n=1$ 일 때, $a_1\cdot a_0 = 1\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$ 일 때, 성립한다고 가정하면

$ka_ka_{k-1} = \frac{\pi}{2}$ ......... ①이 성립한다.

$n=k+1$ 일 때,

$a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}a_n$ 에서 $a_{k+1} = \frac{k}{k+1}a_{k-1}$ 이므로

$(k+1)a_{k+1}a_k = (k+1)\times\left[\frac{k}{k+1}a_{k-1}\right]\times a_k = ka_ka_{k-1} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ (k+1)a_{k+1}a_k = \frac{\pi}{2}$

그러므로 $n=k+1$ 일 때도 성립하므로

자연수 $n$ 에 대하여 $na_na_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ 이 성립한다.

Ⅱ) 수열$\{a_n\}$이 감소하는 수열임을 수학적 귀납법으로 증명하면

…중략…

따라서, $a_n \geqq a_{n+1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이다.

조건에서 $a_{2n+1} \leqq \dfrac{\mathrm{I}}{\sqrt{n}} \leqq a_{2n-2}$ 이고 수열$\{a_n\}$이 감소하는 수열이므로

$na_{2n+2}a_{2n+1} \leqq [\mathrm{I}^2] \leqq \mathrm{n\,a_{2n-2}a_{2n-3}}$

임을 유추할 수 있다.

그러므로 Ⅰ)에 의해서 2이상의 모든 자연수$n$에 대하여

$$\frac{n\pi}{2(2n+2)} \leqq [\mathrm{I}^2] \leqq \frac{\mathrm{n}\pi}{2(2\mathrm{n}-2)}$$

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\pi}{2(2n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\pi}{2(2n-2)}=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}^2=\frac{\pi}{4}$$

$\therefore \mathrm{I}=\left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$ 이다.

16) ①

$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-\vec{\mathrm{a}}-\vec{\mathrm{b}}$ 를 주어진 조건식에 대입하여 정리하면

$(\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{b}))\vec{a}+((-\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a})\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})(-\vec{a}-\vec{b})$

$=(-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{a}+(-\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$

$=(-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b})\vec{a}+(-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}=\vec{0}$

$\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 는 평행하지 않으므로

$$\begin{cases}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=0\\ -2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}=0\end{cases}$$

위의 두 식에서$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}$  $\therefore\ |\vec{a}|=|\vec{b}|$

같은 방법으로, $\vec{b}=-\vec{a}-\vec{c}$ 을 주어진 조건식에 대입하여 정리하면

$|\vec{a}|=|\vec{c}|$ 가 얻어진다.

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

17) ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$이라 두면 $a_n=2004\cdot r^{n-1}$ 이고

$$\therefore b_n=1+\sum_{k=1}^{n}a_k=1+\frac{2004(r^n-1)}{r-1}=\frac{r-2005}{r-1}+\frac{2004r}{r-1}\times r^{n-1}$$

수열$\{b_n\}$도 등비수열이므로

$\dfrac{r-2005}{r-1}=0$ $\therefore$ $r=2005$ 이다.

$$\therefore b_n=\frac{2004\times2005}{2005-1}\times(2005)^{n-1}=2005^n$$

$\therefore$ $b_2=2005^2$

18) ⑤

$n$번째 후의 색칠한 부분의 넓이를 $\mathrm{S_n}$이라 두면

$$\mathrm{S_1}=\frac{1}{3}\mathrm{S}$$

$$\mathrm{S_2}=\frac{1}{3}\mathrm{S}+2\times\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\mathrm{S}+\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\left(1+\frac{2}{3}\right)$$

$$\mathrm{S_3}=\frac{1}{3}\mathrm{S}+\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{9}\mathrm{S}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\mathrm{S}+\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}$$

…

$$\mathrm{S_{10}}=\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\left\{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^9\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\mathrm{S}\times\left\{\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1-\frac{2}{3}}\right\}=\mathrm{S}\times\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$$

19) ①

주어진 그래프에서 $\mathrm{A}(4,\ \log_3 4)$ 이므로

$\mathrm{P}(2\log_3 2,\ 2\log_3 2)$ 이다.

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(2\log_3 2)^2+(2\log_3 2)^2}=2\sqrt{2}\,log_3 2$

$\mathrm{B}(\log_2 3,\ 3)$ 이므로 $\mathrm{Q}(\log_2 3,\ \log_2 3)$ 이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{(\log_2 3)^2+(\log_2 3)^2}=\sqrt{2}\,log_2 3$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}=2\sqrt{2}\log_3 2\times\sqrt{2}\log_2 3=4$

20) ⑤

$P_1(a,\ -3a^2),\ P_2(b,\ -3b^2),\ Q_1(c,\ (c-4)^2),\ Q_2(d,\ (d-4)^4)$

$f(x)=-3x^2,$ $g(x)=(x-4)^2$ 라 두면

$f'(x)=-6x,$ $g'(x)=2(x-4)$

$f'(a)=g'(c)$ 에서 $c=-3a+4$

$f'(b)=g'(d)$ 에서 $d=-3b+4$

직선 $P_1Q_1$의 방정식은

$$y=\frac{(c-4)^2+3a^2}{c-a}(x-a)-3a^2$$
$$=\frac{-3a^2}{a-1}(x-a)-3a^2$$

직선 $P_2Q_2$의 방정식은

$$y=\frac{(d-4)^2+3b^2}{d-b}(x-b)-3b^2$$
$$=\frac{-3b^2}{b-1}(x-b)-3b^2$$

두 직선의 교점을 구해보면

$$\frac{-3a^2}{a-1}(x-a)-3a^2=\frac{-3b^2}{b-1}(x-b)-3b^2$$

정리하면 $x=1$

직선 $P_1Q_1$의 방정식에 대입하면 $y=0$

직선$\mathrm{P_1Q_1}$과 직선$\mathrm{P_2Q_2}$의 교점의 좌표는

$\therefore$ $(1,\ 0)$

21) ④

한 번 시행에서 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률을 $p_1$이라 두면

$p_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ 이다.

$n$번 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률을 $p_n$이라 두면

$(n+1)$번 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률 $p_{n+1}$은

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{2}{3}+(1-p_n)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow$ $\left(p_{n+1}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$ 이므로

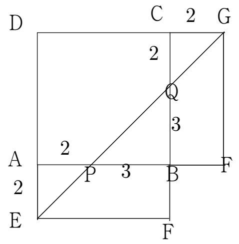
수열$\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$은 첫째항은 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$ 이고 공비가 $\dfrac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\Leftrightarrow p_n=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$

$\therefore\ p_4 = \frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} = \frac{41}{81}$

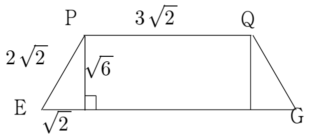
22) ②

주어진 직육면체의 면 위에 점E 에서부터 두 모서리 AB 와 BC 를 지나고 점G 에 이르는 최단거리의 선을 그으려면 아래의 일부전개도에서 선분EG 일 때가 최소이므로



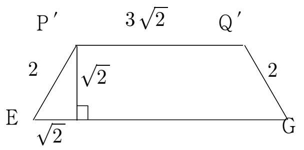

$\overline{PE} = \overline{QG} = 2\sqrt{2}$ , $\overline{PQ} = 3\sqrt{3}$ 이므로

아래 등변사다리꼴 EPQG 에서 $\overline{EG} = 5\sqrt{2}$ 이므로




넓이 $\therefore\ S = \frac{1}{2}(3\sqrt{2}+5\sqrt{2})\times\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$

등변사다리꼴 EPQG 의 밑면EFGH 위로 정사영을 내리면 점P 의 정사영의 발을 P′, 점Q 의 정사영의 발을 Q′ 라 하면 아래 등변사다리꼴 EP′Q′G 에서




넓이 $\therefore\ S' = \frac{1}{2}(3\sqrt{2}+5\sqrt{2})\times\sqrt{2} = 8$

$\therefore\ S' = S\cos\theta$ 에서 $\therefore\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

23) ①

갑의 속력을 $a$, 을의 속력을 $b$ 라 두고,

$AD = x$ km, $CD = 3$ km, $BC = y$ km 라 두면

$\therefore\ x + y = 4.5$ …… ①

i) 처음으로 C 지점에서 만날 때

$\frac{x+3}{a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x+3}{y}$ …… ②

ii) 두 번째로 D 지점에서 만날 때

$\frac{2y+3}{a} = \frac{2x+3}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2y+3}{2x+3}$ …… ③

①, ②, ③을 연립하면 $x = \frac{3}{2}$, $y = 3$ 이므로

$\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ $\therefore\ a : b = 3 : 2$

24) 81

$t$ 초 후의 물체 P, Q 의 위치를 각각 $x_P$, $x_Q$ 라 두면

$x_P = 54 + \int_0^t 3t^2\,dt = t^3 + 54$ , $x_Q = v_Q t$ 이다.

두 물체가 만나려면 $x_P = x_Q$ 이므로

$v_Q = \frac{54}{t} + t^2 = \frac{27}{t} + \frac{27}{t} + t^2$ 이다.

(세 양수의 산술•기하평균을 이용하면)

$v_Q \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{27}{t}\times\frac{27}{t}\times t^2} = 27$

(단, 등호는 $\frac{27}{t} = \frac{27}{t} = t^2$ 일 때 성립.)

$\therefore\ t = 3$ 일 때, $v_Q$ 의 최솟값 $a = 27$

그러므로 3 초 후의 점Q 의 위치는

$\therefore\ 3\times 27 = 81m$

다른풀이】

$v_Q = f(t) = \frac{54}{t} + t^2$ 라 두고 양변을 $t$ 에 관하여 미분하면

$f'(t) = -\frac{54}{t^2} + 2t = \frac{2(t-3)(t^2+3t+9)}{t^2}$ ,

$f'(t) = 0$ 에서 $t = 3$

| $t$ | (0) | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $-$ |
| $f(t)$ | | ↘ | 27 | ↗ |

위의 증감표에서 $f(t)$는 $t = 3$ 에서 최솟값27 이므로

그러므로 3 초 후의 점Q 의 위치는

$\therefore\ 3\times 27 = 81m$

25) 22

$\overline{AB} = \overline{CD} = 10$ 이고, $\overline{CD}$ 와 $x$ 축과의 교점을 F′ 라 두면

쌍곡선의 정의에 의해서

$\overline{CF} - \overline{CF'} = 6$, $\overline{DF} - \overline{DF'} = 6$ (주축의 길이)이므로

변변 더하면

$\overline{CF} + \overline{DF} - (\overline{CF'} + \overline{DF'}) = \overline{CF} + \overline{DF} - \overline{CD} = 12$

$\therefore\ \overline{CF} + \overline{DF} = \overline{CD} + 12 = 22$

26) 50

1) 조건Ⅱ.에서

양변을 $x$ 에 관하여 미분하면

$f'(x) = \frac{1}{2}\{f(x+1) - f(x)\} - \frac{1}{2}\{f(x-1) - f(x)\}$

$= \frac{1}{2}\{f(x+1) - f(x-1)\}$

$\therefore\ f'(1) = \frac{1}{2}\{f(2) - f(0)\}$ ……… ①

2) 조건Ⅰ. 과 Ⅱ.에서

임의의 실수$x$, $y$ 에 대하여

$f(x+y) + f(x-y) = 2\{f(x) + f(y)\}$ 가 성립하므로

i) $x = 1$, $y = 0$ 을 대입하면

$f(1) + f(1) = 2\{f(1) + f(0)\}$ $\therefore\ f(0) = 0$ …… ②

ii) $x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면

$f(2) + f(0) = 2\{f(1) + f(1)\}$

$\therefore f(2) = 4f(1) = 100$ …… ③

①, ②, ③에서

$f'(1) = 50$

27) 35

| | 1학년 | 2학년 | 3학년 |
|---|---|---|---|
| A고등학교 학생비율 | 40% | 40% | 20% |
| 사관학교 진학을 희망하는 학생비율 | 30% | 10% | 15% |

전체 학생 중 1명을 택할 때, 사관학교에 진학하기를 희망하는 학생이 택하여 지는 사건을 E, 1학년 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을B, 3학년 학생인 사건을 C라 두면 조건부확률에서

$$\therefore \mathrm{P}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{E})+\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{E})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{E})+\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{E})+\mathrm{P}(\mathrm{C}\cap\mathrm{E})}$$

$$=\frac{\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{10}{100}}{\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{10}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{15}{100}}=\frac{16}{19}$$

$\therefore\ m+n=19+16=35$

28) 24

$$\mathrm{V}_1=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{x}^2\mathrm{dy}=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\mathrm{y}^2)\mathrm{dy}$$

$$=\pi\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\pi\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\right\}=\frac{5}{24}\pi$$

$$\mathrm{V}_2=\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{x}^2\mathrm{dy}-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)dy-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=2\pi\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)dy-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=2\pi\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{0}^{\frac{1}{2}}-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=2\pi\left\{\left(\frac{1}{2}-0\right)-\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3-0^3\right)\right\}-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{4}{24}\pi$$

$$\therefore\ \mathrm{V}_1-\mathrm{V}_2=\frac{5}{24}\pi-\frac{4}{24}\pi=\frac{\pi}{24}$$

29) 121

X 가 이항분포$\mathrm{B}\left(120,\frac{1}{121}\right)$을 따르므로

$$m=\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{\mathrm{k}=0}^{120}\mathrm{k}\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=120\times\frac{1}{121}=\frac{120}{121}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\sum_{\mathrm{k}=0}^{120}\mathrm{k}^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})-\mathrm{m}^2=120\times\frac{1}{121}\times\frac{120}{121}=\frac{120^2}{121^2}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{120}(x^2-2axk+a^2k^2)\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$$

$$=x^2-2ax\sum_{k=0}^{120}k\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})+\mathrm{a}^2\sum_{\mathrm{k}=0}^{120}\mathrm{k}^2\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$$

$$=x^2-2amx+a^2\sum_{k=0}^{120}k^2\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})$$

$$=(x-am)^2+a^2\left(\sum_{k=0}^{120}k^2\cdot\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})-\mathrm{m}^2\right)$$

$$=(x-am)^2+\frac{120^2}{121^2}a^2$$

함수$f(x)$는 $x=am$ 일 때, 최솟값 $\frac{120^2}{121^2}a^2$ 이다.

$\therefore\ \frac{120^2}{121^2}a^2=1$ 에서 $a=\frac{121}{120}\ (a>0)$

$\therefore\ 120a=121$

30) 342

ⅰ) 각 행의 수의 개수로 된 수열은

2 , 3 , 5 , 9 , 17 , $\cdots$ 이고

제 1 계차수열이

1 , 2 , 4 , 8 , $\cdots$ 이므로

제10행의 수의 개수는

$$2+\sum_{k=1}^{9}2^{k-1}=2+\frac{2^9-1}{2-1}=513\text{ (개)}$$

ⅱ) 제10행(짝수 행)의 수의 나열은

(1 , 0 , 1) , (1 , 0 , 1) , (1 , 0 , 1) , $\cdots$ , (1 , 0 , 1) 이므로

ⅰ), ⅱ)에서

제10행의 1 의 개수는

$\therefore\ 513\times\frac{2}{3}=342$ 이다.