제 3 교시 수 학 영 역

'나'형

성명 | 수험번호 | 1

◦ 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
◦ 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0'이 포함된 경우에는, '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $4^{\frac{1}{3}} \div 8^{-\frac{1}{2}} = 4^x$ 일 때, x 의 값은? [2점]

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{13}{8}$ ④ $\frac{13}{10}$ ⑤ $\frac{13}{12}$

2. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 각 θ 가 존재하는 사분면은? [3점]

① 제2사분면
② 제1사분면 또는 제2사분면
③ 제1사분면 또는 제4사분면
④ 제2사분면 또는 제4사분면
⑤ 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면

3. 다음 <보기>에서 항상 성립하는 것을 모두 고르면? (단, a, b, c는 서로 다른 양수) [2점]

<보 기>

ㄱ. $a + \frac{1}{a} > 2$
ㄴ. $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$
ㄷ. $|a+b| > |a| + |b|$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

4. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 집합 $<a, b>$, $[a, b]$를

$$<a,\ b> = \{\{a\},\ \{a,\ b\}\}$$
$$[a,\ b] = \{a\} \cup \{b\}$$

와 같이 정의할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $<a,\ b> = <b,\ a>$
ㄴ. 집합 $<a,\ b>$ 의 부분집합의 개수는 4 개이다.
ㄷ. $[a,\ b] = [c,\ d]$ 이면 $a = c,\ b = d$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

5. 실수 a, b, c 가 $abc > 0$ 를 만족할 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 서로 다른 부호를 갖기 위한 필요충분조건은? [2점]

① $b^2-4ac > 0$ ② $b < 0$ ③ $bc > 0$
④ $\frac{c}{a}-\frac{b}{a} > 0$ ⑤ $a+b+c > 0$

6. 집합 $\{x \mid x^2-ax+b=0\}$ 의 한 원소가 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 유리수) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 5 ④ 8 ⑤ 16

7. 집합 $A=\{2,3,4,5\}$에서 연산 *를 다음과 같이 정의한다.

$$a*b=\begin{cases} a-(a-b)[\log_a b], & b=2 \text{ 또는 } b=3 \\ b-(b-a)[\log_b a], & b=4 \text{ 또는 } b=5 \end{cases}$$

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

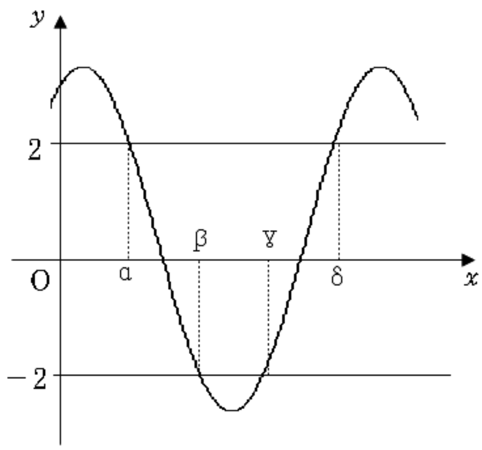
이 때, 방정식 $4*(4*x)=x$를 만족하는 x의 개수는? [4점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

8. 함수 $f(x)=4^x$과 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=f(g(2^x+6))$의 실근을 α라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [3점]

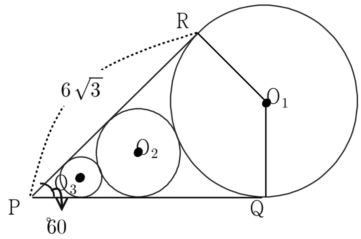
① $-2 \leqq \alpha < -1$ ② $-1 \leqq \alpha < 0$ ③ $0 \leqq \alpha < 1$
④ $1 \leqq \alpha < 2$ ⑤ $2 \leqq \alpha < 3$

9. 곡선 $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$와 두 직선 $y=2$, $y=-2$가 만나는 점의 x좌표를 원점에서 가까운 것부터 차례대로 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$라 할 때, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값은? [3점]



① $\frac{5\pi}{2}$ ② 3π ③ $\frac{7\pi}{2}$ ④ 4π ⑤ $\frac{9\pi}{2}$

10. 아래 그림과 같이 원 O_1 밖의 한 점P에서 원O_1에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R 이라고 하자. 이 때, $\overline{PR}=6\sqrt{3}$, $\angle RPQ = 60^{\circ}$이다. 선분PQ와 선분PR에 접하고 원O_1에 외접하는 원 O_2를 그린다. 이와 같은 방법으로 원 O_3, O_4, $\cdots$ 를 계속 그려 나갈 때, 원 $O_1, O_2, O_3, O_4, \cdots$ 의 반지름 길이의 총합은? [3점]



① $5\sqrt{3}$ ② 9 ③ 10 ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ 12

11. 이차정사각행렬A, B에 대하여 다음 <보기>의 명제 중 항상 참인 것을 모두 고르면 ? (단, O는 영행렬이다.) [3점]

ㄱ. A, B의 역행렬이 존재하면 BA^{-1}의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $A \neq O$일 때, $A^2+AB=O$이면 $A+B=O$이다.
ㄷ. $A+B=X$이고 $A^2+B^2=O$이면 $AB=\frac{1}{2}X^2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

12. 실수에서 정의된 함수$f(x)$를 $f(x)=x-[x]$라고 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.) [4점]

ㄱ. $f(-3.14)=f(3.14)$
ㄴ. 모든 x에 대하여, $\{y \mid y=[f(x)]\}=\{-1,0\}$
ㄷ. 모든 x에 대하여, $f(x)=f(x+1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 두 집합

$$M=\{(x,y) \mid y=\sqrt{4x-8}\},\ N=\{(x,y) \mid y=x+k\}$$

에 대하여 $n(M\cap N)=2$가 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [3점]

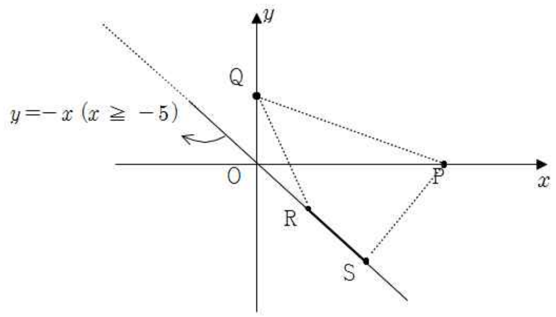
① $k<-1$ ② $k \leqq -1$ ③ $-2<k<-1$
④ $-2 \leqq k<-1$ ⑤ $-2 \leqq k \leqq -1$

14. 자연수 n 은 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_r^{m_r}$ (단, $m_1, m_2, \cdots, m_r$은 음이 아닌 정수이고, $p_1, p_2, \cdots, p_r$은 모두 서로 다른 소수이다.)과 같이 유일하게 소인수분해된다.
이 때, $f(n)=m_1+m_2+\cdots+m_r$로 정의한다. 예를 들면, $f(10)=f(2^1\cdot5^1)=1+1=2$이다. 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

ㄱ. $f(10^4)<f(10^5)$
ㄴ. $n_1<n_2$이면 $f(n_1)<f(n_2)$이다.
ㄷ. 자연수 n에 대하여 $f(2^n+2^{n+3})=n+2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 좌표평면 위에 두 정점 P $(12, 0)$, Q $(0, 5)$가 있다. 길이가 $5\sqrt{2}$인 선분RS가 반직선 $y=-x\ (x\ge -5)$ 위에서 움직일 때, 사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최솟값은? [4점]



① $20+6\sqrt{2}$ ② $22+6\sqrt{2}$ ③ $22+8\sqrt{2}$
④ $24+5\sqrt{2}$ ⑤ $26+5\sqrt{2}$

16. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $f(n)=1\times2\times3\times\cdots\times n$이라고 정의할 때, $N=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2003)$의 십의 자리 숫자는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

17. 다음과 같이 정의된 함수

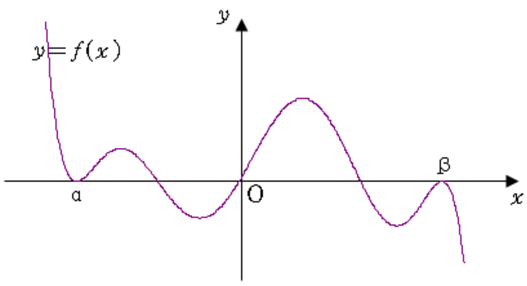
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2} & (x<1) \\ -x^2+4x & (x\ge 1) \end{cases}$$

가 있다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

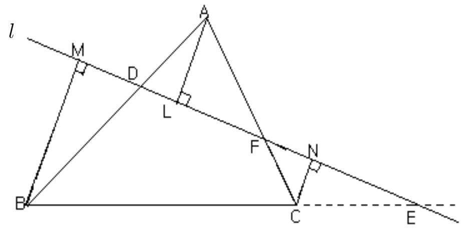
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 $g'(x)=-f(-x)$일 때, $g(x)$의 극대점과 극소점의 개수를 순서대로 구하면? (단, 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 x축에 접한다.) [3점]



① 1, 1 ② 1, 2 ③ 2, 1
④ 2, 2 ⑤ 3, 3

19. 아래 그림과 같이 직선 l이 삼각형ABC의 두 변 AB, AC와 각각 D, F에서 만나고, 변 BC의 연장선과 직선 l이 점 E에서 만난다.



이 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{(가)} \cdot \dfrac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{CE}}} \cdot \dfrac{\overline{\mathrm{CF}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=1$임을 보이는 다음의 [증명]과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

[증 명]
점A, B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라고 하자.

(나) $\propto \triangle BDM$
$\triangle BEM \propto \triangle CEN$
$\triangle CFN \propto \triangle AFL$

이므로

$$\frac{\overline{AD}}{(가)} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BM}}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{(다)}{\overline{CN}}$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AL}}$$

이고, 이를 정리하면 $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{(가)} \cdot \dfrac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{CE}}} \cdot \dfrac{\overline{\mathrm{CF}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=1$을 얻을 수 있다.

① $\overline{\mathrm{BM}}$, △CEN, $\overline{\mathrm{BE}}$ ② $\overline{\mathrm{BM}}$, △CEN, $\overline{\mathrm{BM}}$
③ $\overline{\mathrm{BD}}$, △ADL, $\overline{\mathrm{BM}}$ ④ $\overline{\mathrm{BD}}$, △ADL, $\overline{\mathrm{BE}}$
⑤ $\overline{\mathrm{CN}}$, △CEN, $\overline{\mathrm{BE}}$

20. 다음은 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$의 어떤 성질을 증명하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

> [증 명]
> (ⅰ) $h>0$일 때,
> x와 $x+h$가 개구간 $(a,\ b)$ 안에 있다면
> $F(x+h)-F(x)=$ $\boxed{\quad(가)\quad}$이고
> $f(x)$는 정의된 구간에서 $\boxed{\quad(나)\quad}$이므로
> 적당한 상수 $m, M\ (m \leqq M)$이 존재하여
> $mh \leqq$ $\boxed{\quad(가)\quad}$ $\leqq Mh$이다.
> 양변을 h로 나누고 $h\to+0$이면 m과 M이 같아지므로
> $\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 이다.
> (ⅱ) $h<0$일 때
> (ⅰ)과 동일한 방법으로
> $\lim_{h\to-0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 임을 알 수 있다.
> 그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\boxed{\quad(다)\quad}$ 이다.

① $\int_x^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)=f(x)$
② $\int_x^{x+h} f(t)dt$, 미분가능한 함수, $F'(x)=f(x)$
③ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)=f(x)$
④ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)$는 $[a,b]$에서 연속
⑤ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 미분가능한 함수, $F'(x)$는 $[a,b]$에서 연속

21. 일반항이 $a_n=n\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)(n\geqq 1)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음은 $\lim_{n\to\infty}a_n$이 존재하도록 하는 실수 a의 값과 이 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하는 과정이다. <풀이>에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

> $a_n=n\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\dfrac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a}{\frac{1}{n}}$
> 이므로 이 수열이 수렴하려면
> $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=$ $\boxed{\quad(가)\quad}$이다.
> 그러므로 $a=$ $\boxed{\quad(나)\quad}$이다.
> 따라서, $\lim_{n\to\infty}a_n=$ $\boxed{\quad(다)\quad}$이다.

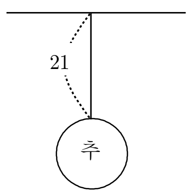
① 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$　② 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$　③ 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$
④ 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{16}$　⑤ 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{16}$

22. 한국오페라하우스의 좌석은 A ~ G까지 7개의 열로 구성되어 있고, 각 열에는 55개의 행이 같은 규칙으로 배열되어 있다. 예를 들어, A 열의 행들이 아래와 같이 배열되어 있을 때, 한국오페라하우스의 총 좌석수는? [4점]

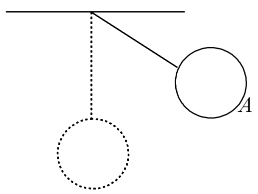
> 1 행 --- 5개
> 2 행, 3 행 --- 각 6개
> 4 행, 5 행, 6 행 --- 각 7개
> ⋮ ⋮

① 3,542　② 4,235　③ 5,733
④ 11,172　⑤ 21,175

23. [그림 1]과 같이 길이가 21㎝인 막대에 반지름이 7㎝인 원 모양의 시계추가 매달려 있다. 시계추가 [그림 1]의 위치에서 출발하여 [그림 2]의 A의 위치에 도달하였다. 이 때, 시계추의 중심은 수직 방향으로는 14㎝ 위에 있다. 이 시계추의 중심이 움직인 거리는? [3점]



[그림 1]



[그림 2]

① 21㎝ ② 28㎝ ③ $\frac{20\pi}{3}$㎝

④ $\frac{28\pi}{3}$㎝ ⑤ $\frac{32\pi}{3}$㎝

24. D 대학교 2003년도 학생 복지금은 학교 전체 예산의 1.1% 라고 한다. 2003년부터 이 대학교는 매년 학교 예산과 학생 복지금을 전년대비 각각 5%, 7%씩 늘려갈 계획이다. 그러면, 학생 복지금이 학교 예산의 1.3% 이상이 되는 것은 몇 년 후인가? (단, 아래 상용로그표에 있는 값만 이용하여 계산하시오.)

[4점]

상용로그표

	0	1	⋯	4	5	6	7
1.0	.0000	.0043	⋯	.0170	.0212	.0253	.0294
1.1	.0414	.0453	⋯	.0569	.0607	.0645	.0682
1.2	.0792	.0828	⋯	.0934	.0969	.1004	.1038
1.3	.1139	.1173	⋯	.1271	.1303	.1335	.1367
1.4	.1461	.1492	⋯	.1584	.1614	.1644	.1673

① 9년 ② 10년 ③ 11년 ④ 12년 ⑤ 13년

주관식 문항 (25~30)

25. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=|\log_2 x-2|$가 $f(a)=f(b)$를 만족할 때, $a\times b$의 값을 구하시오. [4점]

26. 삼차식 $f(x)$와 이차식 $g(x)$가

$$f(1+2i)=3+2i,\ g(1+2i)=0$$

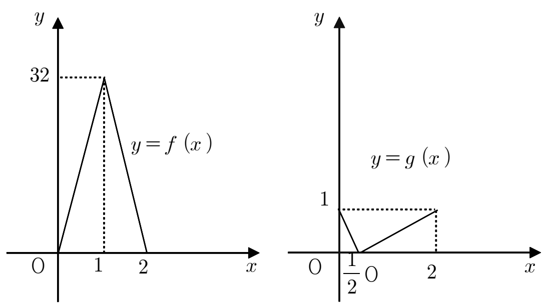
을 만족한다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(10)$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 $f(x)$와 $g(x)$의 계수는 모두 실수이다.) [3점]

27. 등식 $\lim_{x \to -1} \frac{2-\sqrt{x+a}}{x+1} = b$ 을 만족하는 상수 a, b에 대하여 $\frac{a-b}{b}$ 의 값을 구하시오. [3점]

28. 방정식 $x^5 = 1$의 서로 다른 4개의 허근 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$에 대하여 $\frac{3(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)(1-\omega_4)}{(1+\omega_1)(1+\omega_2)(1+\omega_3)(1+\omega_4)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 철수가 자기집 정원을 완전하게 소독하려면 세 가지 화합물 A, B, C가 각각 10㎎, 12㎎, 12㎎이 최소한 필요하다. A, B, C의 화합물이 각각 5㎎, 2㎎, 1㎎이 혼합된 제품은 한 병에 3만원이고, 1㎎, 2㎎, 4㎎이 혼합된 제품은 한 병에 2만원이라면, 두 제품을 이용하여 정원을 완전하게 소독하는데 드는 최소비용은 $\boxed{}$만원이다. 이 때, $\boxed{}$ 안의 알맞은 값을 구하시오. [4점]

30. 폐구간 $[0, 2]$에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다. 이 때, $\frac{1}{3}\int_0^2 f(g(x))dx$의 값을 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하시오. [4점]



※ **확인 사항**

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2004년 사관학교 1차 선발시험(나형) 해설

1) ⑤

$4^{\frac{1}{3}} \div 8^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{13}{6}} = 4^{\frac{13}{12}}$

2) ④

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$\sin\theta\times\cos\theta = -\frac{3}{8}$

ⅰ) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 일 때 , 2사분면

ⅱ) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$ 일 때 , 4사분면

그러므로 2, 4사분면

3) ②

ㄱ. 산술 기하평균에서

$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}} = 2 \quad \therefore\ a\geqq 2$

ㄴ. $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0$

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$

$\because \quad a,\ b,\ c$ 가 서로 다른 양수

ㄷ. $|a+b|^2-(|a|+|b|)^2 = 2(ab-|ab|) = 2(ab-ab) = 0$

$\therefore \quad |a+b| = |a|+|b|$

4) ②

ㄱ. $<a,\ b> = \{\{a\},\ \{a,\ b\}\}$

$<b,\ a> = \{\{b\},\ \{b,\ a\}\} \qquad <a,\ b> \neq <b,\ a>$

ㄴ. 집합 $<a,\ b> = \{\{a\},\ \{a,\ b\}\}$ 의 부분집합의 개수는

$\therefore \quad 2^2=4$ (개)

ㄷ. $[a,\ b] = \{a\}\cup\{b\} = \{a,\ b\}$

$[c,\ d] = \{c\}\cup\{d\} = \{c,\ d\}$ 이므로

$[a,\ b] = [c,\ d]$, 즉 $\{a,\ b\} = \{c,\ d\}$ 이라고 해서

$a=c$, $b=d$ 인 것은 아님.

5) ②

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 이 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가지려면 두 근의 곱이 음이면 된다.

$\alpha\beta = \frac{c}{a}<0 \quad \therefore\ ac<0$ 이고

또, 조건에서 $abc>0$ 이므로 $\therefore\ b<0$

6) ④

유리계수방정식 $x^2-ax+b=0$ (단, $a,\ b$ 는 유리수) 의 한근이

$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = -1+\sqrt{3}$ 이므로 다른 한 근은 $-1-\sqrt{3}$ 이다.

근과 계수와의 관계에서 두 근의 합 : $a=-2$

두 근의 곱 : $b=-2 \qquad \therefore a^2+b^2=8$

7) ③

연산 $4*x$ 를 각각 계산하면

$4*2 = 4-(4-2)[\log_4 2] = 4-2\left[\frac{1}{2}\right] = 4 \quad \therefore\ 4*2=4$

$4*3 = 4-(4-3)[\log_4 3] = 4-[\log_4 3] = 4 \quad \therefore\ 4*3=4$

$4*4 = 4-(4-4)[\log_4 4] = 4 \quad \therefore\ 4*4=4$

$4*5 = 5-(5-4)[\log_5 4] = 5-[\log_5 4] = 5 \quad \therefore\ 4*5=5$

그러므로 방정식 $4*(4*x)=x$ 에서

ⅰ) $x=2$ 이면 $4*(4*2)=4*4=4$ (×)

ⅱ) $x=3$ 이면 $4*(4*3)=4*4=4$ (×)

ⅲ) $x=4$ 이면 $4*(4*4)=4*4=4$ (○)

ⅳ) $x=5$ 이면 $4*(4*5)=4*5=5$ (○)

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=5$

8) ④

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$f(x) = f(g(2^x+6))$ 에서 $4^x = 2^x+6$ 이다.

$2^x = t\ (t>0)$ 라 두면

$t^2-t-6=0$ 에서 $t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore\ t=2^x=3 \quad \therefore\ \alpha=\log_2 3$

$\therefore\ 1\leqq\alpha<2$

9) ①

함수 $y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=3\cos2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ 이므로

$y=3\cos2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼 평행이동한 그래프이고,

주기가 π 이다.

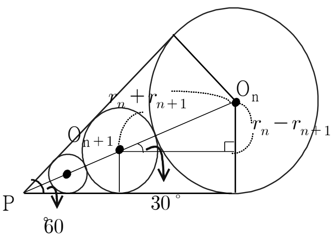
$\frac{\pi}{8}$ 에서 α 까지의 거리를 k 라 두면

$\alpha=\frac{\pi}{8}+k \quad , \quad \beta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}-k$

$\gamma=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}+k \quad , \quad \delta=\pi+\frac{\pi}{8}+k$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi+\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

10) ②



그림에서

$\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}} = \sin30^\circ = \frac{1}{2} \quad \therefore\ r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$ 이고

$\frac{r_1}{6\sqrt{3}} = \tan30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\ r_1=6$ 이므로

$\therefore\ r_n = 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{6}{1-\frac{1}{3}} = 9$

11) ①

ㄱ. $A,\ B$ 가 역행렬이 존재하므로

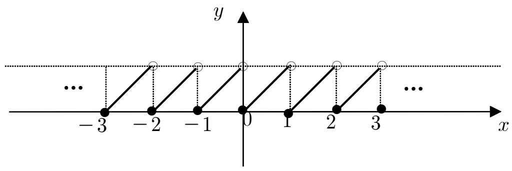
$(BA^{-1})(AB^{-1}) = B(A^{-1}A)B^{-1} = BEB^{-1} = BB^{-1} = E$

$(AB^{-1})(BA^{-1}) = A(B^{-1}B)A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$

$\therefore\ (BA^{-1})^{-1} = AB^{-1}$

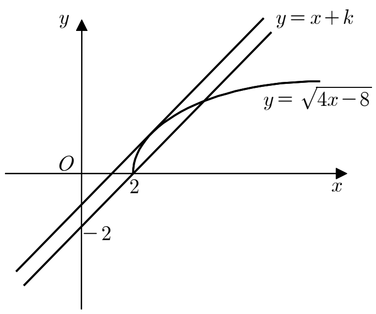
ㄴ. $A \neq O$ 일 때,
$A^2+AB=A(A+B)=O$ 이라고 해서 $A+B=O$ 인 것은 아니다.
($AB=O \Leftarrow A=O$ 또는 $B=O$: 필요조건)
ㄷ. $A+B=X$이고 $A^2+B^2=O$에서
$(A+B)^2=X^2$ 하면
$(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=AB+BA=X^2$ 이고
$AB \neq BA$ (교환법칙)이므로 $AB \neq \frac{1}{2}X^2$

12) ③
함수 $f(x)$를 $f(x)=x-[x]$의 그래프는
i) $-1 \leqq x < 0$ 일 때, $f(x)=x+1$
ii) $0 \leqq x < 1$ 일 때, $f(x)=x$
iii) $1 \leqq x < 2$ 일 때, $f(x)=x-1$
iv) $2 \leqq x < 3$ 일 때, $f(x)=x-2$ 와 같이 되므로



ㄱ. $f(-3.14)=-3.14-[-3.14]=-3.14-(-4)=0.16$
$f(3.14)=3.14-[3.14]=3.14-3=0.14$
$\therefore\ f(-3.14) \neq f(3.14)$
ㄴ. 함수 $f(x)$의 치역은 $\{f(x) \mid 0 \leqq f(x) < 1\}$ 이므로
$\{y \mid y=[f(x)]\}=\{0\}$ 이다.
ㄷ. 위의 그림에서 함수 $f(x)$는 주기가 1 인 주기 함수이므로
$\therefore\ f(x)=f(x+1)$

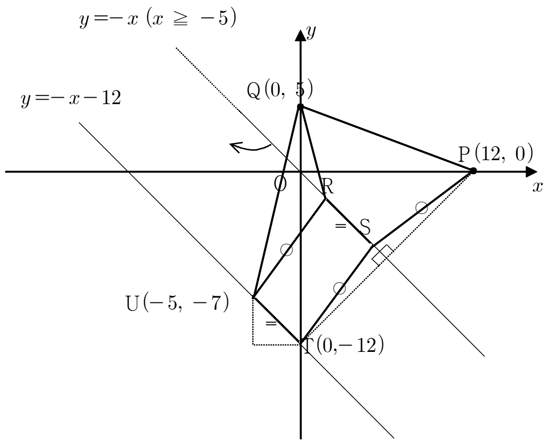
13) ④
곡선$y=\sqrt{4(x-2)}$ 과 직선$y=x+k$ 이 만나는 교점이 두 개가 되도록 k 의 값의 범위를 정하면 되므로



접할 때, k 의 값을 구하면
$x+k=\sqrt{4x-8}$ 을 양변 제곱하면
$x^2+2(k-2)x+(k^2+8)=0$
$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+8)=0 \quad \therefore\ k=-1$
$\therefore\ -2 \leqq k < -1$

14) ③
ㄱ. $f(10^4)=f(2^4 \cdot 5^4)=4+4=8$
$f(10^5)=f(2^5 \cdot 5^5)=5+5=10$ 이므로
$\therefore\ f(10^4) < f(10^5)$
ㄴ. (반례) $n_1=6\ <\ n_2=10$ 이면
$f(n_1)=f(6)=f(2 \cdot 3)=1+1=2$
$f(n_2)=f(10)=f(2 \cdot 5)=1+1=2$ 이므로
$\therefore\ f(n_1)=f(n_2)$ 이되어 모순이다.
ㄷ. 자연수 n 에 대하여
$f(2^n+2^{n+3})=f(2^n(1+2^3))=f(2^n \cdot 3^2)=n+2$

15) ⑤



사각형 PQRS 의 둘레의 길이의 최솟값은
$\overline{PQ}=13$, $\overline{RS}=5\sqrt{2}$ 로 일정하므로 $\overline{PS}+\overline{QR}$ 이 최소이면 된다.
그림처럼 점 P$(12, 0)$ 의 $y=-x$ 에 대한 대칭점 T$(0,-12)$ 를 잡고
점T 를 지나고 기울기가 -1 인 직선 $y=-x-12$ 위에
$\overline{RS}=5\sqrt{2}=\overline{TU}$ 되도록 U$(-5,-7)$ 을 잡으면 $\overline{RS}$ 가 직선 $y=-x$ 위를 움직이더라도 $\overline{PS}=\overline{ST}=\overline{RU}$ 이므로 $\overline{PS}+\overline{QR}=\overline{RU}+\overline{QR}$ 이다.
그러므로 $\overline{QR}+\overline{RU}$ 의 최솟값은
$\therefore\ \overline{PS}+\overline{QR}=\overline{QR}+\overline{RU} \geqq \overline{QU}=13$
$\therefore$ PQRS 의 둘레의 길이$\geqq 13+5\sqrt{2}+13=26+5\sqrt{2}$

16) ①
$100=2^2 \times 5^2$ 이므로
$f(10)=1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10$
$=2^{\left[\frac{10}{2}\right]+\left[\frac{10}{2^2}\right]+\left[\frac{10}{2^3}\right]} \times 3^{\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{10}{3^2}\right]} \times 5^{\left[\frac{10}{5}\right]} \times 7$
$=2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7=2^6 \times 3^4 \times 7 \times 100$
이므로 $f(10)$ 에서 $f(2003)$ 까지의 십의 자리수는 0 이다.
$f(1)=1$, $f(2)=1 \times 2=2$, $f(3)=1 \times 2 \times 3=6$,
$f(4)=24$, $f(5)=120$,$f(6)=720$, $f(7)=5040$,
$f(8)=15320$, $f(9)=137880$
그러므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$ 의 십의 자리수는 1 이다.

17) ⑤
$f_1(x)=\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}$, $f_2(x)=-x^2+4x$ 라 두면
$f_1{}'(x)=x+1\ (x<1)$, $f_2{}'(x)=-2x+4\ (x \geqq 1)$
ㄱ. $f(1)=f_1(1)=f_2(1)=3$ 이고, $\lim_{x \to 1} f(x)=3$
$\because)\ \lim_{x \to 1-0}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\right)=\lim_{x \to 1+0}(-x^2+4x)=3$
$\therefore\ f(1)=\lim_{x \to 1} f(x)$ 이므로 연속이다.
ㄴ. $f'(1)=2$ 이므로 미분가능이다. $\quad \because)\ f_1{}'(1)=f_2{}'(1)=2$

ㄷ. $f'(1)=f_1'(1)=f_2'(1)=2$ 이고 $\lim_{x\to1}f'(x)=2$

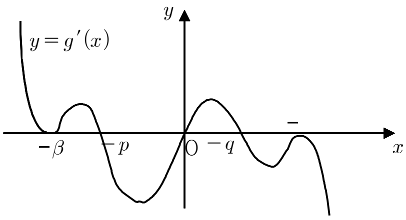
$\because$) $\lim_{x\to1-0}(x+1)=\lim_{x\to1+0}(-2x+4)=2$

$\therefore$ $f'(1)=\lim_{x\to1}f'(x)$ 이므로 연속이다.

18) ③

함수 $g'(x)=-f(-x)$ 은 $y=f(x)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프이다.

주어진 함수$y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 교점을 $\alpha<p<0<q<\beta$ 라 두면



함수 $y=g(x)$ 의 증감표를 그리면

x	$\cdots$	$-\beta$	$\cdots$	$-q$	$\cdots$	0	$\cdots$	$-p$	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	+	0	−	0	+	0	−	0	−
$g(x)$	↗		↗	大	↘	小	↗	大	↘		↘

위의 증감표에서

$\therefore$ 극대점 : 2개 , 극소점 : 1개

19) ③

점A, B, C 에서 직선l 에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라고 하자.

($\triangle$ADL)$\backsim\triangle$BDM, $\triangle$BEM$\backsim\triangle$CEN, $\triangle$CFN$\backsim\triangle$AFL 이므로

삼각형의 닮음에서 $\overline{AD}:\overline{AL}=\overline{BD}:\overline{BM}$

$\overline{BE}:\overline{BM}=\overline{CE}:\overline{CN}$ 이므로

$\frac{\overline{AD}}{(\overline{BD})}=\frac{\overline{AL}}{\overline{BM}},\ \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{(\overline{BM})}{\overline{CN}},\ \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{AL}}$

이고, 이를 정리하면 $\frac{\overline{AD}}{(\overline{BD})}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}\cdot\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}=1$ 을 얻을 수 있다.

20) ①

(i) $h>0$ 일 때, x 와 $x+h$ 가 개구간 $(a,\ b)$ 안에 있다면

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 에서

$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h}f(t)dt$

이다.

또, $f(x)$ 는 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이므로 최대·최소정리에 의하여 적당한 상수 $m,\ M(m\leqq M)$ 이 존재하여

$mh\leqq\int_x^{x+h}f(t)dt\leqq Mh$ 이다.

양변을 h 로 나누고 $h\to+0$ 이면 m 과 M 이 같아지므로

$\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 이다.

(ii)$h<0$ 일 때 (i)과 동일한 방법으로

$\lim_{h\to-0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 임을 알 수 있다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여

$\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 이다. 즉, $\therefore$ $F'(x)=f(x)$

21) ⑤

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a}{\frac{1}{n}}$ 이 수렴하려면

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=0$ 이다.

그러므로 윗 식에서 $\frac{1}{2}-a=0$ $\therefore$ $a=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n-1}{4n+1}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-5n}{4(4n+1)}}{\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{5}{16}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=-\frac{5}{16}$$

22) ②

A열의 총 좌석수를 S 라 두면

$S=1\times5+2\times6+3\times7+\cdots+10\times14$

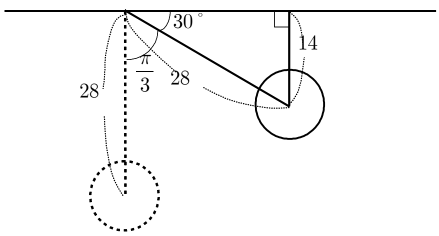
$=\sum_{n=1}^{10}n(n+4)=\sum_{n=1}^{10}(n^2+4n)$

$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+4\times\frac{10\cdot11}{2}=605$

그러므로 총 좌석수는 $\therefore$ $605\times7=4{,}235$

23) ④

[그림2]에서



위의 그림에서 시계추의 중심이 움직인 거리는

중심각이 $\frac{\pi}{3}$ 이고 반지름이 28 인 부채꼴의 호의 길이이다.

$\therefore$ $l=r\theta=28\times\frac{\pi}{3}=\frac{28\pi}{3}$ cm

24) ①

2003 년도 학교 전체 예산을 A 원이라 두면

	학교전체예산	학생복지금
2003년도	A	$0.011A$
n 년 후	$(1+0.05)^nA$	$(1+0.07)^n0.011A$

$(1+0.07)^n0.011A\geqq0.013\times(1+0.05)^nA$ 이므로

양변에 상용로그를 취하면

$n\log1.07+\log0.011\geqq n\log1.05+\log0.013$

$(\log1.07-\log1.05)n\geqq\log0.013-\log0.011$

주어진 상용로그표에서

$\log1.07=0.0294,\ \log1.05=0.0212$

$\log1.3=0.1139$ 이므로 $\log0.013=-2+0.1139$ 이고,

$\log 1.1 = 0.0414$ 이므로 $\log 0.011 = -2 + 0.0414$ 이다.

$\therefore\ (0.0294 - 0.0212)\, n \geqq (-2 + 0.1139) - (-2 + 0.0414)$

$0.0082 \times n \geqq 0.0725$

$\therefore\ n \geqq 8.8 \cdots$ 이므로 9 년후

25) 16

$\left|\log_2 a - 2\right| = \left|\log_2 b - 2\right|$ 이고, $a \neq b$ 이므로

$\log_2 a - 2 = -\left(\log_2 b - 2\right)$

$\log_2 a + \log_2 b = 4 \quad \log_2 ab = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \therefore\ ab = 16$

26) 12

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지을 $ax+b$ 라 두면

$f(x) = g(x)Q(x) + ax + b$ (단, a, b 는 실수)

$x = 1 + 2i$ 을 대입하면

$f(1+2i) = g(1+2i)Q(1+2i) + a(1+2i) + b$

$3 + 2i = (a+b) + 2ai$ 이므로 복소수의 상등에 의하여

$a + b = 3,\ 2a = 1 \quad \therefore\ a = 1,\ b = 2$

$R(x) = x + 2$

27) -21

ⅰ) $\lim_{x\to -1}$(분모)$= 0$ 이므로 $\lim_{x\to -1}$(분자)$= 0$ 이다.

$\lim_{x\to -1}(2 - \sqrt{x+a}) = 0$

$2 - \sqrt{-1+a} = 0 \quad \therefore \quad a = 5$

ⅱ) $\therefore \quad b = \lim_{x\to -1}\dfrac{2-\sqrt{x+5}}{x+1}$

$= \lim_{x\to -1}\dfrac{(2-\sqrt{x+5})(2+\sqrt{x+5})}{(x+1)(2+\sqrt{x+5})}$

$= \lim_{x\to -1}\dfrac{-(x+1)}{(x+1)(2+\sqrt{x+5})}$

$= \lim_{x\to -1}\dfrac{-1}{2+\sqrt{x+5}} = -\dfrac{1}{4}$

$\therefore \quad \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{5+\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = -21$

28) 15

$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$ 이므로

방정식$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$ 이므로

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)(x-\omega_4)$ 이다.

ⅰ) $x = 1$ 을 대입하면

$5 = (1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)(1-\omega_4)$

ⅱ) $x = -1$ 을 대입하면

$1 = (-1-\omega_1)(-1-\omega_2)(-1-\omega_3)(-1-\omega_4)$

$1 = (1+\omega_1)(1+\omega_2)(1+\omega_3)(1+\omega_4)$

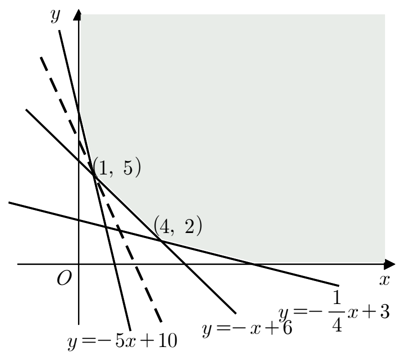
$\therefore \quad \dfrac{3(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)(1-\omega_4)}{(1+\omega_1)(1+\omega_2)(1+\omega_3)(1+\omega_4)} = 15$

29) 13 (만원)

A, B, C의 화합물이 각각 5㎎, 2㎎, 1㎎이 혼합된 제품을 x 병, 각각1㎎, 2㎎, 4㎎이 혼합된 제품을 y 병이 필요하다면

ⅰ) $\begin{cases} x \geqq 0,\ y \geqq 0 \\ 5x + y \geqq 10 \\ 2x + 2y \geqq 12 \\ x + 4y \geqq 12 \end{cases}$

ⅱ) 위의 영역을 도시하면



ⅲ) $3x + 2y = k$ (만원)라 두면

$y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{k}{2}$ 이므로 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 인 직선이다.

위의 점선 그래프 즉, (1, 5) 를 지날 때, 최소이다.

$\therefore$ 13 만원

30) 10.67

$f(x) = \begin{cases} 32x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ -32x + 64 & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3} & \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2\right) \end{cases}$

ⅰ) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ 일 때,

$f(g(x)) = f(-2x+1) = 32(-2x+1) = -64x + 32$

ⅱ) $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ 일 때,

$f(g(x)) = f\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}\right) = 32\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{64}{3}x - \dfrac{32}{3}$

$\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^2 f(g(x))\,dx$

$= \dfrac{1}{3}\left\{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(-64x + 32)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\dfrac{64}{3}x - \dfrac{32}{3}\right)dx\right\}$

$= \dfrac{1}{3}\left\{\left[-32x^2 + 32x\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\dfrac{32}{3}x^2 - \dfrac{32}{3}x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}\right\}$

$= \dfrac{1}{3}(8 + 24) = \dfrac{32}{3} = 10.666\cdots$

$\therefore$ 10.67