2004학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

제 3 교시 수 학 영 역

'가'형 | 성명 | | 수험번호 | | | | | | | |

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하시오.
- 먼저 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 기입하시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하여, '0' 이 포함된 경우에는, '0' 을 OMR 답안지에 반드시 표기하시오.

1. $4^{\frac{1}{3}} \div 8^{-\frac{1}{2}} = 4^x$ 일 때, x 의 값은? [2점]

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{13}{8}$ ④ $\frac{13}{10}$ ⑤ $\frac{13}{12}$

2. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 각 θ 가 존재하는 사분면은? [3점]

① 제2사분면
② 제1사분면 또는 제2사분면
③ 제1사분면 또는 제4사분면
④ 제2사분면 또는 제4사분면
⑤ 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면

3. 다음 <보기>에서 항상 성립하는 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 서로 다른 양수) [2점]

<보 기>

ㄱ. $a + \frac{1}{a} > 2$
ㄴ. $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$
ㄷ. $|a+b| > |a| + |b|$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

4. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 두 집합 $< a, b >$, $[a, b]$ 를

$$< a,\ b > = \{\{a\},\ \{a,\ b\}\}$$
$$[a,\ b] = \{a\} \cup \{b\}$$

와 같이 정의할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

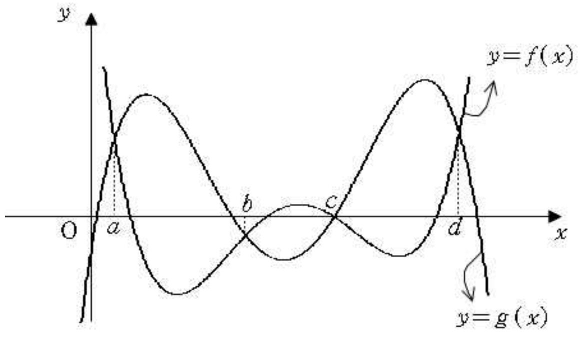
ㄱ. $< a,\ b > = < b,\ a >$
ㄴ. 집합 $< a,\ b >$ 의 부분집합의 개수는 4 개이다.
ㄷ. $[a,\ b] = [c,\ d]$ 이면 $a = c,\ b = d$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

5. 실수 a, b, c 가 $abc > 0$ 를 만족할 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 서로 다른 부호를 갖기 위한 필요충분조건은? [2점]

① $b^2-4ac>0$ ② $b<0$ ③ $bc>0$
④ $\frac{c}{a}-\frac{b}{a}>0$ ⑤ $a+b+c>0$

6. 두 사차함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 분수방정식 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}-\frac{\{g(x)\}^2}{f(x)}=0$의 실근은? [3점]



① $a,\ d$ ② $b,\ c$ ③ $b,\ c,\ d$
④ $a,\ b,\ d$ ⑤ $a,\ b,\ c,\ d$

7. 집합 $A=\{2,3,4,5\}$에서 연산 $*$를 다음과 같이 정의한다.

$$a*b=\begin{cases} a-(a-b)[\log_a b],\ b=2 \text{ 또는 } b=3 \\ b-(b-a)[\log_b a],\ b=4 \text{ 또는 } b=5 \end{cases}$$

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)
이 때, 방정식 $4*(4*x)=x$를 만족하는 x의 개수는? [4점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

8. 함수 $f(x)=4^x$과 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=f(g(2^x+6))$의 실근을 α라 할 때, 다음 중 옳은 것은? [3점]

① $-2 \leqq \alpha < -1$ ② $-1 \leqq \alpha < 0$ ③ $0 \leqq \alpha < 1$
④ $1 \leqq \alpha < 2$ ⑤ $2 \leqq \alpha < 3$

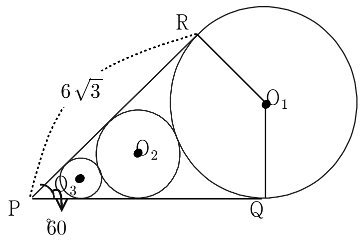
9. $f(x)$의 부정적분 $F(x)$와 $g(x)$의 부정적분 $G(x)$가 다음 관계식을 만족한다.

$$f(x)=\frac{G(x)+g(x)}{2},\ g(x)=\frac{F(x)+f(x)}{2}$$

$f(0)=0,\ g(0)=2$일 때, $f(1)+g(1)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.) [3점]

① -2 ② 2 ③ $1+e$ ④ $2+e$ ⑤ $2e$

10. 아래 그림과 같이 원 O_1 밖의 한 점 P에서 원 O_1에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R이라고 하자. 이 때, $\overline{PR}=6\sqrt{3}$, $\angle RPQ=60^\circ$ 이다. 선분 PQ와 선분 PR에 접하고 원 O_1에 외접하는 원 O_2를 그린다. 이와 같은 방법으로 원 $O_3, O_4, \cdots$ 를 계속 그려 나갈 때, 원 $O_1, O_2, O_3, O_4, \cdots$ 의 반지름 길이의 총합은? [3점]



① $5\sqrt{3}$ ② 9 ③ 10 ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ 12

11. 좌표평면 위의 두 영역 A, B가

$A=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqq 8\}$, $B=\{(x,\ y)\mid |x|+|y|\leqq 1\}$

이고, 일차변환 f 의 행렬이 $\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$이다.

영역 B가 일차변환 $f^{(n)}$에 의하여 옮겨지는 영역을 B_n이라 할 때, $A\subset B_n$이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

(단, $f^{(1)}=f$, $f^{(n+1)}=f\circ f^{(n)}$, n은 자연수) [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

12. 복소수 z가 $|z+6-8i|=5$를 만족할 때, $\arg z$의 최댓값과 최솟값의 차는? (단, $\arg z$는 z의 편각이고, $0\leqq \arg z<2\pi$이다.) [3점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

13. 곡선 $y=x^x\ (x>0)$ 위의 점 $(2, 4)$에서 접선의 기울기는? [3점]

① 4 ② $2(1+\ln 2)$ ③ $4(1-\ln 2)$
④ $4(1+\ln 2)$ ⑤ $4(1+2\ln 2)$

14. 자연수 n 은 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_r^{m_r}$ (단, $m_1, m_2, \cdots, m_r$ 은 음이 아닌 정수이고, $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 은 모두 서로 다른 소수이다.)과 같이 유일하게 소인수분해된다.
이 때, $f(n)=m_1+m_2+\cdots+m_r$ 로 정의한다. 예를 들면, $f(10)=f(2^1\cdot 5^1)=1+1=2$ 이다. 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

ㄱ. $f(10^4)<f(10^5)$
ㄴ. $n_1<n_2$ 이면 $f(n_1)<f(n_2)$ 이다.
ㄷ. 자연수 n 에 대하여 $f(2^n+2^{n+3})=n+2$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. $a>b>0$ 일 때, 직선 $y=ax$ 에 대한 대칭변환을 T_1, 직선 $y=bx$ 에 대한 대칭변환을 T_2 라 하자. 점$(1, 0)$이 합성변환 $T_1\circ T_2$에 의하여 점$(0, 1)$로 옮겨질 때, a 와 b 가 만족하는 식은? [4점]

① $a+b=3$ ② $ab-a-b=2$ ③ $ab=1$
④ $ab-a+b=-1$ ⑤ $ab+a+b=1$

16. 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 $f(n)=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ 이라고 정의할 때, $N=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2003)$ 의 십의 자리 숫자는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

17. 다음과 같이 정의된 함수

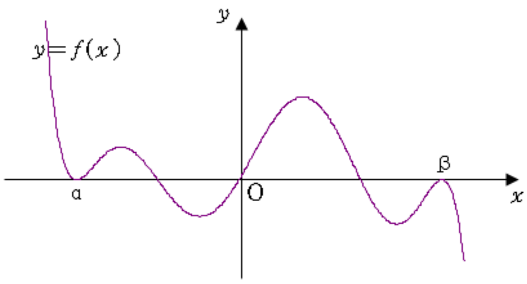
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2} & (x<1)\\ -x^2+4x & (x\geq 1)\end{cases}$$

가 있다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

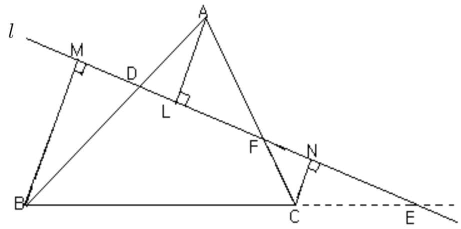
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 $g'(x)=-f(-x)$일 때, $g(x)$의 극대점과 극소점의 개수를 순서대로 구하면? (단, 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 x축에 접한다.) [3점]



① 1, 1 ② 1, 2 ③ 2, 1
④ 2, 2 ⑤ 3, 3

19. 아래 그림과 같이 직선 l이 삼각형ABC의 두 변AB, AC와 각각 D, F에서 만나고, 변BC의 연장선과 직선 l이 점E에서 만난다.



이 때, $\dfrac{\overline{AD}}{(가)}\cdot\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}\cdot\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}}=1$임을 보이는 다음의 [증명]과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

[증 명]
점A, B, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라고 하자.
(나) $\propto \triangle BDM$
$\triangle BEM \propto \triangle CEN$
$\triangle CFN \propto \triangle AFL$
이므로
$\dfrac{\overline{AD}}{(가)}=\dfrac{\overline{AL}}{\overline{BM}}$, $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\dfrac{(다)}{\overline{CN}}$, $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{CN}}{\overline{AL}}$
이고, 이를 정리하면 $\dfrac{\overline{AD}}{(가)}\cdot\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}\cdot\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}}=1$을 얻을 수 있다.

① $\overline{BM}$, △CEN, $\overline{BE}$ ② $\overline{BM}$, △CEN, $\overline{BM}$
③ $\overline{BD}$, △ADL, $\overline{BM}$ ④ $\overline{BD}$, △ADL, $\overline{BE}$
⑤ $\overline{CN}$, △CEN, $\overline{BE}$

20. 다음은 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$의 어떤 성질을 증명하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

> [증 명]
> (ⅰ) $h>0$일 때,
> x 와 $x+h$가 개구간 $(a,\ b)$ 안에 있다면
> $F(x+h)-F(x)=$ $\boxed{\text{(가)}}$이고
> $f(x)$는 정의된 구간에서 $\boxed{\text{(나)}}$이므로
> 적당한 상수 $m, M\ (m \leqq M)$이 존재하여
> $mh \leqq$ $\boxed{\text{(가)}}$ $\leqq Mh$이다.
> 양변을 h로 나누고 $h\to+0$이면 m과 M이 같아지므로
> $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 이다.
> (ⅱ) $h<0$일 때
> (ⅰ)과 동일한 방법으로
> $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 임을 알 수 있다.
> 그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

① $\int_x^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)=f(x)$
② $\int_x^{x+h} f(t)dt$, 미분가능한 함수, $F'(x)=f(x)$
③ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)=f(x)$
④ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 연속인 함수, $F'(x)$는 $[a,b]$에서 연속
⑤ $\int_a^{x+h} f(t)dt$, 미분가능한 함수, $F'(x)$는 $[a,b]$에서 연속

21. 일반항이 $a_n=n\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)(n\geqq 1)$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음은 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$이 존재하도록 하는 실수 a의 값과 이 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하는 과정이다. <풀이>에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

> $a_n=n\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)=\dfrac{\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a}{\dfrac{1}{n}}$
> 이므로 이 수열이 수렴하려면
> $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{4n+1}}-a\right)=$ $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> 그러므로 $a=$ $\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 따라서, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=$ $\boxed{\text{(다)}}$이다.

① 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$　② 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$
③ 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{4}$　④ 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{16}$
⑤ 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{16}$

22. 한국오페라하우스의 좌석은 $A\sim G$까지 7개의 열로 구성되어 있고, 각 열에는 55개의 행이 같은 규칙으로 배열되어 있다. 예를 들어, A 열의 행들이 아래와 같이 배열되어 있을 때, 한국오페라하우스의 총 좌석수는? [4점]

1 행	---	5 개
2 행, 3 행	---	각 6 개
4 행, 5 행, 6 행	---	각 7 개
⋮		⋮

① 3,542　② 4,235　③ 5,733
④ 11,172　⑤ 21,175

23. 공간의 두 점 $(0,\ 2,\ -3)$, $(0,\ -1,\ 0)$을 지나고, 평면 $y+z=5$와 45의 각을 이루는 평면이 x축과 만나는 점의 좌표는? [4점]

① $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$　② $(\pm 1, 0, 0)$　③ $(\pm\sqrt{2}, 0, 0)$
④ $(\pm 2, 0, 0)$　⑤ $(\pm 2\sqrt{2}, 0, 0)$

24. D 대학교 2003 년도 학생 복지금은 학교 전체 예산의 1.1 % 라고 한다. 2003 년부터 이 대학교는 매년 학교 예산과 학생 복지금을 전년대비 각각 5 %, 7 %씩 늘려갈 계획이다. 그러면, 학생 복지금이 학교 예산의 1.3 % 이상이 되는 것은 몇 년 후인가? (단, 아래 상용로그표에 있는 값만 이용하여 계산하시오.)

[4점]

상용로그표

	0	1	…	4	5	6	7
1.0	.0000	.0043	…	.0170	.0212	.0253	.0294
1.1	.0414	.0453	…	.0569	.0607	.0645	.0682
1.2	.0792	.0828	…	.0934	.0969	.1004	.1038
1.3	.1139	.1173	…	.1271	.1303	.1335	.1367
1.4	.1461	.1492	…	.1584	.1614	.1644	.1673

① 9 년　② 10 년　③ 11 년　④ 12 년　⑤ 13 년

주관식 문항 (25 ~ 30)

25. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=|\log_2 x-2|$가 $f(a)=f(b)$를 만족할 때, $a\times b$의 값을 구하시오. [4점]

26. 삼차식 $f(x)$와 이차식 $g(x)$가

$$f(1+2i)=3+2i,\ g(1+2i)=0$$

을 만족한다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(10)$의 값을 구하시오. (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 $f(x)$와 $g(x)$의 계수는 모두 실수이다.) [3점]

27. 타원 $9x^2+16y^2=144$ 위의 점 (x,y)에 대하여 $x+y$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [3점]

28. 방정식 $x^5=1$의 서로 다른 4개의 허근 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$에 대하여 $\dfrac{3(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)(1-\omega_4)}{(1+\omega_1)(1+\omega_2)(1+\omega_3)(1+\omega_4)}$의 값을 구하시오. [4점]

29. 철수가 자기집 정원을 완전하게 소독하려면 세 가지 화합물 A, B, C 가 각각 10 ㎎, 12 ㎎, 12 ㎎이 최소한 필요하다. A, B, C의 화합물이 각각 5 ㎎, 2 ㎎, 1 ㎎이 혼합된 제품은 한 병에 3 만원이고, 1 ㎎, 2 ㎎, 4 ㎎이 혼합된 제품은 한 병에 2 만원이라면, 두 제품을 이용하여 정원을 완전하게 소독하는데 드는 최소비용은 $\boxed{}$만원이다. 이 때, $\boxed{}$ 안의 알맞은 값을 구하시오. [4점]

30. 곡선 $y=\ln x$와 x축, y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전하여 생기는 회전체의 부피는 $\boxed{}\pi$이다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. (단, $e^4=54.58$로 계산한다.) [4점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2004년 사관학교 1차 선발시험(가형) 해설

1) ⑤

$4^{\frac{1}{3}} \div 8^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{13}{6}} = 4^{\frac{13}{12}}$

2) ④

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$\sin\theta\times\cos\theta = -\frac{3}{8}$

ⅰ) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 일 때 , 2사분면

ⅱ) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$ 일 때 , 4사분면

그러므로 2, 4사분면

3) ②

ㄱ. 산술 기하평균에서

$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\times\frac{1}{a}} = 2 \quad \therefore\ a \geqq 2$

ㄴ. $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} > 0$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2 > ab+bc+ca$

$\because\quad a,\ b,\ c$ 가 서로 다른 양수

ㄷ. $|a+b|^2-(|a|+|b|)^2 = 2(ab-|ab|) = 2(ab-ab) = 0$

$\therefore\quad |a+b| = |a|+|b|$

4) ②

ㄱ. $<a,\ b> = \{\{a\},\ \{a,\ b\}\}$

$<b,\ a> = \{\{b\},\ \{b,\ a\}\} \qquad <a,\ b> \neq <b,\ a>$

ㄴ. 집합 $<a,\ b> = \{\{a\},\ \{a,\ b\}\}$ 의 부분집합의 개수는

$\therefore\quad 2^2 = 4$ (개)

ㄷ. $[a,\ b] = \{a\}\cup\{b\} = \{a,\ b\}$

$[c,\ d] = \{c\}\cup\{d\} = \{c,\ d\}$ 이므로

$[a,\ b] = [c,\ d]$, 즉 $\{a,\ b\} = \{c,\ d\}$ 이라고 해서

$a=c$, $b=d$ 인 것은 아님.

5) ②

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 이 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가지려면 두 근의 곱이 음이면 된다.

$\alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ ac<0$ 이고

또, 조건에서 $abc>0$ 이므로 $\therefore\ b<0$

6) ④

분수방정식 $\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} - \frac{\{g(x)\}^2}{f(x)} = 0$ 의 양변에 $f(x)g(x)$ 을 곱하여 정리하면

$(f(x)-g(x))\{\{f(x)\}^2+f(x)g(x)+\{g(x)\}^2\} = 0$ 이므로

$\therefore\ f(x)=g(x) \quad (\because\ f(x)^2+f(x)g(x)+g(x)^2 > 0)$

주어진 그래프에서 $f(x)=g(x)$ 인 x 는 $a,\ b,\ c,\ d$ 인데 $x=c$ 는 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 0 (분모)으로 하므로 무연근이다.

그러므로 방정식의 근은 $\therefore\quad a,\ b,\ d$

7) ③

연산 $4*x$ 를 각각 계산하면

$4*2 = 4-(4-2)[\log_4 2] = 4-2\left[\frac{1}{2}\right] = 4 \ \therefore\ 4*2=4$

$4*3 = 4-(4-3)[\log_4 3] = 4-[\log_4 3] = 4 \ \therefore\ 4*3=4$

$4*4 = 4-(4-4)[\log_4 4] = 4 \ \therefore\ 4*4=4$

$4*5 = 5-(5-4)[\log_5 4] = 5-[\log_5 4] = 5 \ \therefore\ 4*5=5$

그러므로 방정식 $4*(4*x)=x$ 에서

ⅰ) $x=2$ 이면 $4*(4*2) = 4*4 = 4$ (×)

ⅱ) $x=3$ 이면 $4*(4*3) = 4*4 = 4$ (×)

ⅲ) $x=4$ 이면 $4*(4*4) = 4*4 = 4$ (○)

ⅳ) $x=5$ 이면 $4*(4*5) = 4*5 = 5$ (○)

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=5$

8) ④

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$f(x) = f(g(2^x+6))$ 에서 $4^x = 2^x+6$ 이다.

$2^x = t\ (t>0)$ 라 두면 $t^2-t-6=0$ 에서 $t=-2$ 또는 $t=3$

$\therefore\ t=2^x=3 \quad \therefore\ \alpha=\log_2 3$

$\therefore\ 1 \leqq \alpha < 2$

9) ⑤

$F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ 이고 두 식을 변변 더하면

$f(x)+g(x) = \frac{(F(x)+G(x))+(f(x)+g(x))}{2}$

정리하면 $F(x)+G(x) = f(x)+g(x)$ 이다.

양변을 x 에 관하여 미분하면

$F'(x)+G'(x) = (f(x)+g(x))'$

$(f(x)+g(x))' = f(x)+g(x)$

$\frac{(f(x)+g(x))'}{f(x)+g(x)} = 1$

양변을 적분하면

$\ln(f(x)+g(x)) = x+C$

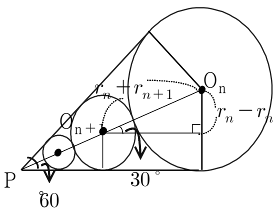
$f(x)+g(x) = e^{x+C}$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $C=\ln 2$

$f(x)+g(x) = e^{x+\ln 2} = e^x e^{\ln 2} = 2e^x$

$\therefore\ f(1)+g(1) = 2e$

10) ②



그림에서

$\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\therefore\ r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n$ 이고

$\frac{r_1}{6\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ r_1 = 6$ 이므로

$\therefore\ r_n = 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 인 등비수열이다.

$\therefore \ \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{6}{1-\frac{1}{3}} = 9$

11) ③

일차변환 $f^{(n)}$ 을 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^n & 0 \\ \sqrt{2}^n & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \sqrt{2}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서 $x' = \sqrt{2}^n x,\ y' = \sqrt{2}^n y$

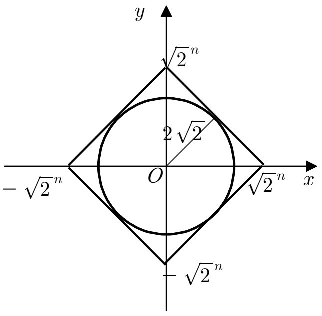
$\therefore \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}^n} x',\ y = \frac{1}{\sqrt{2}^n} y'$ 을 영역B의 식에 대입하면

$\left| \frac{1}{\sqrt{2}^n} x' \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2}^n} y' \right| \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x'| + |y'| \leqq \sqrt{2}^n$ 이므로

$\therefore B_n = \{(x,\ y) \mid |x| + |y| \leqq \sqrt{2^n}\}$: 마름모의 내부

또, $A = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leqq 8\}$: 원의 내부 (단, 경계포함)

$A \subset B_n$ 이 되려면 아래그림에서



원의 중심에서 직선 $x + y - \sqrt{2}^n = 0$ 까지의 거리가 $2\sqrt{2}$ 보다 크거나 같으면 된다. 그러므로 점에서 직선사이의 거리공식을 이용하면

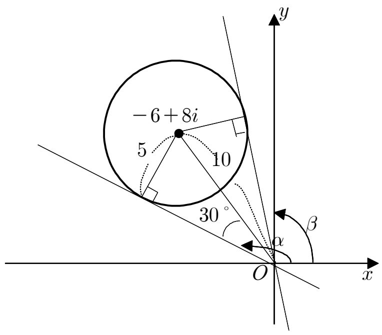
$\frac{|-\sqrt{2}^n|}{\sqrt{2}} \geqq 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}^n \geqq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{n}{2}} \geqq 2^2$

$\therefore \quad \frac{n}{2} \geqq 2 \quad \therefore \quad n \geqq 4$ 이므로 최솟값은 4

12) ③

$|z - (-6+8i)| = 5$ 을 만족하는 점z 는 복소평면에서 $-6+8i$ 을 중심으로 하고 반지름이 5 인 원 위를 움직인다.

또, 편각이란 원점과 점z 를 이은 선분이 실수축의 양의방향과 이루는 각의 크기이므로 아래그림에서 점 z 의 편각 $\arg z$ 의 최댓값은 α 이고 최솟값은 β 이다.



$\therefore \ \alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$

13) ④

$y = x^x$ 의 양변에 밑이 e 인 자연로그를 취하면

$\ln y = x \ln x$ 이고, 이 식을 x 에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y} = \ln x + x \times \frac{1}{x}$

$\therefore \ y' = x^x(\ln x + 1)$ 이므로 접선의 기울기 m 은

$\therefore \quad m = y'_{x=2} = 4(\ln 2 + 1)$ 이다.

14) ③

ㄱ. $f(10^4) = f(2^4 \cdot 5^4) = 4 + 4 = 8$

$f(10^5) = f(2^5 \cdot 5^5) = 5 + 5 = 10$ 이므로

$\therefore \quad f(10^4) < f(10^5)$

ㄴ. (반례) $n_1 = 6 \ < \ n_2 = 10$ 이면

$f(n_1) = f(6) = f(2 \cdot 3) = 1 + 1 = 2$

$f(n_2) = f(10) = f(2 \cdot 5) = 1 + 1 = 2$ 이므로

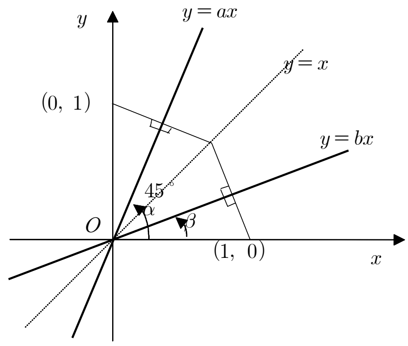
$\therefore \quad f(n_1) = f(n_2)$ 이되어 모순이다.

ㄷ. 자연수 n 에 대하여

$f(2^n + 2^{n+3}) = f(2^n(1 + 2^3)) = f(2^n \cdot 3^2) = n + 2$

15) ④

$a > b > 0$ 일 때,



점(1, 0) 이 합성변환 $T_1 \circ T_2$ 에 의하여 점 (0, 1) 로 옮겨지려면 위의 그림에서 처럼 직각삼각형 4개가 모두 합동이다. 그러므로 직선 $y = ax$ 와 직선 $y = bx$ 가 이루는 각의 크기가 45° 이다.

그러므로 직선 $y = ax$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α 라 두면 $\tan\alpha = a$ 이고,

직선 $y = bx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β 라 두면 $\tan\beta = b$ 이고, $\alpha - \beta = 45°$ 이므로

삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$ 에서

$\frac{a - b}{1 + ab} = 1 \quad \therefore \quad ab - a + b = -1$

16) ①

$100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로

$f(10) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10$

$= 2^{\left[\frac{10}{2}\right] + \left[\frac{10}{2^2}\right] + \left[\frac{10}{2^3}\right]} \times 3^{\left[\frac{10}{3}\right] + \left[\frac{10}{3^2}\right]} \times 5^{\left[\frac{10}{5}\right]} \times 7$

$= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 = 2^6 \times 3^4 \times 7 \times 100$

이므로 $f(10)$ 에서 $f(2003)$ 까지의 십의 자리수는 0 이다.

$f(1) = 1$, $f(2) = 1 \times 2 = 2$, $f(3) = 1 \times 2 \times 3 = 6$,

$f(4) = 24$, $f(5) = 120$,$f(6) = 720$, $f(7) = 5040$,

$f(8) = 15320$, $f(9) = 137880$ 그러므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$ 의 십의 자리수는 1 이다.

17) ⑤

$f_1(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2}$, $f_2(x)=-x^2+4x$ 라 두면

$f_1{}'(x)=x+1\ (x<1)$, $f_2{}'(x)=-2x+4\ (x \geqq 1)$

ㄱ. $f(1)=f_1(1)=f_2(1)=3$ 이고, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$

$\because$) $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to 1+0}(-x^2+4x)=3$

$\therefore$ $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 이므로 연속이다.

ㄴ. $f'(1)=2$ 이므로 미분가능이다. $\because$) $f_1{}'(1)=f_2{}'(1)=2$

ㄷ. $f'(1)=f_1{}'(1)=f_2{}'(1)=2$ 이고 $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=2$

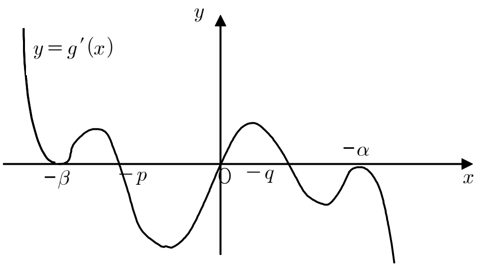
$\because$) $\lim\limits_{x\to 1-0}(x+1)=\lim\limits_{x\to 1+0}(-2x+4)=2$

$\therefore$ $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$ 이므로 연속이다.

18) ③

함수 $g'(x)=-f(-x)$ 은 $y=f(x)$ 를 원점에 대하여 대칭이동 한 그래프이다.

주어진 함수$y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 교점을 $\alpha<p<0<q<\beta$ 라 두면



함수 $y=g(x)$ 의 증감표를 그리면

x	$\cdots$	$-\beta$	$\cdots$	$-q$	$\cdots$	0	$\cdots$	$-p$	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$g(x)$	↗		↗	大	↘	小	↗	大	↘		↘

위의 증감표에서 $\therefore$ 극대점 : 2개 , 극소점 : 1개

19) ③

[증 명] 점A, B, C 에서 직선l 에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라고 하자.

($\triangle$ADL)$\backsim\triangle$BDM, $\triangle$BEM$\backsim\triangle$CEN, $\triangle$CFN$\backsim\triangle$AFL

이므로 삼각형의 닮음에서 $\overline{\mathrm{AD}}$: $\overline{\mathrm{AL}}=\overline{\mathrm{BD}}$: $\overline{\mathrm{BM}}$

$\overline{\mathrm{BE}}$: $\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{CE}}$: $\overline{\mathrm{CN}}$ 이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{(\overline{\mathrm{BD}})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AL}}}{\overline{\mathrm{BM}}}$, $\dfrac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{CE}}}=\dfrac{(\overline{\mathrm{BM}})}{\overline{\mathrm{CN}}}$, $\dfrac{\overline{\mathrm{CF}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{CN}}}{\overline{\mathrm{AL}}}$ 이고,

이를 정리하면 $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{(\overline{\mathrm{BD}})}\cdot\dfrac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{CE}}}\cdot\dfrac{\overline{\mathrm{CF}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=1$ 을 얻을 수 있다.

20) ①

(i) $h>0$ 일 때,

x 와 $x+h$ 가 개구간 $(a,\ b)$ 안에 있다면

$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 에서

$F(x+h)-F(x)=\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+h} f(t)dt$ 이다.

또, $f(x)$ 는 구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이므로 최대·최소정리에 의하여 적당한 상수 $m,\ M(m \leqq M)$ 이 존재하여

$mh \leqq \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt \leqq Mh$ 이다.

양변을 h 로 나누고 $h\to+0$ 이면 m 과 M 이 같아지므로

$\lim\limits_{h\to+0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 이다.

(ii) $h<0$ 일 때 (i)과 동일한 방법으로

$\lim\limits_{h\to-0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 임을 알 수 있다.

그러므로(i),(ii)에 의하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 이다.

즉, $\therefore$ $F'(x)=f(x)$

21) ⑤

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a}{\dfrac{1}{n}}$ 이 수렴하려면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-a\right)=0$ 이다.

그러므로 윗 식에서 $\dfrac{1}{2}-a=0$ $\therefore$ $a=\dfrac{1}{2}$ 이다.

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}-\dfrac{1}{2}\right)\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}+\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}+\dfrac{1}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n-1}{4n+1}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}+\dfrac{1}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{-5n}{4(4n+1)}}{\sqrt{\dfrac{n-1}{4n+1}}+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{-\dfrac{5}{16}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{5}{16}$

22) ②

A열의 총 좌석수를 S 라 두면

$S=1\times5+2\times6+3\times7+\cdots+10\times14$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{10}n(n+4)=\sum_{n=1}^{10}(n^2+4n)$

$=\dfrac{10\cdot11\cdot21}{6}+4\times\dfrac{10\cdot11}{2}=605$

그러므로 총 좌석수는 $\therefore$ $605\times7=4{,}235$

23) ①

$A(0,\ 2,\ -3)$, $B(0,\ -1,\ 0)$ 라 두면 $\overrightarrow{AB}=(0,\ -3,\ 3)$ 이고

평면의 방정식의 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ 라 두면

i) $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ $-3b+3c=0$ $\therefore c=b$ …… ①

ii) 평면 $y+z=5$ 과 이루는 각이 45° 이므로

이 평면의 법선벡터를 $\vec{n}'=(0,\ 1,\ 1)$ 라 두면

$\vec{n}$ 와 $\vec{n}'$ 가 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$\vec{n}\cdot\vec{n}' = |\vec{n}||\vec{n}'|\cos45^\circ$

$b+c=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \ \sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

양변제곱하여 정리하면 $a^2=2bc$ 이므로 ①을 대입하면

$a^2=2b^2 \quad \therefore\ a=\pm\sqrt{2}\,b$ ……②

①, ②에서 평면의 방정식의 방향비는

$a\ :\ b\ :\ c\ =\pm\sqrt{2}\ :\ 1\ :\ 1$ 이므로

평면의 방정식은 $\pm\sqrt{2}(x-0)+(y-2)+(z+3)=0$

$\therefore\ \pm\sqrt{2}x+y+z+1=0$ 이다.

x 축과 만나는 점의 좌표는 $y=0,\ z=0$ 을 대입하면

$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore\ \left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ 0\right)$

24) ①

2003 년도 학교 전체 예산을 A 원이라 두면

	학교전체예산	학생복지금
2003년도	A	$0.011A$
n 년 후	$(1+0.05)^n A$	$(1+0.07)^n\,0.011\,A$

$(1+0.07)^n\,0.011\,A \geq 0.013\times(1+0.05)^n A$ 이므로

양변에 상용로그를 취하면

$n\log1.07+\log0.011 \geq n\log1.05+\log0.013$

$(\log1.07-\log1.05)n \geq \log0.013-\log0.011$

주어진 상용로그표에서

$\log1.07=0.0294,\ \log1.05=0.0212$

$\log1.3=0.1139$ 이므로 $\log0.013=-2+0.1139$ 이고,

$\log1.1=0.0414$ 이므로 $\log0.011=-2+0.0414$ 이다.

$\therefore\ (0.0294-0.0212)n \geq (-2+0.1139)-(-2+0.0414)$

$0.0082\times n \geq 0.0725$

$\therefore\ n \geq 8.8\cdots$ 이므로 9 년후

25) 16

$|\log_2 a-2| = |\log_2 b-2|$ 이고, $a\neq b$ 이므로

$\log_2 a-2=-(\log_2 b-2)$

$\log_2 a+\log_2 b=4$

$\log_2 ab=4 \iff \therefore\ ab=16$

26) 12

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 두면

$f(x)=g(x)Q(x)+ax+b$ (단, $a,\ b$ 는 실수)

$x=1+2i$ 을 대입하면

$f(1+2i)=g(1+2i)Q(1+2i)+a(1+2i)+b$

$3+2i=(a+b)+2ai$ 이므로 복소수의 상등에 의하여

$a+b=3,\ 2a=1 \quad \therefore\ a=1,\ b=2$

$R(x)=x+2 \qquad \therefore\ R(10)=12$

27) 25

$x+y=k$ 라 두고 이 식을 타원에 대입하면

$9x^2+16(k-x)^2=144$

$25x^2-32kx+(16k^2-144)=0$ 이 두 실근을 가져야하므로

$\dfrac{D}{4}=(16k)^2-25(16k^2-144)\geq 0$

$144k^2 \leq 25\times144$

$\therefore\ k^2 \leq 25$ 이므로

$-5\leq k\leq 5$ 이므로 최댓값 $M=5 \quad \therefore\ M^2=25$

28) 15

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ 이므로

방정식$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 의 근이$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4$ 이므로

$x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)(x-\omega_4)$ 이다.

i) $x=1$ 을 대입하면

$5=(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)(1-\omega_4)$

ii) $x=-1$ 을 대입하면

$1=(-1-\omega_1)(-1-\omega_2)(-1-\omega_3)(-1-\omega_4)$

$1=(1+\omega_1)(1+\omega_2)(1+\omega_3)(1+\omega_4)$

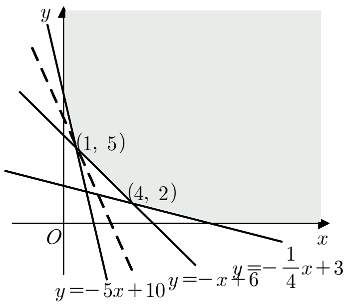
$\therefore\ \dfrac{3(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)(1-\omega_4)}{(1+\omega_1)(1+\omega_2)(1+\omega_3)(1+\omega_4)}=15$

29) 13

A, B, C의 화합물이 각각 5㎎, 2㎎, 1㎎이 혼합된 제품을 x 병, 각각 1㎎, 2㎎, 4㎎이 혼합된 제품을 y 병이 필요하다면

i) $\begin{cases} x\geq0,\ y\geq0 \\ 5x+y\geq10 \\ 2x+2y\geq12 \\ x+4y\geq12 \end{cases}$

ii) 위의 영역을 도시하면



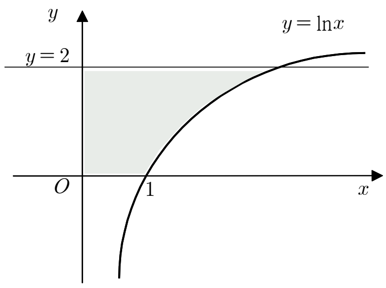
iii) $3x+2y=k$ (만원)라 두면

$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{k}{2}$ 이므로 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 인 직선이다.

위의 점선 그래프 즉, $(1,\ 5)$ 를 지날 때, 최소이다.

$\therefore$ 13 만원

30) 26.79



$\therefore\ V_y=\pi\displaystyle\int_0^2 x^2dy=\pi\int_0^2 e^{2y}dy$

$=\pi\left[\dfrac{1}{2}e^{2y}\right]_0^2=\dfrac{\pi}{2}(e^4-1)=26.79$